

有限要素와 境界要素를 結合한 地下空洞의 變位解析

A Combined Finite Element–Boundary Element Method
of Underground Displacements Analysis

黃 昌 圭*

Hwang, Chang–Kyu

朴 性 栽**

Park, Sung–Zae

Abstract

The finite element and boundary element methods of underground analysis are both well established numerical techniques for determination of stress and displacement distributions at underground excavation. The finite element method presents antithetical advantages and limitations. Complex constitutive behaviour may be modelled, at the expense of numerical efficiency and, for infinite domain, inadequate representation of remote boundary conditions. The inherent advantages of the boundary element method are the ease with which infinite domain problems may be analysed, and the efficiency of analysis typically associated with a boundary value solution procedure. Application of the method is limited by the requirements linear constitutive behaviour for the medium.

A combined of the finite element and boundary element methods of underground analysis is shown to preserve the advantages of each procedure, and, eliminates their individual disadvantages. Procedures employed in this papers described combined FEBEM algorithm. Solutions of underground excavation verifying the performance of combined FEBEM code are compared with theoretical solution, boundary element solution and finite element solution.

要 旨

地下空洞의 解析에 관한 有限要素法과 境界要素法의 解法은 많은 研究가 되어있다. 地下空洞과 같은 構造物의 安定性解析時, 對象의 領域이 無限領域中の 極히 작은 一部分일 境遇가 많다. 이 境遇 無限領域은 非定義領域이므로 有限要素의 離散化가 不可能하며, 影響範圍를 假定하여 定義領域으로 變換하면, 有限要素解析中에 剛性매트릭스가 커지게되어 컴퓨터의 容量 및 計算時間上의 問題點을 일으키게 된다. 境界要素法을 適用하면, 無限領域을 考慮할 수 있으나, 材料의 特性을 考慮하기는 어려움이 많다. 本 論文은 特定部分의 變位 및 應力을 詳細히 알 수 있으며, 材料의 特性을 考慮한 프로그램을 利用할 수 있는 有限要素法의 長點과 無限領域을 쉽게 考慮할 수 있는

* 正會員, 釜山大學校 大學院 土木工學科

** 正會員, 釜山大學校 工科大學 土木工學科 教授

境界要素法の長點을 갖는有限要素와境界要素를結合한解析法으로無限彈性地盤中の地下空洞安定解析에 대한數値解析値와理論値를比較하여效用性を檢討하였다. 그結果嚴密解에 가까운境界要素法보다는精度가 떨어지나有限要素法보다는精度가改善되었다.

1. 序 論

無限領域은現實的으로 반드시存在한다고 할 수 없지만,解析對象領域과比較하여外部의領域이顯著하게 큰境遇는無限領域에包含되어있는有限領域으로 모델화하는 것이便利할 때가 많다. 흙-構造物의相互作用問題, 構造物-流體의相互作用問題, 熱傳導問題, 電界問題, 磁界問題, 音響問題, 擴散問題, 波動問題等等이다¹⁾. 地下空洞의安定性解析問題도無限領域에包含되어있는有限領域의問題로 취급할 수 있다.

無限彈性地盤의解析에關한理論解는 Kelvin 해²⁾, Boussinesq 해³⁾, 半無限彈性地盤의理論解는 Mindlin 해⁴⁾, Melan 해⁵⁾ 등이 있다. 그러나, 이들의理論解는特殊한境遇를除外하고는適用할 수 없어一般解는되지 못한다. 地下空洞의安定解析에關한彈性理論解는 Terzaghi와 Richart⁶⁾, Poulos와 Davis⁷⁾, Jaeger와 Cook⁸⁾, Pender⁹⁾ 등이 있으며, 탄소성理論解析解는 Coulomb의降伏基準을適用한 Bray¹⁰⁾의研究가 있다. 無限領域을考慮한數値解析法으로減衰型無限要素法¹¹⁾, 外部有限要素法¹²⁾, Hybrid형無限要素法¹³⁾, 境界要素法¹⁴⁾ 등이 있다.

本研究는無限等方彈性地盤中の地下空洞을二次元으로解析하였다. 암반中の節理, 斷層, 地下水의 흐름은考慮하지 않았으며, 主要關心의對象領域은有限要素로, 그外部는境界要素로分割하여, 有限要素와境界要素를結合한解析法으로解析한數値解, 境界要素法の數値解, 有限要素法の數値解 및彈性理論解를比較하여解析法の適用性 및效用性を檢討하고자한다.

