

사각형 판 유한 요소들의 정적 성능 비교 분석(I): 변위

Comparative Study on the Performance of Quadrilateral Plate Elements for the Static Analysis of Linear Elastic Structures(I): Displacements

이	병	채*
Lee,	Byung	Chai
이	용	주**
Lee,	Yong	Joo

요 약

사각형 판 유한 요소의 정적 성능을 여러 가지 문제에 대한 수치 실험을 통해 비교 분석하였다. Kirchhoff 이론과 Mindlin 이론에 근거한 변위 요소, 평형 요소, Mixed 또는 Hybrid 요소들을 대상으로 문헌 조사를 통해 우수 요소를 선정하였으며 사각형 판 문제, 마름모형 판 문제, 원형 판 문제, 외팔 보형 판 문제를 다양한 격자, 경계 조건에 대해 풀어 해를 비교하였다. Kirchhoff 요소에서는 12자유도 요소로 Armanios의 요소, 24 자유도 요소로 Watkins 요소의 거동이 우수하였으나 전반적으로 Mindlin 요소에 비해 거동이 떨어진다. Mindlin 요소 중에서는 Hinton의 요소가 효율성, 수렴성, 신뢰성의 면에서 가장 우수하나 마름모형 판 문제나 뒤틀린 격자 문제등에서는 거동이 좋지 않으므로 계속 연구할 필요가 있다.

ABSTRACT

Static performance of quadrilateral plate elements was compared through numerical experiments. Sixteen plate elements were selected for comparison from the literature, which were displacement elements, equilibrium elements, mixed elements or hybrid elements based on the Kirchhoff theory or the Mindlin theory. Thin plate bending problems, such as square plate problems, rhombic plate problems, circular plate problems and cantilevered plate problems, were modeled by various meshes and solved under various kinds of boundary conditions. Kirchhoff elements were not so good as Mindlin elements in view of efficiency and convergence. Hinton's elements resulted in the best results for the problems considered with respect to efficiency, convergence and reliability but in some problems they also resulted in more or less inaccurate solutions.

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 조교수
 ** 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

이 논문에 대한 토론은 1991년 3월 30일까지 본 학회에
 보내주시면 1991년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서론

유한 요소법은 1950년대 말에 개발된 이래 매우 활발하게 연구되어 왔으며 공학해석에 있어 가장 중요한 몇가지 방법중에 하나로 인식되고 있다. 유한요소법과 관련된 연구로는 요소 개발 연구, 해석 방법의 개발, 프로그램의 개발, 프로그램 사용자의 편의향상을 위한 연구와 수학적 기초 연구등을 들 수 있다. 현재 유한 요소 해석의 방법론은 아주 복잡한 비선형을 가진 문제 외에는 거의 정립되었다고 볼 수 있고 특히 선형적인 문제는 큰 오차 없이 해석할 수 있게 되었다. 또, 상업용 소프트웨어도 많이 개발되어 유한요소법 자체에 깊은 이해가 없는 사람도 쉽게 이 방법을 이용할 수 있게 되었고 실제로 산업의 여러 분야에서 활발히 이용되고 있는 실정이다.

그러나, 판이나 셸같은 유한 요소는 사정이 상당히 복잡하여 아직도 요소 개발이 계속되고 있고 발표된 논문마다 장점을 기술하고 있어 그 선택이 쉽지 않다. 이는 다른 한편으로 생각할 때 현재 많이 이용되고 있는 요소나 상용 프로그램 내의 요소에도 상당한 단점이 있음을 의미한다고 할 수 있겠다. 판 요소는 두께가 얇은 평면 물체가 수직 하중이나 굽힘 모멘트를 받을 때의 변형을 기술하기 위한 요소로서 대개 두께, 길이 바가 1/20이하인 요소이다. 실제 사용되는 판 요소에는 면내 변형, 굽힘 변형, 전단 변형등이 동시에 일어나고 있으나 관심 영역을 선형, 탄성, 소 변형, 소변위 영역으로 제한하면 면내 변형은 독립적으로 기술될 수 있으므로 굽힘, 전단 변형을 기술하는 판 요소에 대해 고찰한다.

판 유한 요소는 크게 Kirchhoff이론에 근거한 요소와 Mindlin 이론에 근거한 요소로 분류할 수 있고 각 이론에 대해 변위 요소, 평형 요소, Mixed 또는 Hybrid 요소가 있다. Kirchhoff이론은 전단 변형을 무시한 판 변형 이론으로 두께가 상당히 얇은 경우 적용된다. 이 경우 변위를 독립 변수로 지배 방정식을 만들면 4차 편미분 방정식이 되어 변위 요소가 C^1 -연속성을 갖는 요소일 때 수렴이 보장된다. 그러나, 이러한 연속성을

갖는 요소는 구성하기가 쉽지 않고, 계산량에 비해 정밀도도 뛰어나지 못한 것으로 나타나 70년대 이후 별로 연구되지 않고 있다. Mindlin 이론은 전단 변형을 근사적으로 고려한 판 변형 이론으로 이에 근거한 요소들은 범 함수에 1차 미분이 최고 차수가 되어 C^0 -연속성만 갖게 되면 수렴이 보장되고 판 두께에 상관없이 적용될 수 있어 좋은 요소로 생각되었으나, 판 두께가 얇아질 경우 전단 구속이라는 현상이 발생하여 전혀 틀린 해를 주었고, 또 모멘트나 전단력 분포도 그 진동이 상당히 심했다. 이를 개선하기 위한 많은 연구가 계속되어 왔고 최근에 이르러서야 이의 완전한 해결을 기대할 수 있게 되었다.

이 논문에서는 사각형 판 요소에 대한 많은 연구 결과를 정적 해석 문제에 대해 비교, 검토하고 실제 예를 통해 효율, 신뢰성, 수렴성등을 비교함으로써 판 요소 개발, 프로그램 개발, 이용 등에 유용한 지침을 제공하며 나아가 셸 요소 개발의 기초로 활용될 수 있게 하는 것이다. 본 논문은 판 유한 요소들의 변위만을 비교 분석하였으며, 응력에 대한 비교 분석은 후속 논문에서 자세히 다루어질 것이다.

2. 판 유한 요소 고찰

판의 두께가 면적에 비해 상당히 작은 경우 전단 변형은 무시할 수 있다. 이러한 판에 대해 변형이 작아 변위가 두께의 1/10 또는 1/5이하로 한정되는 경우 다음과 같은 가정에 의한 판의 굽힘 변형 이론을 Kirchhoff이론, 또는 Kirchhoff-Love이론이라고 한다.

- 1) 판의 중립면은 변형하지 않는다.
- 2) 변형 전에 중립면에 수직인 직선은 변형후에도 중립면에 수직인 직선이 된다.
- 3) 두께 방향의 수직 응력은 다른 응력에 비해 작아 무시할 수 있다.

이러한 가정하에 세워진 Kirchhoff판 변형 이론은 일반적으로 판의 강성을 크게 추산하여 변위를 작게, 고유 진동수를 크게 추산한다. 두께가 면적에 비해 크게 작지 않은 판의 경우 위의 가정

2)를 완화하면 판의 전단 변형이 자연스럽게 고려되게 된다. 이와 같이 전단 변형이 고려된 판 변형 이론을 Mindlin판 변형 이론이라고 한다.

Mindlin이론에 전단 변형에 의한 변형이 모든 점에서 영이라는 조건을 부가하면 Kirchhoff이론과 같게 되고 이러한 뜻에서 전단 변형이 영이라는 조건을 Kirchhoff조건이라 한다. Kirchhoff이론 [1]와 Mindlin이론[2]에 대한 수식 전개는 쉽게 찾아볼 수 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

판 요소는 유한요소법이 개발된 이후 바로 개발되기 시작하여 오늘에 이르렀다. 1970년대 중반까지의 판 요소들은 주로 Kirchhoff이론에 근거한 변위 요소들로서 요소 경계에서 C^1 -연속성을 만족시켜야 정해로의 수렴이 보장된다. 경계에서의 C^1 -연속성을 만족하기 위해서는 요소 경계에서 굽힘 변위, 접선 방향 1차 미분값들이 연속이어야 할 뿐만아니라 법선 방향의 1차 미분값도 연속이어야 한다. 그러나 요소 경계에서 C^1 -연속성을 갖는 요소를 찾는 것은 그렇게 쉽지 않으며, 이러한 성질을 만족하는 요소는 한 요소내의 절점 자유도가 너무 커지게 된다. 또한 경계 조건을 정확하게 고려하는 것이 쉽지 않으며 절점 자유도가 많고 수렴 속도가 늦다. 강성 행렬 구성이 복잡할 뿐만 아니라 그 복잡성에 비해 정해로의 수렴이 Mindlin이론에 기초한 C^0 -요소에 비해 떨어지게 된다. 이러한 이유들로 인하여 점차 요소 개발자와 이용자의 관심에서 멀어지게 되었다.

Kirchhoff이론에 근거한 판 요소중에서 대표적인 요소들 중 몇가지를 소개한다.

ACM요소[3, 4, 5]와 Bonger요소[5], Armanios 요소[6]는 전 포텐셜 에너지 최소화 원리에 근거한 요소들로서, ACM요소(1963-1965)는 Adini, Clough, Melosh, Zienkiewicz, Argyris, Gallagher 등에 의해 개발되고 발전된 것이다. 절점 요소로 각 절점당 3개의 자유도(w, w_x, w_y)를 가지므로 한 요소당 12개의 자유도가 존재한다. 이 요소는 요소내의 변위를 3차 완전 다항식과 x^3y, xy^3 식 등 12개의 항으로 근사한 것으로 경계에서의 법선 방향 미분값의 연속성이 없는 요소이다.

Bonger(1965)는 2차원 Hermite다항식을 이용하여 한 요소당 12개의 자유도를 지니는 요소[5]를 개발하였다. 이 요소는 경계에서의 연속성은 만족되나 형상 함수에 xy 항이 없어 일정 전단 변형도 표현이 불가능하다. 이 요소는 Papenfuss가 먼저 제안하였으나 구체적 자료가 없어 Bogner의 논문을 인용하였다.

ACM요소와 Papenfuss요소의 복합형태로 Armanios(1983)에 의해 개발된 요소[6]는 매개 변수형으로 두 요소의 형상 함수를 복합하고 수학적, 수치적 검증을 통해 가장 바람직한 매개 변수 값을 결정하였다. 매개 변수 검토로부터 강체 운동은 어떤 경우에서나 표현되나 일정 모멘트 표현 조건과 요소간 연속성 조건은 서로 상치되어 일정 모멘트 표현 조건은 완전히 만족하는 반면 요소간의 연속성 조건을 완화시켰다.

Watkins[7]는 함수의 Blending기법을 응용하여 24자유도를 갖는 변위 요소를 만들었다. 이 요소는 $[0, 1] \times [0, 1]$ 영역의 네 꼭지점을 절점으로 하고 절점 변수로 $w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}$ 를 갖는 24자유도의 적합 요소이다. 기본 삼각 함수(Interpolation function)는 4차이나 완전한 다항식이 15자유도를 갖는 데 비해 요소는 24자유도를 갖기 때문에 9개의 서로 다른 1차 독립인 5차 이상의 삼각 함수가 필요하다.

앞의 4개의 요소와 달리 Kirchhoff이론에 근거한 요소로서 Pian의 Hybrid요소(1965)[8, 9]는 Complementary 포텐셜 에너지 최소화 원리에 근거하여 요소 내부에서는 응력을 다항식으로 근사하고 요소 경계를 따라 변위를 근사하였다. 요소 수준에서 응력을 소거하여 최종 자유도는 앞에서와 마찬가지로 각 절점당 w, w_x, w_y 의 3개의 자유도로 한 요소당 12개의 자유도를 지닌 요소가 된다.

앞에서 기술한 바와 같이 Kirchhoff이론과 달리 Mindlin이론은 전단 변형을 고려하므로 면적에 비해 두께가 큰 판이나 복합 재료와 같이 탄성 계수(E)대 전단 계수(G)의 비가 큰 재료로 구성된 판에서 보다 더 정확한 거동을 구할 수 있다.

Mindlin이론에 근거한 요소들은 형상 함수가

C^∞ -연속성만 만족하면 되기때문에 2차원 평면 요소들의 연구 결과가 그대로 확장될 수 있었다. 이러한 요소의 장점으로는 간단한 형상 함수로 인한 수식화의 간결성 외에도 등 매개 변수 근사(Isoparametric approximation)에 의한 일반적인 기하학적인 형상을 가진 요소도 가능하다는 점이다. 또 얇은 판 뿐만 아니라 비교적 두꺼운 판, 직교 이방성 재료, 복합 재료로 구성된 판 구조도 효율적으로 해석할 수 있다는 것이 가장 큰 장점이다. 이러한 접근 방법에 의한 요소들은 판 두께가 작지 않을 때는 그 특성이 좋았으나 판의 두께가 작아지면 전단 변형에 관련된 에너지가 굽힘 변형에 의한 에너지보다 비정상하게 크게되어 소위 일컬어지는 "구속(Locking)"현상이 일어난다. 이것은 두께가 아주 작아지면 전단에 의한 강성이 아주 커지게 되어 변위가 0에 접근하게 됨을 뜻한다. 따라서 이러한 요소를 일반적인 판 요소 해석에 이용할 수 있게 하기 위해서는 이 문제를 해결하여 두께가 얇은 경우에도 Kirchhoff해에 수렴하는 요소를 개발할 필요가 있다.

전단 구속을 해결하기 위한 가장 활발한 연구는 부정확 적분(Reduced integration)에 의한 강성행렬 계산 방법이다. 이 방법은 과도하게 강한 평면 요소의 강성을 완화시키기 위해 Doherty [10] 등이 시도한 방법으로 판 요소에는 Zienkiewicz [11] 등과 Pawsey와 Clough[12]에 의해 거의 동시에 적용되었다. 이러한 부정확 적분 요소들에서 전단 구속은 제거될 수 있었으나 변형 에너지가 없이 변위가 가능한 소위 제로 에너지 모드, 혹은 Kinematic모드가 생기는 것이 새로운 문제가 되었고 이를 해결하기 위해 많은 연구가 이루어져왔다.

부정확 적분 요소 중 4절점 요소로는 Prathap [13]등이 개발한 SEL4요소가 우수한 것으로 알려져 있는데 이 요소는 굽힘 변형 에너지는 정확히 적분하고 전단 변형 에너지를 γ_{xz} 에 의한 항과 γ_{yz} 에 의한 항으로 구분하여 각각 $2 \times 1, 1 \times 2$ 부정확 적분한 것이다. 이 요소의 거동은 12자유도 요소중 상당히 우수하나 제로 에너지 모드가 있는 것이 단점이다.

SEL9요소는 9절점 요소로 굽힘항은 정확히 적분을 수행하며 전단항은 부정확 적분한 것으로 타 요소에 비해 수렴이 좋으나 제로 에너지 모드가 발생하는 단점이 있다. Hughes와 Cohen(1978) [14]에 의해 개발된 Heterosis요소는 변위는 8절점 근사를, 회전은 9절점 근사를 하여 전단 구속과 Kinematic모드를 완전히 제거하였다. 반면, Heterosis 요소의 수렴성은 SEL9요소에 비해 크게 나빠졌다.

DKQ요소(1982)[15]는 Mindlin 이론에 의한 범함수에서 전단 변형 에너지를 완전히 무시하고 요소 내부에서 회전량을 2차로 근사하고 이 회전과 절점변위를 관계지우기 위해 Discrete Kirchhoff 조건을 부가한 것으로 일반적인 4각형이 가능하다. 구석 절점은 x, y 방향에 대해 중앙절점은 접선 방향에 대해, Kirchhoff조건을 부가하여 요소 경계에서 $w, w_{,x}$ 는 3차로, $w_{,y}$ 는 선형 근사하여 경계상의 모든 점에서 Kirchhoff조건이 만족되도록 하였다.

QUAD4요소[16]는 전단 변형도를 적절히 근사하며 적분을 부정확하게 수행하여 전단 구속을 제거한 요소이다. 이와 같은 전단 변형도 근사 방법은 Dvorkin와 Bathe[17]를 거쳐, 이를 일반화시켜 고차의 요소를 개발한 Hinton와 Huang [18]에 의해서 거의 완성되었다고 보여진다. Hinton 등은 독립적으로 근사한 전단 변형도를 요소내의 정해진 몇 점에서 변위로부터 구한 전단 변형도와 일치되게 하였으며 좌표계의 불변성이 있도록 Reference좌표계에서 근사한 후 변형도 텐서를 좌표 변환하였다. 이렇게하여 전단 구속, 제로 에너지 모드가 없으며 뒤틀린 격자에도 해가 잘맞는 요소를 개발하였다.

앞의 요소들과 달리 Hellinger-Reissner변분 원리에 기초한 Chang요소[19]는 변위와 회전을 5절점으로, 굽힘 응력을 7항으로, 전단 응력을 5항으로 근사한 것으로 전단 구속과 제로 에너지 모드를 제거한 요소이다. 요소 수준에서 굽힘 응력과 전단 응력, 중앙 절점의 자유도를 소거하여 4절점 4각형 요소로 개발되었다.

S.W. Lee(1982)[20]는 변위와 변형도를 독립

변수로 한 수정형 Hellinger-Reissner 변분 원리에 근거하여 변위, 회전, 전단 변형도를 각각 독립적으로 근사하는 8절점과 9절점 Hybrid판 요소를 만들었다. 전단 변형도를 5항, 6항 또는 8항으로 근사하였는데 이중 전단 구속이 없는 점과 해의 정확성면에서는 6항으로 근사하는 것이 가장 좋았다. 그러나 부정확 적분을 하였으므로 제로 에너지 모드가 발생하여 이의 개선이 요구된다.

YJL요소는 Hellinger-Reissner범함수에 전 포텐셜 에너지를 선형 결합하여 개발된 요소로 기존의 Mixed/Hybrid요소와 마찬가지로 변위, 회전, 전단 응력을 각각 독립 변수로 하는 4절점 요소와 8절점 요소가 있다. 이 요소는 제로 에너지 모드와 전단 구속이 제거된 요소로 다음 3장에서 따로이 설명된다.

Weissman와 Taylor[23]는 Hellinger-Reissner 변분 원리에 근거하여 전단응력과 모멘트를 서로 연결(coupling)하였다. 이 연결로 인해 전단 구속이 없음을 수학적으로 증명할 수 있었다. 좌표계의 불변성을 갖도록 Chang요소와 같은 방법으로 좌표변환을 하였다. 그리하여 전단 구속과 제로 에너지 모드가 없는 4절점 요소를 개발하였다.

3. 새로운 판 유한 요소

전술한 바와 같이 YJL요소는 Mindlin판 이론에 근거한 Hellinger-Reissner범함수에 전 포텐셜 에너지를 선형 결합하여 개발한 요소로 변위, 회전, 전단 응력을 독립적으로 근사하는 Hybrid-응력 요소이며 요소 행렬은 다음과 같이 구한다. 2차원 공간의 임의의 영역 Ω 는 굽힘 변형하는 판의 중심면을 나타낸다. 판의 두께는 t 로 나타낸다. $w=w(x, y)$ 는 판의 수직 변위이고, θ_x 와 θ_y 는 각각 xz 와 yz 평면의 회전을 나타낸다. 전단 변형도 벡터는

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_x - w_{,x} \\ \theta_y - w_{,y} \end{bmatrix} \quad (1)$$

로 정의되며, 곡률 벡터는

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

로 정의된다. 여기서, $\theta_{x,x}$ 는 θ_x 의 x 방향 편미분을, $\theta_{x,y}$ 는 θ_x 의 y 방향 편미분을 나타낸다. 가해진 힘에 대한 포텐셜을 W 로 표현한다. 예를 들면, 판의 단위 면적당 p 만큼의 분포 하중이 주어지면

$$W = \int_{\Omega} p w \, d\Omega \quad (3)$$

로 주어진다.

Y.J.Lee와 B.C.Lee[24]는 Hellinger-Reissner 범함수에 전 포텐셜 에너지를 선형 결합하여 선형 등방성 재료에 대한 새로운 Mixed범함수를 제안하였고 범함수가 양의 정부호성(Positive definite)를 갖는 선형 결합 계수의 범위를 구하였다. 이를 Mindlin판 이론에 적용하면

$$J_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\kappa^T C^b \kappa + k' q^T C^s q + (1+k') \gamma^T C^s \gamma) d\Omega - k' \int_{\Omega} q^T \gamma \, d\Omega - W \quad (4)$$

로 주어진다. 여기서 k' 은 0와 1이 아닌 임의의 상수이며 q 는 전단 응력 벡터로서 전단 변형도로 부터 구하지 않고 독립적으로 근사한다. C^b 는 굽힘 계수 행렬(Bending moduli matrix)이고 C^s 는 전단 계수 행렬(Transverse shear moduli matrix)로 탄성계수 E , 포와슨 비 ν 인 선형 등방성 재료에 대해서

$$C^b = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C^s = kGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

와 같이 주어지며, k 는 판 두께 방향 전단 응력 분포를 고려하기 위한 상수이다. n 개의 절점을 지닌 Mindlin판 요소에서 변위와 회전은 다음과 같이 근사된다.

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{xi}, \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{yi} \quad (7)$$

여기서 $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ 는 절점 i 에 해당하는 변위와 회전값들이고 N_i 는 절점 i 에 해당하는 형상함수이다. 전단 응력 q 는 다음과 같이 근사된다.

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = P\alpha \quad (8)$$

여기서 P 는 가정된 응력 형상 함수 행렬(Assumed stress shape function matrix)이고 α 는 전단 응력을 근사하는 미지의 계수 벡터가 된다. 전술한 변위, 회전으로부터 전단 변형도 벡터 γ 와 곡률벡터 κ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma &= B_\gamma q_u \\ \kappa &= B_\kappa q_u \end{aligned} \quad (9) \quad (10)$$

여기서 q_u 는 절점 변위 벡터이고 B_γ 와 B_κ 는 변위와 변형도 관계로부터 얻어지는 행렬이 된다. 이를 식(4)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$J^M = \frac{1}{2} (q_u^T K_b q_u + k' \alpha^T H \alpha + (1+k') q_u^T K_s q_u - k' \alpha^T M q_u - q_u^T F) \quad (11)$$

여기서 F 는 유한 요소 절점에 가해지는 집중 하중이며, 분포 하중인 경우에는 식(3), (7)을 이용하여 상당 집중 하중으로 표현할 수 있다. 또,

$$\begin{aligned} H &= \int_\Omega P^T C^{-1} P d\Omega \\ K_b &= \int_\Omega B_\kappa^T C^b B_\kappa d\Omega \\ K_s &= \int_\Omega B_\gamma^T C^s B_\gamma d\Omega \\ M &= \int_\Omega P^T B_\gamma d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

로 정의된다. 이로부터 각각의 독립 변수에 대하여 변분(Variation)을 취하면

$$H\alpha - M q_u = 0 \quad (13)$$

$$(K_b + (1+k')K_s)q_u - k' M^T \alpha = F \quad (14)$$

의 두 식을 얻게된다. 식(13)을 식(14)에 대입하면

$$[(K_b + (1+k')K_s) - k' M^T H^{-1} M]q_u = F \quad (15)$$

의 관계식을 얻게된다. 여기서, K_b 는 $o(t^3)$ 이고 K_s 와 $M^T H^{-1} M$ 은 $o(t)$ 이므로 두께가 작아짐에 따라

전단 에너지에의한 영향이 커지게 되어 전단 구속 현상이 일어나게 된다. 따라서 두께가 작아질 때 다음의 조건을 만족하면 이를 피할 수 있다.

$$1+k' = o(t^2) \text{ and } q_u^T M^T H^{-1} M q_u \rightarrow 0 \quad (16)$$

여러가지 가능한 조건중 이 조건을 택한 것은 이 조건이 프로그램하기 간편하고 전단 구속과 제로 에너지 모드가 동시에 제거될 수 있기 때문이다. 조건(식16)의 전자로부터, $1+k' = o(t^2)$ 이므로 k' 은 다음과 같이 택한다.

$$1+k' = m\left(\frac{t}{L}\right)^2 \quad (17)$$

여기서 L 은 요소의 대표길이이며 m 은 임의의 상수로 수치 실험을 통하여 $m = -3.3$ 을 택하였다. 조건(식16)에서의 후자($Mq_u \rightarrow 0$, as $t \rightarrow 0$)를 만족하기 위해서는 식(16)에서의 전단 응력의 근사 자유도 수가 가능한 한 작을수록 바람직하다고 S.W.Lee와 S.C.Wong[20]은 제안하였다. 전단 구속을 방지하기 위한 자가 진단법인 제한 조건 지표(Constraint index)는 $CI = NK - NC$ 로 정의되며, NK 는 요소가 첨가되었을때 증가하는 변위의 자유도수이고 NC 는 얇은 평판에서와 같이 극한 경우에 있어 요소에 독립적으로 가해지는 제한 조건들의 갯수로 얇은 평판 문제의 경우 요소당 응력 계수의 자유도수와 같게 된다. 바람직한 제한 조건 지표의 값은 $CI \geq 1$ 로서 전단 구속이 발생하지 않으며, $CI \leq 0$ 이면 얇은 평판 문제에서 전단 구속이 발생하게 된다. 따라서 전단 구속을 방지하기 위해 벡터 α 의 인자들의 갯수를 조정하여야 한다. 4절점 요소의 경우 $CI \geq 1$ 이기 위해서는 벡터 α 의 갯수가 한 요소당 2개 이하이어야 한다. 그러나 한 점에서의 요소당 α 의 갯수가 1개이면 x -방향과 y -방향의 전단 응력이 같게 되며, 즉, $q_x = q_y$,가 되어 물리적으로 타당하지 못한 결과가 초래된다. 따라서 요소당 α 의 갯수는 다음과 같이 2개로 택하였다.

$$q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

8절점 요소의 경우 $CI \geq 1$ 이기 위해서는 벡터 α

의 갯수가 한 요소당 8개 이하이어야 한다. YJL8 요소는 요소당 α 의 갯수는 다음과 같이 5개로 택하였다.

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서, s, t 는 등 매개 변수 수식화를 위한 요소 Reference 좌표이다.

4절점 요소의 변위와 회전은 각각 독립적으로 양일차(Bilinear)로 근사하였으며 모든 항을 2×2 Gauss 적분하였다. 8절점 요소의 변위와 회전은 각각 독립적으로 양이차(Biquadratic)로 근사하였으며 모든항을 3×3 Gauss 적분하였다.

4. 수치 실험 결과

판 요소의 정적 거동을 비교, 검토하기 위해 16종류의 요소에 대한 수치 실험을 행하였다. 각 문제에 대한 해석 결과는 표1에서부터 표9에 주어졌으며 표 위에는 문제를 설명하는 그림이 주어졌다. 이 그림들은 따로 이름을 지정하지 않았으므로 각각의 표는 표와 더불어 그림도 지정하고 있다. 이중 ACM[3, 4, 5], Armanios[6], DKQ [15], QUAD4요소[16]에 대해서는 직접 수치 계산을 하지 않고 논문에 발표된 결과를 인용하였다. 표에서, 요소 이름의 우측 *표를 한 요소는 결과를 직접 인용했음을 나타내고 표내의 수치중 ‘-’부호는 인용 자료가 없음을, ‘*’부호는 계산한 해가 아주 불합리함을 나타낸다.

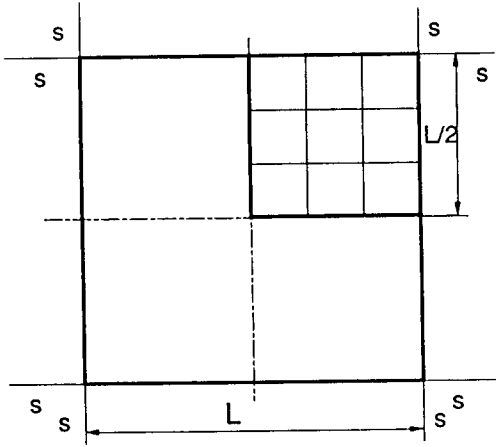
비교 문제는 얇은 판 문제로 한정하였고 길이가 1"정도 크기일 때 전단 구속이 완전히 없는 요소는 $t=10^{-6}$ in, 있는 요소는 $t=10^{-3}$ in로 하여 계산하였다. 수렴성 검토를 위해 사각형 판에 집중 하중, 혹은 분포 하중이 작용하는 경우, 경계 조건이 단순 지지, Clamped인 경우를 해석하였고 이를 각각 SS-UL, SS-CL, CL-UL, CL-CL로 표현하였다. 이 부호에서 앞의 SS는 단순 지지,

CL은 Clamped변위 조건을 나타내고 뒤의 UL은 균일 분포 하중, CL은 중심점에서의 집중 하중이 가해짐을 나타낸다. 유한 요소 격자는 $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 6 \times 6, 8 \times 8$ 로 분할한 해를 구하였으며, 대칭성에 의해 판의 1/4만 해석하였다.

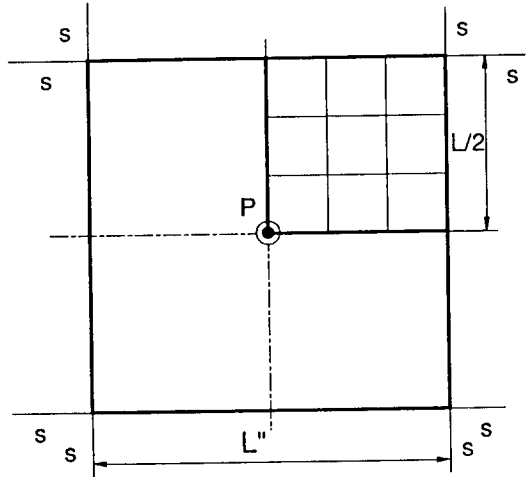
또 세장비의 영향을 살피기 위해 1요소로 모델링한 외팔보를 해석하였다. 이때, 폭을 1"이라 하면, 길이가 1", 2", 4", 6", 8", 10"일때를 계산하였다. 하중은 표9와 같이 자유단의 두 점에 방향이 서로 다른 집중 하중을 주었다. 뒤틀린 격자에 대한 해의 거동을 보기 위해 표8과 같이 세가지 격자 구조에 대해 유한 요소 해를 구하였다. 그 외 모든 경계가 단순 지지되어 있으며 분포 하중을 받고 있는 Rhombic판과 분포 하중을 받고 있으며 모든 경계가 Clamped되어 있는 원형 판에 대하여 해석하였다. Mindlin변위 요소의 경우 균일한 부정확 적분을 한 요소에 비해 선택적 부정확 적분한 요소의 성능이 우수하여 이 요소들의 결과만 수록하였다. 선택적 부정확 적분 요소를 SEL n, Hinton와 Hwang에 의해 개발된 요소[18]를 HIN n으로 표기하였고 뒤의 숫자 n은 요소의 절점 수를 나타낸다. Mindlin Hybrid 요소에서 SWL n은 이승원이 개발한 Hybrid요소 [20]이고 YJL n은 이용주가 개발한 Hybrid요소 요소이다.

4-1. 균일 격자에 의한 사각형 판의 해석

표1에서 표4까지는 사각형 판 문제에 대한 수렴 특성을 비교하기 위해 격자를 세분해가며 유한 요소 해석하여 중심 변위의 오차를 비교, 수록한 것이다. 오차는 Kirchhoff이론에 근거한 정해에 대한 상대 오차를 백분율로 표현한 것이다. 12 자유도 요소의 경우, Armanios의 Kirchhoff변위 요소[6], SEL4요소[13], HIN4요소[18], Chang요소 [19], YJL4요소등이 좋은 결과를 주었다. 이중 YJL4요소는 그 결과가 24자유도 이상의 요소와 비슷한 정도의 수렴 결과를 주었다. SEL4요소와 HIN4요소는 2×2 이상의 격자에 대해 같은 결과를 주었다. 이는 SEL4요소의 적분 점의 위치와 HIN4 요소의 전단 변형도에 대한 근사점 위치가



$E = 10920 \text{ psi}; \nu = 0.3; t = 10^{-5} \text{ in}; L = 1.0 \text{ in}$



$E = 10920 \text{ psi}; \nu = 0.3; t = 10^{-5} \text{ in}; L = 1.0 \text{ in}$

표1. 사각형 판의 중심 변위 오차(%)

(SS-UL a/b=1)

	1×1	2×2	3×3	4×4	6×6	8×8
ACM	24.6	6.54	3.6	1.65	0.732	0.412
Bogner	-10.1	-6.33	-5.43	-5.11	-4.89	-4.80
Amanis*	6.63	2.16	-	0.57	-	0.143
Pian*	-	-	-	-	-	-
DKQ*	-	9.8	4.4	2.4	-	0.36
QUAD4*	-7.1	-0.75	-	1.1	0.72	0.65
SEL4	-38.0	2.30	0.934	0.515	0.226	0.126
HIN4	21.5	2.30	0.934	0.515	0.226	0.126
Chang	-9.89	-3.78	-1.65	-0.914	-0.403	-0.225
YJL4	10.1	-0.675	-0.360	-0.208	-0.094	-0.053
Watkins	5.33	0.640	0.198	0.084	0.025	0.010
SEL9	3.24	0.165	0.0312	0.0098	0.0021	0.0009
Heterosis	5.83	0.943	0.358	0.188	0.0796	0.0434
SWL8	3.04	0.0503	0.0057	0.0052	0.0011	-0.0002
YJL8	3.38	0.4542	0.0865	0.0303	0.0067	-0.0002
HIN9	-3.24	-0.165	-0.0314	-0.0093	-0.0017	-0.0014

표2. 사각형 판의 중심점 변위 오차(%)

(SS-CL a/b=1)

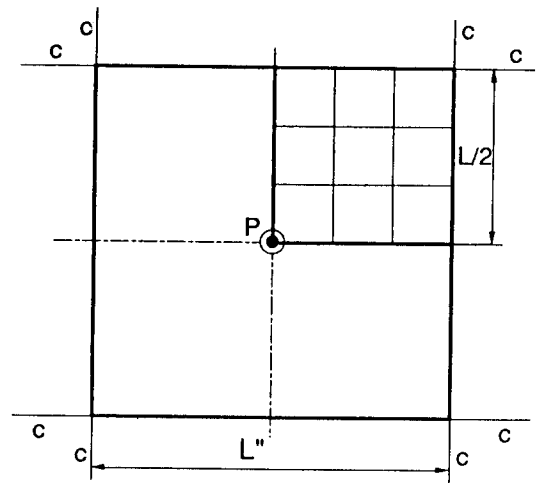
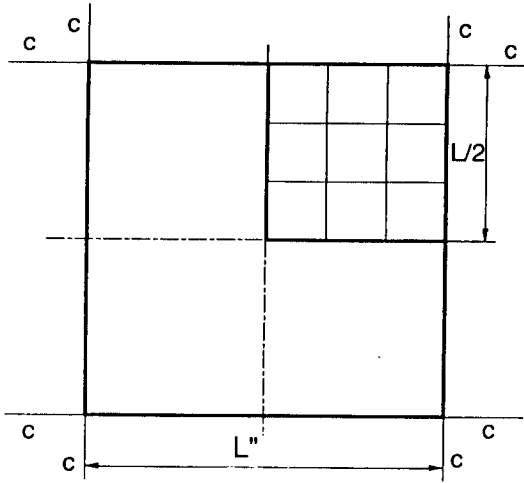
	1×1	2×2	3×3	4×4	6×6	8×8
ACM	18.8	6.26	3.19	1.96	0.976	0.591
Bogner	-12.9	-7.01	-5.62	-5.10	-4.70	-4.55
Amanis*	-	-	-	-	-	-
Pian*	-3.3	2.22	-	1.0	-	-
DKQ*	-	7.4	3.0	3.2	1.0	0.4
QUAD4*	5.7	3.1	-	1.6	0.6	-
SEL4	-93.2	0.788	0.757	0.538	0.299	0.191
HIN4	-9.95	0.789	0.757	0.540	0.301	0.191
Chang	-15.4	-0.409	0.210	0.215	0.143	0.098
YJL4	-25.9	-2.35	-0.623	-0.236	-0.044	-0.0026
Watkins	1.39	-0.071	-0.066	-0.050	-0.027	-0.017
SEL9	-0.644	0.192	0.100	0.058	0.026	0.0017
Heterosis	9.38	1.90	0.826	0.470	0.216	0.124
SWL8	10.1	1.15	0.510	0.266	0.115	0.063
YJL8	10.54	3.11	0.988	0.421	0.133	0.056
HIN9	-0.644	0.189	0.0991	0.0586	0.0267	0.0138

일치하는 데 기인한 것으로 정사각형의 경우 서로 일치하게 된다.

24자유도 요소의 경우 Watkins의 Kirchhoff 변위 요소, SEL9 요소, SWL8 요소, YJL8 요소, HIN9 요소 등이 거동이 우수하다. SEL9 요소는 오차가 균일하게 감소하는데 반해 SWL8 요소, YJL8 요소, HIN9 요소의 경우는 진동하며 때로 세분 격자의 오차가 더 증가하는 경우도 생겨 요소를 수정

할 필요가 생기게 된다. SEL9 요소가 제로 에너지 모드를 갖는 단점을 개선하기 위해 개발된 Heterosis 요소[14]는 표에서 보듯이 결과가 상당히 나빠졌다.

Kirchhoff 변위 요소에서 Bogner의 요소[5]는 요소의 크기를 감소시켜도 해가 크게 개선되지 않았다. 이는 전술한 바와 같이 형상 함수가 저차의 완전 다항식항중 일부를 포함하지 않기 때문이



$E = 10920 \text{ psi} ; v = 0.3 ; t = 10^{-5} \text{ in} ; L = 1.0 \text{ in}$

$E = 10920 \text{ psi} ; v = 0.3 ; t = 10^{-5} \text{ in} ; L = 1.0 \text{ in}$

표3. 사각형 판의 중심점 변위 오차(%)

(CL-UL a/b=1)

	1×1	2×2	3×3	4×4	6×6	8×8
ACM	16.9	10.9	5.29	3.05	1.38	0.78
Bogner	4.7	-4.26	-3.57	-3.06	-2.61	-2.44
Amanos*	-	-	-	-	-	-
Pian*	-	-	-	-	-	-
DKQ*	24.2	16.0	8.3	4.0	-	1.2
QUAD4*	-7.6	5.0	-	4.1	3.4	1.9
SEL4	*	4.27	2.04	1.15	0.512	0.288
HIN4	*	4.27	2.03	1.16	0.515	0.289
Chang	*	2.51	1.28	0.728	0.326	0.183
YJL4	*	-0.578	0.0095	0.0269	0.0158	0.0095
Watkins	-0.313	-0.036	-0.004	0.0	0.0	0.0
SEL9	-21.8	-0.852	-0.155	-0.0482	-0.0103	-0.0047
Heterosis	-21.8	2.44	1.14	0.640	0.342	0.131
SWL8	-21.8	7.54	1.79	2.05	0.912	0.508
YJL8	-16.9	14.60	0.624	0.221	0.102	0.0308
HIN9	-21.8	-0.852	-0.155	-0.0474	-0.0095	-0.004

표4. 사각형 판의 중심점 변위 오차(%)

(CL-CL a/b=1)

	1×1	2×2	3×3	4×4	6×6	8×8
ACM	5.46	9.31	5.32	3.39	1.74	1.07
Bogner	-5.57	-6.51	-4.75	-3.84	-3.08	-2.79
Amanos*	-5.57	0.61	-	0.53	-	0.22
Pian*	-	3.0	-	1.2	-	-
DKQ*	9.3	14.4	8.5	5.2	-	1.5
QUAD4*	-	-7.7	-1.3	0.3	-	0.3
SEL4	*	13.7	6.41	3.71	1.74	1.02
HIN4	*	13.7	6.41	3.71	1.74	1.02
Chang	*	12.1	5.53	3.14	1.46	0.849
YJL4	*	9.29	4.50	2.61	1.26	0.750
Watkins	-2.94	-0.764	-0.328	-0.183	-0.080	-0.045
SEL9	-9.83	0.032	0.132	0.0964	0.0494	0.0289
Heterosis	-9.83	3.96	1.86	1.08	0.481	0.272
SWL8	-9.83	11.2	1.55	2.02	0.808	0.525
YJL8	-8.58	18.8	1.551	1.376	0.356	0.148
HIN9	-9.82	0.0319	0.127	0.0966	0.0497	0.195

며 따라서, 가능한 한 최대 차수까지 완전 다항식이 되게 하는 것이 중요함을 알 수 있다.

표5는 제로 에너지 모드의 영향을 알아보기 위해 4각형판의 4구석 점만을 지지하여 경계 조건을 가능한 한 최소화하였다. SEL4요소와 SEL9요소, SWL8요소에서는 예상했던대로 제로 에너지 모드에 의한 영향때문에 해를 얻을 수 없었다.

4-2. 외팔보의 단일 해석 해석

세장비가 큰 경우 단일 요소의 유한 요소 거동을 살피기 위해 표9와 같은 외팔보 형태의 판을 해석하여 결과를 수록하였다. 해의 비교를 위해 8×9격자의 선형 요소(SEL4)해석을 수행하여 함께 수록하였다. 탄성 계수 10920psi, 포와슨비 0.3인 경우이며 판의 폭 1", 길이는 1"~10"로 변하는 문제이다. 두께는 10⁻³in인 경우를

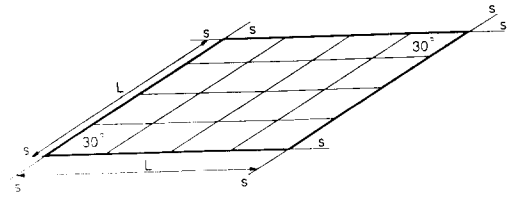
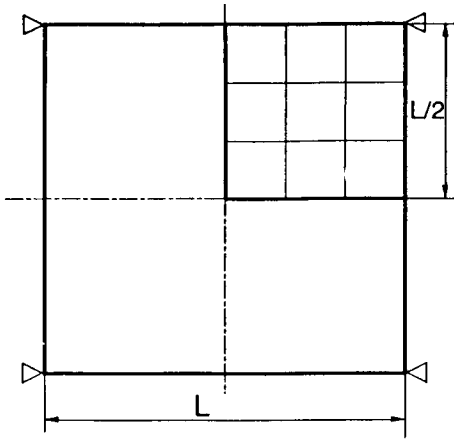


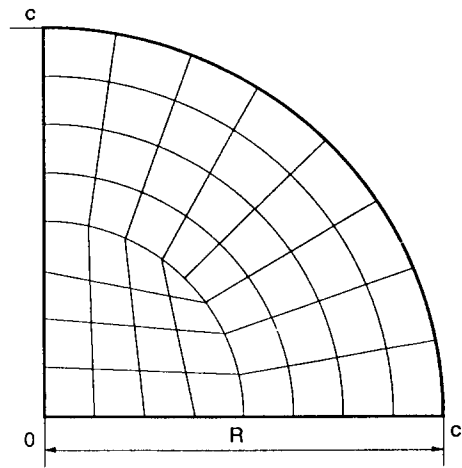
표6. 마름모꼴 판의 중심 변위 오차(%)

	2×2	4×4	6×6	8×8
SEL4	*	*	*	*
HIN4	37.8	12.3	14.0	15.9
Chang	132.0	60.66	19.28	9.86
YJL4	24.3	-10.9	-4.39	1.35
SEL9	-22.1	-4.52	1.61	4.06
Heterosis	60.0	37.1	31.6	27.5
SWL8	59.5	28.7	21.24	19.3
YJL8	62.4	27.2	8.54	7.86
HIN9	-10.5	6.71	10.83	11.6

$E = 10920 \text{ psi} ; \nu = 0.25 ; t = 10^{-5} \text{ in} ; L = 1.0 \text{ in}$

표5. 사각형 판의 중심적 변위, 네 구석점 단순지지 $a/b=1$

	2×2	4×4	8×8
SEL4	*	*	*
HIN4	1.288	2.277	2.551
Chang	2.113	2.501	2.609
YJL4	1.356	2.408	2.590
Watkins	2.638	2.641	2.643
SEL9	*	*	*
Heterosis	2.770	2.597	2.562
SWL8	*	*	*
YJL8	2.838	2.579	2.563
HIN9	2.541	2.550	2.551



$E = 10920 \text{ psi} ; \nu = 0.3 ; t = 10^{-5} \text{ in} ; R = 0.5 \text{ in}$

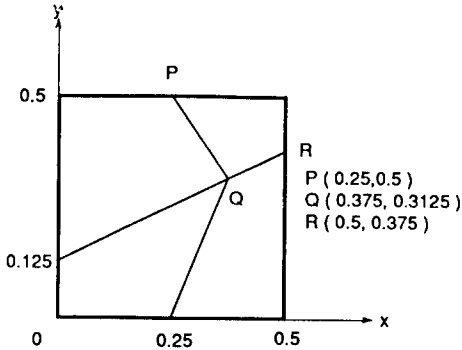
표7. 원형 판의 중심 변위 오차(%)

No. of Elements	3	12	48
SEL4	10.54	3.38	0.756
HIN4	7.47	1.02	0.349
Chang	26.74	5.62	1.35
YJL4	20.3	6.34	1.66
SEL9	0.819	0.205	0.170
Heterosis	-0.275	0.426	0.240
SWL8	-0.374	0.353	0.190
YJL8	5.038	0.733	0.192
HIN9	-0.459	0.120	0.157

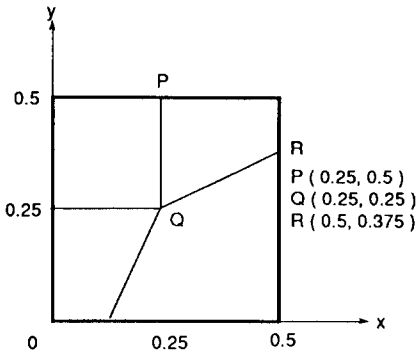
기준으로 하여 구속에 의해 해가 불합리한 경우 10^{-2} in으로 계산하여 환산하였다. 표에 수록한 변위는 10^{-3} 을 곱한 값이다.

단일 요소 해석에서 12자유도 요소의 경우, Chang의 Mixed요소[19]가 가장 우수하며 정해와 1%이내의 오차를 보인다. 특히 세장비가 커져도 오차가 별로 증가하지 않는 점이 매우 우수하다. NASTRAN에 사용된 QUAD4요소[16]는 세장비가 커질수록 상당한 차이를 보이며 Kirchhoff변위 요소도 별로 좋지 않았다.

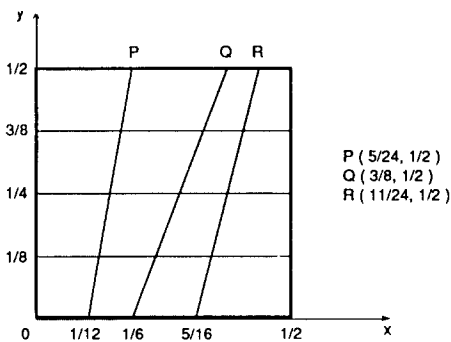
2차 근사 요소의 경우에는 SWL8요소[20]와 YJL8요소, HIN9요소[18]의 결과가 우수하였다. 그러나 Kirchhoff변위 요소인 Watkins요소[7]는 세장비가 커질수록 오차가 점점 증가하며 Mindlin



a) 문제 A(SS-UL, Unit=in)



b) 문제 B(CL-CL, Unit=in)



c) 문제 C(SS-UL, Unit=in)

요소보다 일반적으로 오차가 크다.

YJL4요소와 YJL8요소는 세장비가 작은 판이 큰 판에 비해 오히려 결과가 나빠졌다.

표8. 뒤틀린 격자에 대한 해석(%)

	문제 A	문제 B	문제 C
SEL4	*	*	*
HIN4	1.25	*	-0.24
Chang	3.12	*	0.87
YJL4	14.53	*	0.44
SEL9	3.85	1.35	0.031
Heterosis	13.37	33.65	0.068
SWL8	5.79	34.35	0.001
YJL8	1.33	18.24	0.016
HIN9	-0.31	-0.725	-0.011

4-3. 뒤틀린 격자에 의한 사각형 판의 분할 해석

일반형의 사각형 요소가 가능한 요소에 대해 격자가 뒤틀린 경우 해가 어떻게 변하는 지를 보기 위해 사각형 판의 1/4를 표8과 같이 A, B, C 격자로 분할하여 해석하였다. 격자A와 격자C는 SS-UL 상태로 해석하였고, 격자B는 CL-CL 상태로 해석하였다.

표8은 정해의 비교한 오차를 수록하였다. 이 표에서 뒤틀린 격자의 경우 전단 구속의 영향이 크게 나타남을 알 수 있고 균일한 2x2 격자의 경우 해를 구할 수 있던 요소들이 뒤틀린 격자의 경우 해를 구할 수 없는 경우가 많이 발생하였다. 따라서, 그러한 요소는 두께를 증가시켜 해를 구하였다.

다른 문제에서 좋은 거동을 보인 SEL4요소와 YJL4요소는 뒤틀린 격자 문제에서는 상당히 나쁜 거동을 보여주고 있다. 격자B에서는 모든 4절점 요소들에 전단 구속 현상이 일어났다.

4-4. Morley의 Rhombic판에 대한 해석

표6에 경계 조건이 단순 지지되어 있고, 분포 하중을 받는 Rhombic판에 대한 격자를 그림으로 나타내었으며 그의 중심에서의 해에 대한 오차를 수록하였다. 이 문제는 양쪽의 첨예한 점에서 모멘트와 전단 응력이 특이(singular)하기 때문에 매우 복잡하다. YJL4요소는 다른 4절점 요소와 8절점, 9절점 요소에 비해 상당히 우수한 해를 주는 반면 수렴 양상이 불완전하게 진동하고 있

다. HIN9요소는 격자가 세분됨에 따라 정해에서 점점 멀어지는 해를 주고 있고 SEL9요소는 정해에 접근하였다가 멀어지고 있다. 그 외의 요소들은 단조 수렴하고 있으나 Chang요소와 YJL8요소를 제외하고는 8×8격자에서도 정해와의 오차가 10%이상이므로 이 문제에 대해서는 좀 더 많은 고찰이 필요하다.

4-5. 원형 판에 대한 해석

표7에 Clamped되어 있고 분포 하중을 받는 48요소를 지닌 원형 판의 모델을 보였으며 3, 12, 48요소로 분할한 경우의 중심 변위의 오차를 표에 수록하였다. 대칭성에 의해 판의 1/4만을 해석하였다. YJL4요소는 뒤틀린 격자에서와 마찬가지로 해의 거동이 떨어진 반면 HIN4요소와 HIN9요소는 거동이 매우 좋은 것을 알 수 있다. 표7의 그림을 보면 격자들이 약간씩 뒤틀려 있

며 뒤틀린 격자의 문제와 비교할 때 전반적인 거동이 유사한 것을 알 수 있다.

5. 결론

사각형 판요소의 정적 거동을 분석하고 여러가지 문제에 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Kirchhoff이론에 근거한 요소

- 12자유도 요소로는 Armanios의 변위 요소가 수렴성, 안정성 면에서 기존 요소들보다 우수하다.
- 24자유도 요소로는 Watkins요소가 우수하다.
- 세장비가 커지면 오차도 점차 증가한다.
- 임의의 사변형 요소에 대해서는 계속적인 연구가 필요하다.
- 일반적으로 Mindlin이론에 근거한 요소에 비해 변위, 응력 정밀도등이 떨어진다.

2. Mindlin이론에 근거한 요소

- 12자유도 요소로 SEL4요소와 HIN4요소, Chang 요소, YJL4요소들을 비교하였다. 뒤틀린 격자의 해석에서는 HIN4요소가 가장 우수한 거동을 보여주었다. 그러나 해가 특이점(singularity)을 가지는 Rhombic판에서는 거동이 다른 문제에 비해 떨어진 다. YJL4요소는 Rhombic 판에서는 거동이 8절점 이상의 다른 요소들을 포함하여 가장 우수한 결과를 주었으며 그 외의 다른 문제에서도 우수한 결과를 주었으나, 뒤틀린 격자에서 거동이 상당히 나빠져 좀 더 많은 연구를 필요로 한다. 전체적으로 볼 때 현재 발표된 요소 중 HIN4요소가 가장 신뢰성이 높은 결과를 준다.
- 2차 근사 요소로는 9절점 부정확 적분 요소인 SEL9요소, Hybrid변형도 요소인 SWL8요소, Hybrid응력 요소에 전단 계수를 고려한 YJL8요소, 전단 응력을 적절히 근사한 HIN9요소등이 수렴성에서 우수하다. 정밀도는 SEL9요소가 우수하나 제로 에너지 모드로 인해 4절점 단순 지지 문제와 같은 특별한 경계 조건이 주어지면 해를 구할 수 없다. 이를 개선한 Heterosis 요소는 정밀도가 크게 떨어진다. HIN9요소는

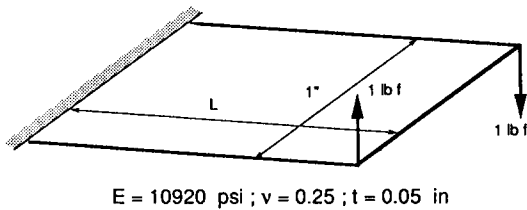


표9. 외팔보의 끝점 변위(1요소 해석, 단위=in)

Length, L(in)	1	2	4	6	8	10
ACM	2.29	5.05	10.50	15.89	21.25	26.60
Bogner	2.15	4.80	9.89	14.93	19.95	24.96
Armanios*	-	-	-	-	-	-
Pian*	3.15	5.95	11.55	17.15	22.75	28.35
DKQ*	2.42	5.24	10.88	16.52	22.16	27.8
QUAD4*	2.72	4.88	9.20	13.52	17.84	22.16
SEL4	2.313	5.292	10.98	16.58	22.17	27.74
HIN4	2.313	5.292	10.98	16.58	22.17	27.74
Chang	2.471	5.703	11.86	17.93	23.97	30.0
YJL4	1.427	4.749	10.58	16.18	21.71	27.23
Watkins	2.29	5.21	10.73	16.09	21.41	26.74
SEL9	2.323	5.309	11.24	17.10	22.92	28.72
Heterosis	2.323	5.309	11.24	17.10	22.92	28.72
SWL8	2.590	5.775	11.90	18.00	24.00	30.00
YJL8	2.477	5.508	11.55	17.54	23.52	29.51
HIN9	2.318	5.307	11.24	17.10	22.92	28.72
상세 격자 해	2.325	5.375	11.43	17.47	23.51	29.53

HIN4요소와 마찬가지로 뒤틀린 격자와 원형판의 해석에서 우수한 거동을 보여주었다.

- 최근 개발되고 있는 Hellinger-Reissner이론에 근거한 요소중 Gallert의 요소[21], Hughes의 요소[22], Hinton요소[18], Weissman와 Taylor의 요소[23]등이 논문 비교를 통해 보면 우수한 것으로 보이며 수치 실험은 계속해 볼 필요가 있다.

지금까지 살펴본바와 같이 본 논문은 관 유한 요소들의 변위만을 비교 분석하였으며, 응력에 대한 비교 분석은 후속 논문에서 자세히 다루어 질 것이다.

참 고 문 헌

1. C.L. Dym and I.H. Sharnes, Solid Mechanics - A Variational Approach, McGraw-Hill, New York, 1973.
2. T.J.R. Hughes, The Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
3. A. Adini and R.W. Clough, "Analysis of plate bending by the finite element method," NSF Report G7337, Washington, D.C., 1960.
4. R.J. Melosh, "A stiffness matrix for the analysis of thin plate in bending," J.Aeronaut.Sci., 28, 34-42, 1961.
5. F.K. Bonger, R.L. Fox and L.A. Schmit, Jr., "The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Ohio, 397-443, 1965.
6. E.A. Armanios and H.M. Negm, "An improved rectangular element for plate bending analysis," Computers & Structure, 16, 677-686, 1983.
7. D.S. Watkins, "Blending functions and finite elements," Ph.D. Thesis, The Univ. of Calgary.
8. T.H.H. Pian and P. Tong, "Basis of finite element methods for solid continua," Int. J. Num. Meth. Engng., 1, 3-28, 1969.
9. P. Tong, "New displacement hybrid finite element models for solid continua," Int. J. Num. Meth. Engng. 2, 73-83, 1970.
10. W.P. Doherty, E.L. Wilson and R.L. Taylor, "Stress analysis of axisymmetric structures using higher order quadrilateral elements," