다요인실험계획에서 순서대립가설에 대한 비모수검정법의 연구

김 동 희* 임 동 훈*

요 약

본 논문은 둘 이상의 인자들로 구성된 다인자실험계획에서 검정하고자 하는 인자의 순서대립가설에 대한 분포무관인 비모수 검정법을 제안하고 제안된 검정통계량의 점근적 정규성과 기존의 검정법과의 점근상대효율에 대하여 고찰하였다.

또한, 소표본에서 Monte Carlo 연구를 통하여 실험검정력을 비교해 본 결과 두터운 꼬리를 갖는 분포에서는 제안된 검정법이 효율면에서 우수함을 보였다.

1. 서 론

k인자 실험계획에서 순서대립가설에 대한 비모수검정법을 논의하고자 한다. 이 문제를 다룸에 있어 인자들은 교차되어 있고 교호작용의 효과는 존재하지 않는 경우를 다루기로 한다.

위치모수의 순서대립가설에 대한 비모수검정법은 최근 빈번히 논의되어 왔다. 인자가 하나인 실험계획에서는 Jonckheere(1954)에 의해서 Mann−Whitney−Wilcoxon 통계량에 기초를 둔 검정법을 제안하였고, 반복이 없는 2인자 실험계획에서는 Page(1963), Hollander (1967), Pirie and Hollander(1972) 등이 검정법을 제안하였다. 특히, Pirie and Hollander (1972)는 정규 점수 검정(normal scores test)을 제안하여 Pitman 효율면에서 Page(1963) 검정법과 비교하였다. Hettmansperger(1975)는 Page 검정법을 확장하여 반복이 허용하는 2인자 실험계획에 적용하였고 Skillings and Wolfe(1977, 1978) 역시 Jonckheere 검정법을 확장하여 반복이 허용하는 2인자 실험계획에 적용하였다. Page 검정법은 Spearman의 순위상관계수를 이용한 검정법이고 Jonckheere 검정법은 Kendall의 상관계수를 이용한 점에서 서로 다르다. Kepner and Robinson(1984)은 확률화 실험계획에서의 검정법을 제안하였고, Groggel and Skillings(1986)은 다인자 실험계획에서 주효과에 대한 분포무관 검정법을 제안하였다.

따라서 본 논문에서는 인자가 많은 일반적인 다인자 실험계획(multifactor experimental

*부산대학교 통계학과, 부산시 금정구 장전동 산 30

designs)에서 순서대립가설에 대한 비모수검정법을 제안하고 또 효율면에서 기존의 검정법들과 비교하여 제안된 검정법이 우수함을 보이고자 한다.

우리가 다루고자 하는 모델에서 반복을 허용하면서 교호작용이 없는 실험식은 다음과 같다.

$$X_{ijs} = \mu + \beta_i + \theta_j + \epsilon_{ijs} \tag{1. 1}$$
$$i=1, \cdots, L_c \,;\; j=1, \cdots, L_1 \,;\; s=1, \cdots, n_{ij} \geq 1$$

여기서, μ는 전체평균을 나타내고, β_i는 관심있는 인자를 제외한 나머지 인자들로 구성된 혼합인자(combined factor)의 i번째 수준의 효과를 나타내고, θ_j는 관심있는 인자의 j번째 수준의 효과를 나타내며, ϵ_{ijs}는 오차항으로서 서로 독립이고 동일한 분포를 갖는 확률변수이다. 또한 k개의 인자를 $F_1, F_2, \cdots, F_k$라 하고 이들의 수준수를 $L_1, L_2, \cdots, L_k$라 하면 혼합인자의 수준수 $L_c = \prod_{m=2}^{k} L_m$이 된다.

따라서 관심있는 인자를 F_1이라할 때 다루고자 하는 귀무가설과 대립가설은 각각 다음과 같다.

$$\text{귀무가설 } H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_{L_1} \tag{1. 2}$$
$$\text{대립가설 } H_1 : \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{L_1} \tag{1. 3}$$

단, 대립가설에서 적어도 하나는 부등호가 엄격히 성립한다.

제2장에서는 식(1. 2)와 (1. 3)에 주어진 대립가설에 대한 귀무가설을 검정하기 위한 가중순위합에 기초를 둔 검정통계량을 제안하고, 2. 2절에서는 귀무가설하에서 검정통계량의 점근적 정규성을 고찰하며, 2. 3절에서는 제안된 검정법이 귀무가설을 기각하면 어느 처리(treatment)에서의 유의한 차가 있는지 알아보기 위해 다중비교(multiple comparisons)를 하였다.

제3장에서는 변환된 대립가설에서 검정통계량들의 점근적 정규성을 포함한 여러가지 성질들을 고찰하였으며 제안된 검정법에 대한 기존의 검정법의 점근상대효율(asymptotic relative efficiency)을 구하였다.

제4장에서는 소표본에서의 모의실험을 통하여 여러가지 분포하에서 실험검정력을 비교하였다.

2. 검정통계량

2. 1 검정통계량

k개의 인자를 $F_1, F_2, \cdots, F_k$로 표시하고 이들 인자의 수준수를 $L_1, L_2, \cdots, L_k$로 표시하기로 한다. 이때 관심이 있는 인자를 F_1이라 하고 인자 F_1을 제외한 $F_2, \cdots, F_k$의 수준들의 조합으로 구성된 인자를 혼합인자라하고 이를 C로 표시하면 인자 C의 수준수는 $L_C = \prod_{m=2}^{k} L_m$이다. 혼합인자의 각 수준에 대하여 인자 F_1의 수준수 L_1에 있는 측정값들에 작은값부터 순위

를 부여한다. 따라서, 인자가 F_1, C이고 수준수가 각각 L_1, L_C인 (1. 1)에 주어진 2인자 실험계획의 모형을 생각할 수 있다.

X_{ijs}를 C의 i번째 수준, F_1의 j번째 수준에서 s번째 측정값이라 한다. 이때 X_{ijs}의 순위를 R_{ijs}라 했을 때 실험의 각 칸에서 순위합은 $R_{ij\cdot} = \sum_{s=1}^{n_{ij}} R_{ijs}$ 이고 가중순위합은 $R_j = \sum_{i=1}^{L_C} R_{ij\cdot}/n_{i\cdot}$ 이다. 여기서 $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{L_1} n_{ij}$ 은 각 블럭의 크기가 된다.

그러면 다음과 같이 검정통계량 Y를 정의한다.

$$
\begin{aligned}
Y &= \sum_{j=1}^{L_1} jR_j \\
&= \sum_{i=1}^{L_C} \sum_{j=1}^{L_1} jR_{ij\cdot}/n_{i\cdot} \qquad (2.\ 1)
\end{aligned}
$$

이와같이 정의된 검정통계량 Y는 순서대립가설을 나타내는 측도로서 Y의 값이 임계치보다 클때 귀무가설 H_0는 기각된다.

2. 2 점근분포

Hettmansperger(1975, 1984)의 결과를 이용하여 귀무가설하에서 (2. 1) 식에 주어진 Y의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E_0(Y) &= \sum_{i=1}^{L_C} \sum_{j=1}^{L_1} jn_{ij}(n_{i\cdot} + 1)/2n_{i\cdot} \\
Var_0(Y) &= \sum_{i=1}^{L_C} (n_{i\cdot} + 1) \{ \sum_{j=1}^{L_1} j^2 n_{ij}(n_{i\cdot} - n_{ij}) - 2 \sum\sum_{j<k}^{L_1} jk\, n_{ij} n_{ik} \}/12n_{i\cdot}^2 \qquad (2.\ 2)
\end{aligned}
$$

제안된 검정통계량 Y의 점근적 정규성을 증명하기 위하여 Skillings and Wolfe(1978)에 주어진 가정을 인용하기로 한다.

가정 : 모든 i에 대하여 $n_{i\cdot} \leqq M$이 되는 $M < \infty$이 존재한다.

정리 1 위의 가정아래 귀무가설이 참일때 $(Y - E_0(Y))/(var_0(Y))^{1/2}$은 극한 $(L_C \to \infty)$ 표준정규분포를 갖는다.

위이 정리에 대한 증명은 Liapounov의 중심극한 정리로부터 쉽게 얻어진다.

자세한 사항은 Kim, Song and Kim(1986)을 참고하기 바란다.

2. 3 다중비교

제안된 검정통계량이 귀무가설을 기각하면 우리는 관심있는 인자의 어느 수준에서 유의한 차가 있는지를 결정할 수 있다.

가중순위합 $R_j = \sum_{i=1}^{L_C} R_{ij\cdot}/n_{i\cdot}$, $j = 1, \cdots, L_1$의 차에 기초한 다중비교를 생각하자. $j < k$에 대하여 $D_{jk} = R_k - R_j$ 라 하면 귀무가설 $H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_{L_1}$ 하에서

$$E_0(D_{jk}) = \sum_{i=1}^{L_C} (n_{i\cdot} + 1)(n_{ik} - n_{ij})/2n_{i\cdot} \quad ,$$

$$Var_0(D_{jk}) = \sum_{i=1}^{L_C} (n_{i\cdot} + 1)\{n_{i\cdot}(n_{ik} + n_{ij}) - (n_{ik} - n_{ij})^2\}/12n_{i\cdot}^2$$

이다.

귀무가설하에서 $(D_{jk} - E_0(D_{jk}))/(Var_0(D_{jk}))^{1/2}$은 극한정규분포 $N(0, 1)$를 가짐을 알 수 있다. 여기서 인자 F_1의 수준수가 L_1이므로 $\binom{L_1}{2}$ 회의 비교를 해 볼 수 있다.

α를 전체 실험에서의 유의수준이라 하면 $\alpha' = 2\alpha/(L_1(L_1-1))$은 두 쌍의 유의수준으로 볼 수 있으므로

$$D_{jk} > z_{\alpha'}\,(Var_0(D_{jk}))^{1/2}$$

이면 θ_j와 θ_k는 α에서 유의한 차가 있다고 할 수 있다. 여기서 $1-\Phi(z_{\alpha'})=\alpha'$이다. 한편, Bonferroni의 부등식을 이용하여 귀무가설하에서 제1종의 오류를 범할 확률은 α에 의해 유계됨을 쉽게 알 수 있다. 그러나, 이와같은 다중비교는 실제문제에 적용하기에는 어려움이 따르리라 생각된다.

3. 검정통계량의 점근적 성질

3. 1 대립가설하에서 점근적 정규성

검정통계량의 점근적 성질들을 알아보기 위하여 다음과 같은 형태의 변환된 대립가설을 생각한다.

$$H_{L_C} : \theta_j = L_C^{-1/2}(j-1)\theta,\ j=1,\ \cdots,\ L_C\ ;\ \theta > 0\ .$$

정리 2. 2.2절의 가정이 성립한다고 하자. 그러면 대립가설$\{H_{L_C}\}$에서$(Y-E(Y))/(Var(Y))^{1/2}$는 극한 $(L_C\to\infty)$ 표준정규분포를 갖는다.

여기서

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{L_C} \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{a=1}^{L_1} a\{ \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib} \int[1-F(y-(a-b)\theta/\sqrt{L_C})]dy + n_{ia}(n_{ia}+1)/2\}$$

이고, $Var(Y)$는 (2. 2)식에 주어진 $Var_0(Y)$와 같다.

증명. 관측값 X_{iau}의 순위 R_{iau}를 다음과 같이 나타내자.

$$R_{iau} = \sum_{b=1}^{L_1} \sum_{v=1}^{n_{ib}} \psi(X_{iau} - X_{ibv}) + u$$

단, $\psi(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ 로 정의 되는 항등함수이다.

그러면

$$E(R_{ia\cdot}) = \sum_{u=1}^{n_{ia}} \sum_{b=1}^{L_1} \sum_{v=1}^{n_{ib}} P(X_{iau} > X_{ibv}) + n_{ia}(n_{ia}+1)/2$$

$$= \sum_{u=1}^{n_{ia}} \sum_{b=1}^{L_1} \sum_{v=1}^{n_{ib}} \int [1-F(x-\mu-\beta_i-(a-1)\theta/\sqrt{L_C})]$$

$$dF(x-\mu-\beta_i-(b-1)\theta/\sqrt{L_C}) + n_{ia}(n_{ia}+1)/2$$

$$= \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib} \int [1-F(y-(a-b)\theta/\sqrt{L_C})]f(y)dy + n_{ia}(n_{ia}+1)/2 \ .$$

따라서

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{L_C} \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{a=1}^{L_1} a\{\sum_{b=1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib} \quad [1-F(y-(a-b)\theta/\sqrt{L_C})]f(y)dy + n_{ia}(n_{ia}+1)/2\} .$$

여기서 Liapounov의 중심극한정리를 적용하면 정리 1에서와 마찬가지로 점근적 정규성이 얻어진다.

제안된 검정통계량의 효율을 비교하기 위해 모수적 검정법으로는 Puri(1965)의 검정과 비모수적 검정법으로는 Hettmansperger(1975)와 Skillings and Wolfe(1978)의 검정법을 생각하기로 한다.

먼저 정규분포하에서 효율적인 모수적 검정으로 Puri의 통계량 P는 다음과 같다.

$$P = \sum_{i=1}^{L_C} \sum_{a=1}^{L_1-1} \sum_{b=a+1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib}(\bar{X}_{ib\cdot} - \bar{X}_{ia\cdot}) \ .$$

단, $\bar{X}_{ij\cdot} = \sum_{s=1}^{n_{ij}} X_{ijs}/n_{ij}$로 정의되며 실험의 각 칸에서 측정값의 평균을 나타낸다.

Puri(1965)의 정리 5.3으로부터 $\sigma^2 = Var(X_{ijs}) < \infty$ 이면 대립가설 $\{H_{L_C}\}$하에서 $(P-E(P))/(Var(P))^{1/2}$은 극한($L_C \to \infty$) 표준정규분포를 갖는다.

단, $E(P) = \sum_{i=1}^{L_C} \sum_{a=1}^{L_1-1} \sum_{b=a+1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib}\,(b-a)\theta/\sqrt{L_C}$ 이고

$$Var(P) = \frac{\sigma^2}{3} \sum_{i=1}^{L_C} \{(\sum_{j=1}^{L_1} n_{ij})^3 - \sum_{j=1}^{L_1} n_{ij}^3\} \tag{3. 1}$$

이다.

다음으로 Hettmansperger(1975)에 의해 제안된 검정통계량은

$$H = \sum_{j=1}^{L_1} j \sum_{i=1}^{L_C} R_{ij\cdot}/n_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{L_C} \sum_{j=1}^{L_1} jR_{ij\cdot}/n_{ij}$$

이며 대립가설 $\{H_{L_C}\}$하에서 통계량 $(H-E(H))/(Var(H))^{1/2}$은 극한 $(L_C \to \infty)$표준정규분포를 갖는다.

여기서,

$$E(H) = \sum_{i=1}^{L_C}\sum_{a=1}^{L_1} a \frac{1}{n_{ia}} \{ \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib} \int [1-F(y-(a-b)\theta/\sqrt{L_C})]f(y)dy + n_{ia}(n_{ia}+1)/2\}$$

이고

$$Var(H) = \sum_{i=1}^{L_C}\sum_{j=1}^{L_1} n_{i.}(n_{i.}+1)j^2/12n_{ij} - L_1^2(L_1+1)^2(N+L_C)/48 \qquad (3.\ 2)$$

이다.

U_{iab}을 실험에서의 (i, a)칸과 (i, b)칸 사이의 Mann-Whitney 통계량이라 하면 $U_{iab}=\sum_{u=1}^{n_{ia}}\sum_{v=1}^{n_{ib}} \psi(X_{ibv} - X_{iau})$이고 $SW_i = \sum_{a=1}^{L_1-1}\sum_{b=a+1}^{L_1} U_{iab}$라 하면 Skillings and Wolfe의 통계량 SW는

$$SW = \sum_{i=1}^{L_C} SW_i$$

이다.

Skillings and Wolfe(1978)로 부터 대립가설 $\{H_{L_C}\}$하에서 통계량 $(SW - E(SW))/(Var(SW))^{1/2}$은 극한 $(L_C \to \infty)$표준정규분포를 갖는다.

단,

$$E(SW) = \sum_{i=1}^{L_C}\sum_{a=1}^{L_1-1}\sum_{b=a+1}^{L_1} n_{ia}\, n_{ib} \int [1-F(y-(b-a)\theta/\sqrt{L_C})]f(y)dy$$

이고

$$Var(SW) = \sum_{i=1}^{L_C} \{2n_{i.}^3 + 3n_{i.}^2 - \sum_{j=1}^{L_1} n_{ij}^2(2n_{ij} + 3)\}/72 \qquad (3.\ 3)$$

이다.

3. 2 점근상대효율(Asymptotic Relative Efficiency)

이절에서는 지금까지 논의된 검정통계량 P, H, SW에 대한 제안된 검정 통계량 Y의 효율들을 비교해 본다. 계산을 간편하게 하기 위하여 Noether(1955)의 점근상대효율(ARE)에 대한 개념을 도입하여 다음의 정리 3을 얻을 수 있다.

정리 3. 통계량 P, H, SW의 각각에 대한 Y의 점근상대효율은 다음과 같다.

$$ARE(Y, P) = \lim_{L_C \to \infty} \frac{\sigma^2(P)\{\sum_{i=1}^{L_C} \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{a=1}^{L_1} a \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia} n_{ib}(b-a) \int f^2(y)dy\}^2}{\sigma^2(Y)\{\sum_{i=1}^{L_C} \sum_{a=1}^{L_1-1} \sum_{b=a+1}^{L_1} n_{ia} n_{ib}(b-a)\}^2}$$

$$ARE(Y, H) = \lim_{L_C \to \infty} \frac{\sigma^2(H)\{\sum_{i=1}^{L_C} \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{a=1}^{L_1} a \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia} n_{ib}(a-b)\}^2}{\sigma^2(Y)\{\sum_{i=1}^{L_C} \sum_{a=1}^{L_1} a \sum_{b=1}^{L_1} n_{ib}(a-b)\}^2}$$

$$ARE(Y, SW) = \lim_{L_C \to \infty} \frac{\sigma^2(SW)\{\sum_{i=1}^{L_C} \frac{1}{n_{i\cdot}} \sum_{a=1}^{L_1} a \sum_{b=1}^{L_1} n_{ia} n_{ib}(a-b)\}^2}{\sigma^2(Y)\{\sum_{i=1}^{L_C} \sum_{a=1}^{L_1-1} \sum_{b=a+1}^{L_1} n_{ia} n_{ib}(b-a)\}^2}$$

여기서, $\sigma^2(Y)$, $\sigma^2(P)$, $\sigma^2(H)$, $\sigma^2(SW)$은 각각 식 (2. 2), (3. 1), (3. 2), (3. 3)에 주어진 분산들을 표시한다.

실험에서의 반복수가 모두 같을 때 즉, $n_{ij} = n$일 때 P에 대한 Y의 ARE는

$$ARE(Y, P) = 12\sigma^2(\int f^2(y)dy)^2 \left(\frac{nL_1}{nL_1+1}\right)$$

이며 이때 ARE(Y, P)의 값들은 분포에 의존한다는 것을 알 수 있다. 정규분포보다 훨씬 두터운 꼬리를 갖는 이중지수분포, Cauchy분포, 혼합정규분포(contaminated normal distribution)에서 ARE(Y, P)는 1보다 크거나 같다.

또 $n_{ij} = n$인 경우에 SW에 대한 Y의 ARE는

$$ARE(Y, SW.) = \frac{2nL_1^2 + 2nL_1 + 3L_1}{2nL_1^2 + 2nL_1 + 2L_1 + 2}$$

이므로 $L_1 \geqq 2$일 때는 ARE(Y, SW) $\geqq$ 1이다.

각 칸의 반복횟수가 혼합인자 C의 각 수준에서 똑같을 경우 즉, $n_{ij} = n_{i\cdot}/L_1$인 경우 통계량 Y는 H/L_1과 같으므로 ARE(Y, H) = 1이다.

4. 소표본에서의 모의 실험

4. 1 모의 실험계획

우리는 모의실험을 통하여 순서대립가설에 대한 제안된 검정통계량과 지금까지 논의된 다른 통계량들과의 실험 검정력을 비교하고자 한다. 분포의 형태에 따라 균일분포, 정규분포, Cauchy분포, 이중지수분포, 혼합정규분포하에서 소표본 실험을 수행한다. 이때 혼합정규분포의 형태는

$$F(x) = 0.9\Phi(x) + 0.1\Phi(x/3)$$

여기서 Φ는 표준정규분포함수이다.

균일난수와 정규난수들은 각각 IMSL에 있는 GGUBT와 GGNML에 의해 난수가 생성되고 Cauchy와 이중지수난수들은 GGUBT와 확률적분변환정리(probability integral transformation)에 의해 난수가 생성되고 혼합정규 난수들은 GGNML과 확률적분변환정리에 의해 난수가 생성된다. 이 모든 계산은 부산대학교에 있는 CYBER 180−830에서 수행하였다.

모의실험을 행하는데 있어서 3개의 인자는 F_1, F_2, F_3이고 수준수가 4개, 3개, 2개인 삼인자 계획에서 각 칸의 크기가 다른 다음의 4가지 경우에 대하여 실행하였다. 첫번째 실험에서는 인자 F_1의 수준수가 증가할수록 각 칸의 크기가 증가하고 인자 F_3의 수준들에 대하여 F_2의 수준들내에 있는 각 칸의 크기가 같은 경우이고, 두번째 실험에서는 인자 F_1의 수준수가 증가할수록 각 칸의 크기가 증가하고 인자 F_3의 수준들에 대하여 F_2의 수준수가 증가할수록 각 칸의 크기도 증가하는 경우이다. 세번째 실험에서는 인자 F_1의 수준수가 증가할수록 각 칸의 크기가 감소하고 인자 F_3의 수준들에 대하여 F_2의 수준수가 증가할수록 각 칸의 크기가 감소되는 경우이고 각 칸의 크기가 같은 경우는 네번째 실험에서 다루었다.

첫번째 실험

		F_1							
		1		2		3		4	
F_3		1	2	1	2	1	2	1	2
F_2	1	$n_{111}=3$	$n_{112}=3$	$n_{211}=5$	$n_{212}=5$	$n_{311}=7$	$n_{312}=7$	$n_{411}=9$	$n_{412}=9$
	2	$n_{121}=3$	$n_{122}=3$	$n_{221}=5$	$n_{222}=5$	$n_{321}=7$	$n_{322}=7$	$n_{421}=9$	$n_{422}=9$
	3	$n_{131}=3$	$n_{132}=3$	$n_{231}=5$	$n_{232}=5$	$n_{331}=7$	$n_{332}=7$	$n_{431}=9$	$n_{432}=9$

두번째 실험

		F_1							
		1		2		3		4	
F_3		1	2	1	2	1	2	1	2
F_2	1	$n_{111}=3$	$n_{112}=3$	$n_{211}=5$	$n_{212}=5$	$n_{311}=7$	$n_{312}=7$	$n_{411}=9$	$n_{412}=9$
	2	$n_{121}=5$	$n_{122}=5$	$n_{221}=7$	$n_{222}=7$	$n_{321}=9$	$n_{322}=9$	$n_{421}=11$	$n_{422}=11$
	3	$n_{131}=7$	$n_{132}=7$	$n_{231}=9$	$n_{232}=9$	$n_{331}=11$	$n_{332}=11$	$n_{431}=13$	$n_{432}=13$

세번째 실험

		F_1							
		1		2		3		4	
F_3		1	2	1	2	1	2	1	2
F_2	1	$n_{111}=13$	$n_{112}=13$	$n_{211}=11$	$n_{212}=11$	$n_{311}=9$	$n_{312}=9$	$n_{411}=7$	$n_{412}=7$
	2	$n_{121}=11$	$n_{122}=11$	$n_{221}=9$	$n_{222}=9$	$n_{321}=7$	$n_{322}=7$	$n_{421}=5$	$n_{422}=5$
	3	$n_{131}=9$	$n_{132}=9$	$n_{231}=7$	$n_{232}=7$	$n_{331}=5$	$n_{332}=5$	$n_{431}=3$	$n_{432}=3$

네번째 실험

		F_1							
		1		2		3		4	
F_3		1	2	1	2	1	2	1	2
F_2	1	$n_{111}=7$	$n_{112}=7$	$n_{211}=7$	$n_{212}=7$	$n_{311}=7$	$n_{312}=7$	$n_{411}=7$	$n_{412}=7$
	2	$n_{121}=7$	$n_{122}=7$	$n_{221}=7$	$n_{222}=7$	$n_{321}=7$	$n_{322}=7$	$n_{421}=7$	$n_{422}=7$
	3	$n_{131}=7$	$n_{132}=7$	$n_{231}=7$	$n_{232}=7$	$n_{331}=7$	$n_{332}=7$	$n_{431}=7$	$n_{432}=7$

우리는 처리효과의 형태가 $\theta^* = (-\delta\sigma,\ -\delta\sigma/3,\ \delta\sigma/3,\ \delta\sigma)$인 등간격을 가진 처리효과의 형태를 생각했다. 여기서 δ는 0.0에서 0.5까지 0.1씩 증가시켰고 σ는 각 모집단의 표준편차이다. 이차 적률이 존재하지 않은 Cauchy분포에서 σ는 표준정규분포 σ에 상응하도록 다음과 같이 결정했다.

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = 0.6827 = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

을 만족하는 σ는 1.8326이다.

이 모의실험을 행하는데 극한정규분포를 이용하여 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 기각치를 구하였다. 1000번 반복 수행하여 각 통계량 Y, H, SW, P의 실험 검정력을 얻었다.

4. 2 모의실험 결과

지금까지 논의된 통계량 Y, H, SW, P의 실험 검정력에 대한 비교가 표 4. 1, 4. 2, 4. 3, 4. 4에 주어져 있다. 모수적검정 P는 균일분포, 정규분포하에서는 가장 큰 검정력을 갖고 있으나 두터운 꼬리를 갖는 이중지수분포, Cauchy분포, 혼합정규분포에서는 검정력의 손실이 큼을 알 수 있다. 특히, Cauchy분포에서는 검정력이 현저하게 떨어짐을 알 수 있다. 표 4. 1, 4. 2, 4. 3에서 보는 바와 같이 각 칸의 크기가 다른 경우 비모수검정법 Y, H, SW는 꼬리가 두터운 분포 즉, 이중지수분포, Cauchy분포, 혼합정규분포에서 검정 통계량 P보다 좋은 검정력을 갖고 있다. 한편 제안된 검정통계량 Y는 모든 분포에 대하여 검정 H나 SW보다 우수함을 알 수 있다. 특히, 제안된 통계량 Y는 각 칸의 순위합 $R_{ij\cdot}$을 계산하는데 사용된 순위들의 잠정적 크기(Potential size)가 $n_{i\cdot}$의 함수라는 사실에 기인하여 가중치를 $n_{i\cdot}$로 택함으로서 검정통계량 H보다 좋은 검정력을 갖음을 알 수 있다.

각 칸의 크기가 똑같을 경우에 대하여는 표 4. 4에서 보는 바와 같이 3. 2절에서 고찰한 점근상대효율의 결과를 그대로 반영함을 알 수 있다. 제안된 통계량 Y는 정규분포보다 두터운 꼬리를 갖는 이중지수분포, Cauchy분포, 혼합정규분포하에서는 모수적 통계량 P보다 좋은 실험 검정력을 갖고 있으며 모든 분포에 대해서 통계량 SW와는 뚜렷한 차이는 없다. 한편, 통계량 H와 비교함에 있어서 Y는 H/L_1과 같으므로 통계량 Y와 H는 똑같은 검정력을 갖고 있음을 알 수 있다.

이와 같이 제안된 검정통계량 Y는 여러가지 분포하에서 검정력을 비교해본 결과 기존의 검정통계량들보다 효율적임을 알 수 있다.

표 4. 1 실험 검정력(첫번째 경우)

(α = 0.05)

통 계 량	δ=0. 0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5
		균일 분포				
Y	0.045	0.228	0.449	0.732	0.938	0.984
H	0.052	0.210	0.426	0.709	0.906	0.974
SW	0.046	0.219	0.444	0.721	0.934	0.983
P	0.058	0.262	0.509	0.807	0.971	0.995
		정규 분포				
Y	0.055	0.190	0.473	0.771	0.948	0.996
H	0.047	0,186	0.453	0.729	0.921	0.991
SW	0.053	0.175	0.472	0.752	0.941	0.993
P	0.066	0.238	0.534	0.808	0.967	0.998
		이중 지수 분포				
Y	0.060	0.240	0.654	0.890	0.991	1.000
H	0.065	0.240	0.614	0.855	0.979	0.996
SW	0.054	0.230	0.633	0.885	0.988	1.000
P	0.078	0.209	0.552	0.817	0.964	0.998
		Cauchy 분포				
Y	0.052	0.212	0.495	0.767	0.925	0.981
H	0.050	0.199	0.467	0.727	0.894	0.965
SW	0.052	0.193	0.488	0.758	0.924	0.982
P	0.056	0.070	0.101	0.150	0.181	0.210
		혼합정규 분포				
Y	0.065	0.240	0.581	0.862	0.979	0.998
H	0.062	0.225	0.545	0.836	0.959	0.996
SW	0.062	0.245	0.574	0.857	0.977	0.997
P	0.077	0.232	0.538	0.794	0.955	0.993

표 4. 2 실험 검정력(두번째 경우)

(α = 0.05)

통 계 량	δ=0. 0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5
		균일 분포				
Y	0.055	0.262	0.564	0.893	0.975	1.000
H	0.053	0.241	0.529	0.846	0.962	0.997
SW	0.047	0.252	0.558	0.872	0.975	0.998
P	0.053	0.282	0.618	0.918	0.987	1.000
		정규 분포				
Y	0.044	0.258	0.599	0.898	0.987	0.997
H	0.042	0.243	0.528	0.838	0.978	0.995
SW	0.042	0.251	0.580	0.882	0.986	0.997
P	0.053	0.283	0.649	0.920	0.989	0.999
		이중 지수 분포				
Y	0.052	0.356	0.760	0.974	0.998	1.000
H	0.055	0.324	0.692	0.950	0.995	0.999
SW	0.050	0.352	0.733	0.962	0.999	1.000
P	0.057	0.308	0.639	0.921	0.992	0.999
		Cauchy 분포				
Y	0.062	0.230	0.585	0.858	0.977	0.993
H	0.060	0.221	0.549	0.833	0.957	0.994
SW	0.067	0.233	0.580	0.856	0.977	0.994
P	0.050	0.075	0.111	0.149	0.155	0.192
		혼합정규 분포				
Y	0.050	0.336	0.725	0.966	0.998	1.000
H	0.047	0.285	0.674	0.927	0.995	1.000
SW	0.050	0.312	0.698	0.959	0.977	1.000
P	0.054	0.290	0.642	0.909	0.990	1.000

표 4. 1 실험 검정력(세번째 경우)

(α = 0.05)

통 계 량	δ=0. 0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5
		균일 분포				
Y	0.045	0.256	0.594	0.862	0.976	1.000
H	0.043	0.234	0.563	0.843	0.969	0.999
SW	0.047	0.244	0.562	0.842	0.970	0.998
P	0.061	0.288	0.635	0.899	0.988	1.000
		정규 분포				
Y	0.052	0.271	0.592	0.886	0.981	0.999
H	0.044	0.244	0.558	0.851	0.972	0.998
SW	0.054	0.251	0.579	0.872	0.977	0.999
P	0.065	0.294	0.636	0.912	0.987	0.999
		이중 지수 분포				
Y	0.041	0.321	0.754	0.966	0.996	1.000
H	0.051	0.325	0.724	0.956	0.994	1.000
SW	0.046	0.299	0.746	0.963	0.998	1.000
P	0.052	0.268	0.621	0.909	0.980	1.000
		Cauchy 분포				
Y	0.061	0.249	0.608	0.876	0.975	0.998
H	0.053	0.231	0.571	0.850	0.969	0.995
SW	0.061	0.245	0.601	0.861	0.973	0.997
P	0.063	0.078	0.096	0.136	0.153	0.213
		혼합정규 분포				
Y	0.049	0.320	0.744	0.973	0.999	0.999
H	0.047	0.304	0.719	0.955	0.996	1.000
SW	0.054	0.305	0.723	0.960	0.999	0.999
P	0.069	0.283	0.654	0.904	0.986	0.998

표 4. 1 실험 검정력(네번째 경우)

($\alpha = 0.05$)

통 계 량	δ=0. 0	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5
균일 분포						
Y	0.056	0.250	0.581	0.862	0.969	0.996
H	0.056	0.250	0.581	0.862	0.969	0.996
SW	0.054	0.247	0.574	0.868	0.966	0.996
P	0.070	0.277	0.652	0.911	0.991	0.999
정규 분포						
Y	0.055	0.226	0.557	0.844	0.976	0.998
H	0.055	0.226	0.557	0.844	0.976	0.998
SW	0.051	0.221	0.561	0.841	0.974	0.998
P	0.063	0.261	0.632	0.879	0.986	1.000
이중 지수 분포						
Y	0.047	0.298	0.740	0.958	0.994	1.000
H	0.047	0.298	0.740	0.958	0.994	1.000
SW	0.045	0.300	0.737	0.960	0.995	1.000
P	0.067	0.282	0.641	0.901	0.983	0.998
Cauchy 분포						
Y	0.056	0.239	0.597	0.851	0.964	0.997
H	0.056	0.239	0.597	0.851	0.964	0.997
SW	0.055	0.233	0.606	0.847	0.968	0.999
P	0.048	0.083	0.112	0.143	0.170	0.211
혼합정규 분포						
Y	0.050	0.285	0.720	0.950	0.995	0.999
H	0.050	0.285	0.720	0.950	0.995	0.999
SW	0.048	0.285	0.718	0.953	0.995	0.999
P	0.062	0.260	0.645	0.912	0.986	0.997

참 고 문 헌

(1) Groggel, D. J. and Skillings, J. H. (1986). "Distribution-free tests for main effects in multi-factor design", The Americal Statistician, 40, No. 2, 99 – 102.

(2) Hettmansperger, T. P.(1975), "Nonparametric inference for ordered alternatives in a randomized block design", Psychometrika, 40, 53 – 62.

(3) Hettmansperger, T. P.(1984), "Statistical inference based on ranks", John Wiley and Son, Inc.

(4) Hollander, M.(1967), "Rank tests for randomized blocks when the alternatives have a priori ordering", Amn. Math. Statist., 38, 867 – 877.

(5) Jonckheere, A. P.(1954), "A distribution – free k sample against ordered alternatives", Biometrika, 41, 133 – 145.

(6) Kepner, J.L. and Robinson, D.H.(1984), "A distribution – free rank test for ordered alternatives in randomized complete block design", J. Amer. Statist. Assoc., 79, 212 – 217.

(7) Kim, D. H. and Song, M. S. and Kim, W. C.(1986), "A distribution-free rank tests for ordered alternatives in a randmized block design", Journal of the Korean Statistical Society, 15, No.1, 9 – 25.

(8) Noether, G.E.(1955), "On a theorem of Pitman", Ann. Math. Statist., 26, 64 – 68.

(9) Page, E.B.(1963), "Ordered hypotheses for multiple treatments : A significance test for linear ranks", J. Amer. Statist. Assoc., 58, 216 – 230.

(10) Pirie, W.R. and Hollander, M.(1972), "A distribution – free normal scores test for ordered alternatives in the randomized block design", J. Amer. Statist. Assoc., 67, 855 – 857.

(11) Puri, M.L.(1965), "Some distribution – free k sample rank tests of homogeneity against ordered alternatives", commun. On pure and applied mathematics, 18, 51 – 68.

(12) Skillings, J.H. and Wolfe, D.A.(1977), "Testing for ordered alternatives by combining independent distribution – free block statistics", Commun. Statist. Theor. Meth., A6(15), 1453 – 1463.

(13) Skillings, J.H. and Wolfe, D.A.(1978), "Distribution – free tests for ordered alternatives in a randomized block design" J. Amer. Statist. Assoc., 73, 427 – 431.

Nonparametric Test for Ordered Alternatives in Multifactor Designeds

Kim Dong Hee*, Lim Dong Hoon*

Abstract

The objective of this paper is to propose a nonparametric distribution-free test for ordered alternatives in k crossed factor designs by using the concepts of combined factor and within-blocks ranks.

We investigate the asymptotic normality of the proposed test statistic and the Pitman efficiencies. We also compared the small sample empirical powers of the tests considered in this paper by Monte Carlo study.

Thus we can conclude that the proposed test is efficient and robust for the underlying distributions

* Dept. of Statistics, Pusan National University,
Keumjeong-gu Jangieon-dong San 30, Pusan.