2. 有限要素法과境界要素法の理論

2.1 有限要素法¹⁵⁾

彈性理論에서해를 구하는方法은 주어진

境界條件에 대한支配方程式을 푸는方法과應力成分과作用荷重의 한內部的일과外部의일이關係되는積分量을最少化하는方法이 있다. 有限要素法은後者의方法으로全體의에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi = V + W \quad (2.1)$$

여기서, V는變形率에너지이며, W는作用荷重의포텐셜에너지이다. 荷重이 한 일은陰의포텐셜에너지이므로 식(2.1)은 다음과 같다.

$$\Pi = V - W \quad (2.2)$$

微小體積에 대한變形率에너지는

$$dV = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} \quad (2.3)$$

여기서 σ_0 : 初期應力

ϵ : 變形率

이며, 全體의內部變形率에너지는全體積에關한積分으로 얻는다.

$$V = \frac{1}{2} \int (\{\epsilon\}^T \{\sigma\} - \{\epsilon_0\}^T \{\sigma_0\}) dV \quad (2.4)$$

다음으로 임의점의變位成分{u}은各節點에서의變位벡터{U}로부터

$$\{u\} = [N] \{U\} \quad (2.5)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{U\} \quad (2.6)$$

여기서 [N]은形狀함수이며, [B]는 [N]을微分하여 얻을 수 있다. 節點 i에 대하여

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\partial N_i / \partial y \quad \partial N_i / \partial x$$

物體力을包含한外力이 한 일에너지는

$$W = W_p + W_b \quad (2.8)$$

이다.

여기서 W_p : 外部荷重이 한 일에너지

W_b : 物體力이 한 일에너지

식(2.6)을식(2.4)에代入하고, 應力-變形率의關係를考慮하여 $\partial \Pi / \partial \{U\} = 0$ 하면, 다음의식을 얻는다.

$$\sum [k^{(e)}] \{U\} = - \sum \{f^{(e)}\} \quad (2.9)$$

식(2.9)는 다음식으로 쓸 수 있다.

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (2.10)$$

여기서, $[K] = \int [B]^T [D] [B] dV$

$$\{F\} = \int [B] \{\sigma_0\} dV$$

[D]; 재료의 강성매트릭스

2.2 境界要素法

境界要素法을 分流하면, 直接法(direct integral method)와 間接法(indirect integral method)로 大別된다. 直接法은 境界條件으로 주어진 物理的意味가 明確한 양을 未知函數로 하고, 境界積分方程式에 의해 直接解를 얻는 方法이다. 直接法은 明瞭하고 汎用性이 있으며, 數值解析時에 有限要素法의 離散化技法을 導入할 수 있다. 直接法은 解의 精度가 높아 境界要素法의 主流를 이루고 있다.¹⁶⁾

間接法은 支配方程式을 滿足하는 特異解를 境界위 또는 境界의 外側에 假想으로 分布시키고, 分布密度函數를 積分方程式으로 얻는 方法이다. 分布密度函數가 주어진 境界條件을 滿足하도록 決定한 후, 間接적으로 해를 求하는 方法이다. 數值解析時는 離散化 技法을 導入하지 않는 境遇가 많지만, 小規模의 計算으로도 높은 精度의 해를 얻을 수 있다. 특히, 포텐셜 問題의 應用에서는 많은 進陞이 되어 있으며, 彈性問題에서도 體積力法, 連續電位分布法 등 獨自의 發展을 하고 있다.¹⁷⁾

본 論文에서는 有限要素와 境界要素를 結合하기 到便利한 直接法으로 境界要素法을 利用한다.

1) 積分方程式과 基本解

線形彈性問題에서 基本式은

$$cu_{ii} + \int u_k p^*_{ik} d\Gamma = \int p_k u^*_{ik} d\Gamma + \int b_k u^*_{ik} d\Omega \quad (2.11)$$

($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$)

이다.

여기서 c : 境界面의 狀態에 依하여 決定되는 常數

u_{ii} : i 점에서 l 方向의 變位

u^*_{ik} : 變位基本解

p^*_{ik} : 表面力基本解

b_k : 物體力

Γ : 境界領域

Ω : 物體領域

二次元 等方彈性體에 대한 Kelvin의 基本解

는 다음과 같다.

• 變位の 基本解

$$u^*_{ik} = -(3-4\nu)\log(r)\delta_{ij} - \tau_{,i}\tau_{,k} / (8\pi G(1-\nu)) \quad (2.12)$$

• 表面力의 基本解

$$p^*_{ik} = -\{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\tau_{,i}\tau_{,k}] \partial_r / \partial_n - (1-2\nu)(\tau_{,in} - \tau_{,kn})\} / (4\pi(1-\nu)r) \quad (2.13)$$

• 變形率의 基本解

$$S^*_{ikl} = -\{(1-2\nu)(\tau_{,k}\delta_{il} + \tau_{,i}\delta_{kl}) - \tau_{,i}\delta_{lk} + 2\tau_{,i}\tau_{,j}\tau_{,k}\} / (8\pi(1-\nu)G_r) \quad (2.14)$$

• 應力의 基本解

$$\sigma_{ilk} = -(1-2\nu)(\tau_{,k}\delta_{il} + \tau_{,i}\delta_{kl} - \tau_{,i}\delta_{lk}) + \tau_{,i}\tau_{,k}\tau_{,l} / (4\pi(1-\nu)r) \quad (2.15)$$

여기서 G : 전단 彈性係數

ν : 포아슨 비

τ : $\sqrt{(r_i + r_k)^2}$

$\tau_{,i}$: $\partial r / \partial x_i$

$\tau_{,k}$: $\partial r / \partial x_k$

$\tau_{,l}$: $\partial r / \partial x_l$

δ_{ik} : Kronecker delta 함수

2) 境界要素의 離散化

境界要素로 離散化하여 매트릭스로 表現하면, 線形要素의 境遇 節點에서

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2$$

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (2.16)$$

$$p = N_1 p_1 + N_2 p_2$$

여기서 $N_1 = (1-\xi) / 2$

$N_2 = (1+\xi) / 2$

ξ : 局所座標係

이므로 식(2.11)은

$$cu + \sum (\int p^* N_i d\Gamma) u^n = \sum (\int u^* N_i d\Gamma) p^n + \sum (\int u^* N_i d\Omega) b^n \quad (2.17)$$

으로 되며, 各各의 積分은 Gauss 數值積分法을 適用하면,

$$d\Gamma = [J] \xi \quad (2.18)$$

[J] : Jacobian 行列式

이므로 식(2.17)은

$$cu + \sum [J]_i w_i p^* N_i u^n = \sum (\sum [J]_i w_i u^* N_i) p^n + \sum (\sum [J]_i w_i u^* N_i) b^n \quad (2.19)$$

으로 되며, w_i 는 數值積分의 무게함수이다. 식(2.19)는

$$[H]\{U\}=[G]\{P\}+\{b\} \quad (2.20)$$

이고, 境界條件을 高麗하여 식(2.10)의 형으로 쓸 수 있다.

$$[A]\{X\}=\{F\} \quad (2.21)$$

3. 有限要素와 境界要素法の 結合

一般的으로 境界要素法은 無限領域이나 龜裂問題의 解析에는 適切하지만, 材料의 非線形問題를 包含하여 材料特性을 考慮한 解析法으로는 그리 明快하지 못하며, 반대로 有限要素法은 材料의 非線形問題를 包含하여 材料特性을 考慮한 解析法의 研究는 發達하였으나 無限領域에 대해서는 適當하지않은 것으로 되어있다. 이와 같이 境界要素를 結合한 解析法은 Ziekiewicz, Kelly, Bettess¹⁹⁾가 처음 提案하였으며, 그以後의 研究가 多數 있다.^{20~23)}

有限要素와 境界要素를 結合한 解析法은 두가지가 있다. 첫째는 境界要素로 分割된 領域全體를 하나의 有限要素로 취급하는 方法으로 等價有限要素法(equivalent finite element method) 또는 對稱結合法이라 한다. 一般的으로 有限要素部分의 剛性매트릭스는 對稱이며, 境界要素部分의 剛性매트릭스는 非對稱이다. 有限要素의 강성매트릭스와 境界要素의 강성매트릭스를 結合한 다음 連立方程式 解法上의 便宜를 위하여, 境界要素의 剛性매트릭스를 對稱化를 할 必要가 있다.

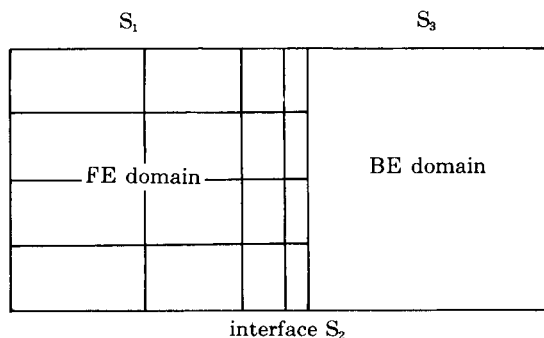


그림 1. Domain divided into finite element and boundary element regions

둘째는 有限要素領域을 境界要素로 變換하는 方法으로 等價境界要素法(equivalent boundary method) 또는 非對稱結合法이라 한다. 본 論文에서는 等價有限要素法으로 展開한다.

有限要素領域에서 境界와 내점을 포함한 S_1 와 境界 S_2 로 나누면, 식(2.10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^f & K_{12}^f \\ K_{21}^f & K_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

식(3.1)의 힘 벡터는 自重을 包含하면, 非線形 解析에서는 荷重増分 후의 힘 벡터로 볼 수 있다. 식(2.20)을 境界 S_2 境界 S_3 로 나누면,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

이며, $[G]^{-1}$ 를 兩邊에 곱하면,

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

이다. P_2, P_3 는 境界要素의 表面力이므로 有限要素와 結合하려면 等가節點力으로 變換할 必要가 있다. Beer²⁰⁾는 假想일의 原理를 適用하여 다음과 같이 定義하고 있다.

$$[M] = \begin{bmatrix} N_{22}^1 I & N_{12}^1 I & 0 \\ N_{21}^1 I & (N_{22}^1 + N_{11}^2) I & N_{22}^2 I \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

여기서 $N_{ij}^k = \int_{S_k} N_i N_j ds$ 이며, $[I]$ 는 단위매트릭스이다.

境界要素領域에서 境界 S_2 에서의 表面力 $\{P\}_2$, 境界 S_3 에서 表面力 $\{P\}_3$ 의 等價節點力 벡터는

$$F^b_2 = [N_2] \{P_2\} \quad (3.5)$$

$$F^b_3 = [N_3] \{P_3\} \quad (3.6)$$

이다.

境界要素의 表面力은 Gauss積分으로 局所座標界의 節點력으로 變換되므로 變換매트릭스는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M] = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

본 研究에서는 식(3.7)을 適用하였으며, 그 結果는 식(3.6)을 適用한 境遇와 같았다.

兩邊에 식(3.7)의 $[M]$ 을 곱하면,

$$\begin{bmatrix} M \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

이다. 식(3.8)을 식(3.1)의 형으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^b & K_{12}^b \\ K_{21}^b & K_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^b \\ U_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^b \\ F_3^b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

境界 S_2 에서 變位の 連續條件과 平衡條件을 考慮하면,

$$\begin{cases} U_2^f - U_2^b = 0 \\ F_2^f + F_2^b = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

이므로 식(3.1)과 식(3.9)을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^f & K_{12}^f & 0 \\ K_{21}^f & K_{22}^f + N_{11}^b & K_{12}^b \\ 0 & K_{21}^b & K_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^f \\ U_2^f \\ U_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^f \\ 0 \\ F_3^b \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

여기서 剛性메트릭스는 非對稱, 비밴드형이다. 無限領域을 境界要素로 分割한 境遇는 K_{22}^b 의 행과 열이 없어 剛性메트릭스의 增加는 없게된다.

既存의 有限要素 프로그램과의 結合을 쉽게하기 爲하여 最小自乘法에 의한 매트릭스의 對稱化 技法을 利用하고 있다.²⁰ 本論文에서도 對稱化 技法을 使用하여, 매트릭스의 解法은 Gauss 소거법을 利用한다.

4. 數值解析

4.1 프로그램의 構成

本 프로그램은 개인용컴퓨터에서 隨行가능토록 하였다. 또한, 有限要素와 境界要素를 結合한 解析法은 물론, 有限要素와 境界要素 各各의 解析도 可能토록하였다. 有限要素領域은 3節點 三角要素 프로그램²⁰을, 境界要素領域은 1 차요소 프로그램²⁰을 利用하였으며, 有限要素와 境界要素의 剛性메트릭스를 結合하는 부프로그램을 開發하였다. 本 프로그램의 흐름도는 그림 2와 같다.

각 부프로그램의 機能은

INPUT : 有限要素 및 境界要素의 資料入力
有限要素의 資料는 부프로그램 INPUTF에 入力하며, 境界要素의 資料는 부프로그램 INPUTB에 入力한다.

STIFF : 有限要素 및 境界要素의 剛性메트릭스를 만들고, 連續條件과 適合條件에 따라 有限要素 및 境界要素의 剛性메트릭스를 부프로그램 ADDSTF에서 結合한다.

SLNPD : 부프로그램 AADSTF에 結合한 剛性메트릭스를 Gauss 消去法에 의하여 連立方程式을 푼다.

OUTPUT : 結果를 出力한다. 有限要素의 結果는 부프로그램 OUTPUTF에서 境界要素의 結果는 부프로그램 OUTPUTB에서 出力한다.

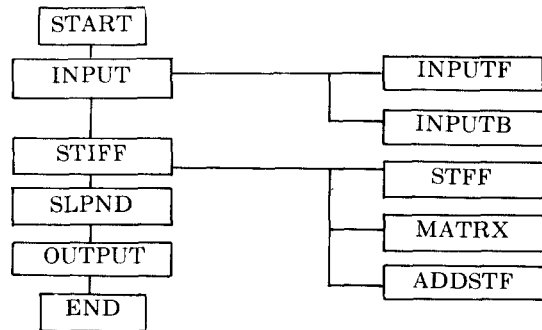


그림 2. Block diagram of FEBEM program

4.2 프로그램의 檢討

本論文에서 開發한 프로그램을 檢證하기 위하여 無限彈性地盤中の 圓形空洞을 對象으로 하였다. 理論解는 Poulus와 Davis(1974)⁷⁾의 해를 適用하였으며, 有限要素領域은 82節點, 130要素로 分割하고 境界要素領域은 7節點 6要素로 分割하였다. 有限要素와 境界要素를 結合한 領域은 그림 3과 같다.

內半徑은 10이고, 外部로부터 15의 等壓力을 받고 있는 地下空洞으로 材料의 彈性係數 $E=21.0$, 포아슨비 $\nu=0.0, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.49$ 일때, 內孔變位の 理論解, 有限要素法의 數值解, 境界要素法의 數值解 및 有限. 境界要素를 結合한 解法의 數值解를 比較한 結果는 그림 4~10과 같다.

以上の 結果에서 理論解에 가장 가까운 數值解는 境界要素法의 해이며, 有限. 境界要素를 結合한 해, 有限要素法의 해 순이다. 여기서, 注目되는것은 對象領域의 境界部分으로 有限要

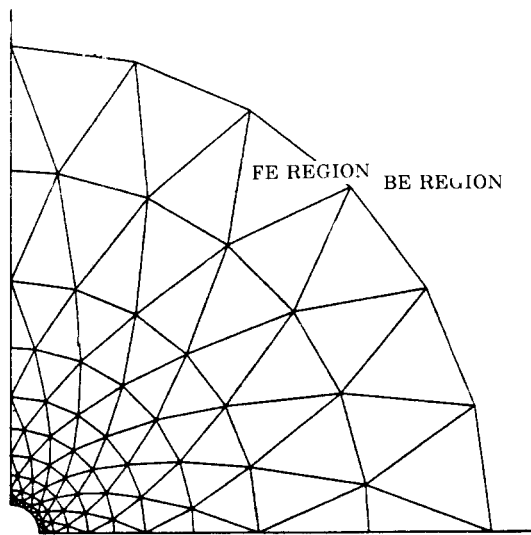


그림 3. Layout of mesh

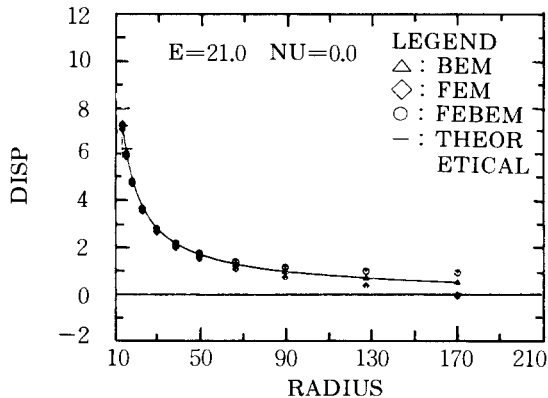


그림 4. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.0$)

素法の 해에서는 境界의 變位를 固定하므로 이에 따른 差異가 全體의 影響을 미쳐 空洞周邊에서의 變位를 過少하게 評價하는 傾向이 있으며, 有限. 境界要素를 結合한 해에서는 有限要素와 境界要素의 境界部分에서 變位를 過大하게 評價하는 傾向이 있다. 特히, 포아슨비가 작은 境遇에 더욱더 그러하다. 이것은 有限要素와 境界要素의 境界部分에서 境界要素의 剛性이 影響을 미치는 것 때문으로 생각된다.

4.3 自重을 考慮한 解析例

境界要素의 領域이 無限인 境遇, 有限要素와

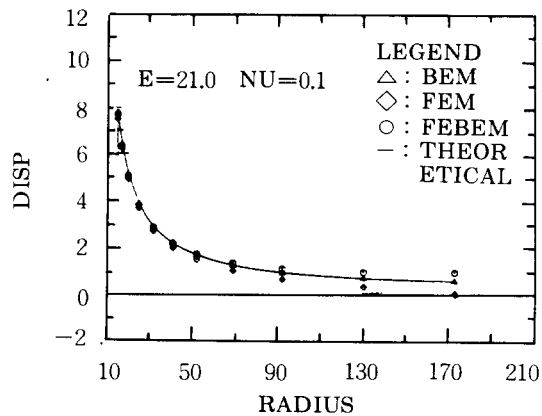


그림 5. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.1$)

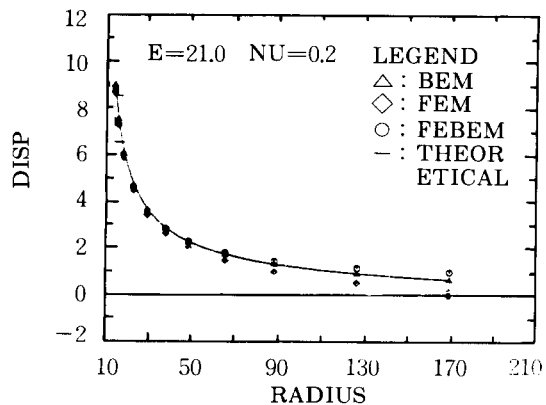


그림 6. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.2$)

境界要素의 境界部分에서 適合 및 連續條件을 滿足하여야 하므로 有限要素領域은 自重을 包含하고 境界要素領域은 自重을 포함하지 않은 解析으로도 有限要素와 境界要素의 結合法으로 解析이 可能하다.

自重을 考慮한 解析을 하기위하여 그림 11 과 같이 有限領域은 77 節점, 128 要素의 有限要素로 無限領域은 9 節점, 8 要素의 境界要素로 分割하였다.

地下空洞의 內半徑은 10m이며, 使用한 材料의 定數는 彈性係數 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 포아슨비 $\nu=0.25$, 單位重量 0.2 kg/cm^3 이고, 변위에

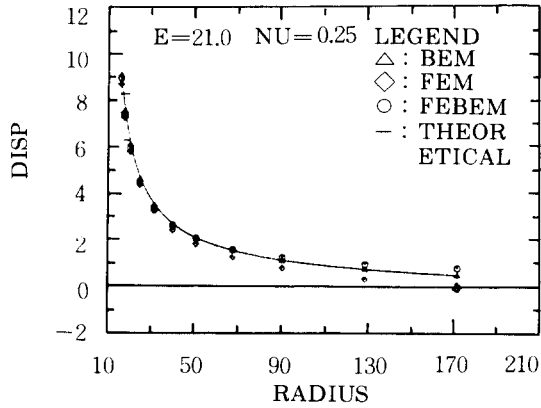


그림 7. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.25$)

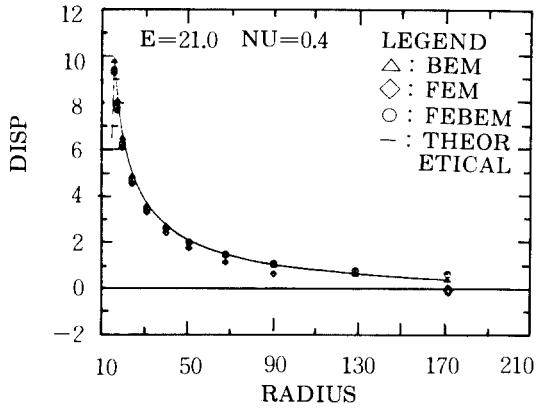


그림 9. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.4$)

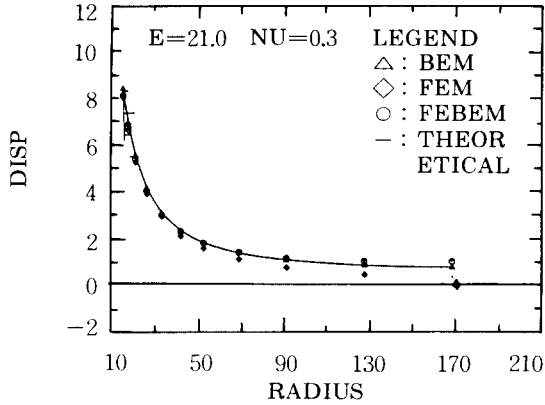


그림 8. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.3$)

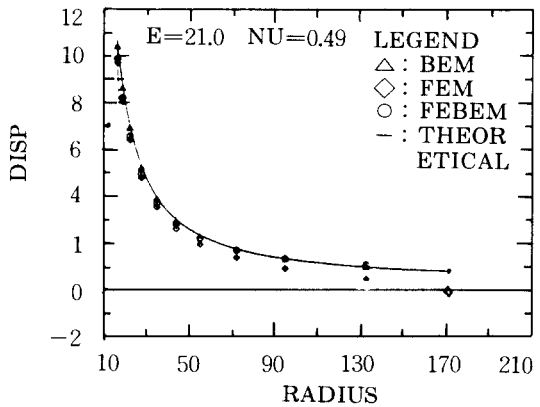


그림 10. Comparison of CFS, BE, FE, FEBEM results($\nu=0.49$)

대하여 解析한 結果는 표 1, 2와 같다.

변위 U_x , U_y 는 外部로부터 15 kg/cm^2 의 壓力을 받는 境遇를 有限要素法으로 解析한 結果이며, 변위 U_{x1} , U_{y1} 는 有限. 境界要素의

표 1. Displacement of crown ($x=0.0$) UNIT cm

R	$U_y(\text{FEM})$	$U_{y1}(\text{FEBEM})$	$U_{y2}(\text{FEBEM})$
1000	-8.3202	-10.8882	-10.8882
2000	-8.2129	-10.6563	-10.8882
4000	-7.8626	-10.0490	-10.0490
8000	-6.3090	-7.6671	-7.6671
16000	0.0000	0.0000	0.0000

R : radius($R=\sqrt{x^2+y^2}$)

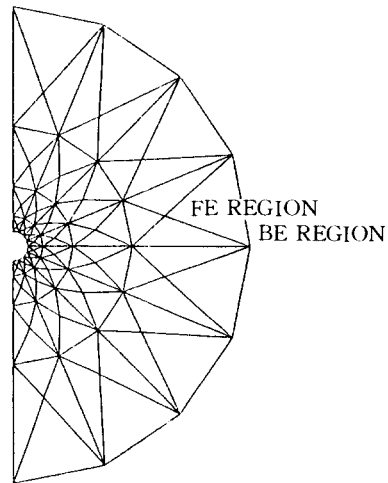


그림 11. Layout of mesh considered self weight.

표 2. Displacement of wall (y=0.0) UNIT cm

R	F E M		FEBEM			
	U _x	U _y	U _{x1}	U _{y1}	U _{x2}	U _{y2}
1000	0.005363	-8.31035	0.012318	-11.3418	0.012318	-11.3418
2000	0.013379	-8.26776	0.013683	-11.2622	0.013683	-11.2622
4000	0.040781	-7.93856	0.080055	-10.7992	0.080055	-10.7992
8000	0.024040	-6.27555	0.106685	- 8.4887	0.106685	- 8.4887
16000	0.000000	0.00000	1.951710	- 1.9772	1.951710	- 1.9772

R : radius($R=\sqrt{x^2+y^2}$)

結合法으로 外部로부터의 壓力을 有限要素領域에서 考慮하여 解析한 結果이고, 변위 U_{x2}, U_{y2}는 有限. 境界要素의 結合法으로 外部로부터의 壓力을 境界要素領域에서 自重을 考慮하고 있다.

표 1에서 有限要素法の 변위 U_y와 有限. 境界要素의 結合法으로 解析한 변위 U_{y1}이 差異를 보이는 것은 自重을 考慮하지않은 경우의 解析結果와 같은 理由로 보인다.

無限領域을 境界要素로 分割하여 有限要素와 結合하면, 有限要素領域에서 自重을 考慮하고 外部로부터의 壓力을 無限領域의 境界要素에서 考慮하여 解析할 수 있음은 표 1, 2의 結果에서 確認할 수 있었다. 外部로부터 150 kg/cm²의 荷重을 받는 境遇도 같은 結果를 얻었다.

5. 結 論

地盤中에 設置되는 작은 地下空洞은 無限地盤中の 地下空洞으로 볼 수 있다. 有限要素法은 既存의 많은 研究結果 材料의 特性을 考慮한 解析이 可能하나, 無限領域을 有限要素로 分割하는 것은 非經濟的이며, 無限領域의 影響을 考慮할 수 없는 缺點이 있다. 境界要素法은 無限領域은 쉽게 考慮할 수 있으나 自重을 考慮한 無限領域의 解析은 不可能하며, 材料의 特性을 考慮하는 것이 容易하지않다. 본 論文에서는 有限要素와 境界要素를 結合한 解析法으로 無限地盤中の 地下空洞을 解析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 有限要素와 境界要素를 結合한 수치해 結果

는 이론해와 비교하여 有限要素法の 수치해 보다 精度가 改善되었다.

2. 有限要素와 境界要素를 結合하는 새로운 子프로그램을 開發하였다.

3. 有限領域의 有限要素와 無限領域의 境界要素를 結合하여도 全體 강성매트릭스의 크기는 變함이 없었다.

앞으로는 암반절리, 斷層등이 있는 無限 또는 半無限地盤에서의 地下空洞을 地下水의 影響도 考慮하여 變位 및 應力을 解析할 수 있는 研究 및 암반의 節理나 斷層面에 접한 地下空洞에서는 블록상의 암괴이동에 關한 研究가 되어야 할 것이다.

參 考 文 獻

1. 加川幸雄, "開領域問題のための有限/境界要素法" 사이エンス社. 東京. 1983, pp. 2-13.
2. Love A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" Dover, New York, 1944.
3. Fung Y.C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-hall, inc. New Jergey, 1965, pp. 205-206.
4. 最上武雄, 土質力學", 技報堂, 東京, 1969. pp.246-250
5. 大草中康譯, "フローリンの土質力學", 森北出版, 東京, 1969. pp.165-167
6. Terzaghi K. and Richart F.E.Jr. "Stresses in Rock about Cavities". *Geotechnique*, vol 3, 1952. pp. 57-90
7. Poulos H.G. and Davis E.H., "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics" John Wiley & Sons, inc., New York, 1974. pp. 229-246
8. Jaeger J.C. and Cook N.G.W., "Fundamentals of Rock Mechanics 2nd", a Halsted Press Book,

- London, 1976, pp. 255-273.
9. Pender M.J., Elastic Solutions for a deep Circular Tunnel", *Geotechnique*, vol 30, no2, 1980, pp. 216-222
 10. Bray J.W., "Some Applications of Elastic Theory", in *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics*", ed by E.T Brown Allen & Unwin, London, 1987, pp.32-94
 11. Bettess P., "More on Infinite element", *Int.J. Num. Meth. Engng.* vol 15, 1977, pp.1613-1626
 12. Silvester D.A, Lowther D.A, Carpenter and Wyatt, E.A., "Exterior finite elements for 2 dimensional field problems with open boundaries", *Proc. IEE*, 124, 12, 1977, pp.1267-1270
 13. Tong P. and Rossettos J.N., "*Finite Element Method Basic Technique and Implementation*", The M.I.T Press, Cambridge 1977, pp.228-248
 14. Brebbia C.A., "*The Boundary Element Method for Engineers 2nd*" Pentech Press London 1980
 15. Segerlind, L.A., "*Applied Finite Element Analysis 2nd*", John Wiley & Sons, New York, 1984
 16. 結成良治, 木須博行, "境界要素法による弾性解析", 培風館, 東京, 1987, pp.13-14
 17. Tottenham, T., "The Boundary element Method for Plates and Shells", in *Developments in Boundary Element Methods-1* ed by Banerjee, P.K and Butterfield, R Applied Science Publishers Ltd, London, 1979, pp.173-205
 18. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F and Wrobel, L.C., "*Boundary Element Techniques*", Spring-Verlag, Berlin, 1984, pp.400-404.
 19. Ziekiewicz, O.C, Kelly, D.W and Bettess, P., "The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures", *Int. J.Num. Meth. Engng.*, vol 11, 1977, pp.355-375
 20. Beer, G., "Implementation of combined boundary element finite analysis with applications in geomechanics", in *Developments in boundary element methods-4* ed by Banerjee P. K and Watson J.O, Elsevier, London, 1986, p191-226
 21. Brady B.H.G., "Boundary element and linked methods for underground excavation design", in *Analytical and computational methods in engineering rock mechanics* ed by Brown E.T. Allen-Unwin, London, 1987, pp.164-204
 22. Okami T, Mitsui Y and Kusama T., "Coupled boundary element / finite element analysis in geomechanics including body force", *Computer & Geotechnics* 1, 1985, pp.263-278
 23. Singh B, Varadarajan A and Shaama K.G., "Some aspect of coupled FEBEM analysis of underground openings", *Int'l.J.Num. and Analyti. Methods Geomech.*, vol 9, 1985, pp.557-571
 24. Brebbia C.A and Walker S., "*Boundary Element Techniques in Engineering*", Newnes-Butterworths, London, 1980, pp.201-207.
 25. Cheung Y.K and Yeo M.F., "*A Practical Introduction to Finite Element Analysis*", Pitman, Berlin, 1979, pp.31-79
 26. Brebbia C.A. "*Topics in Boundary Element Research vol 3*", Spring-Verlag, Berlin, 1987, pp.265-294

(접수일자 1989. 11. 28)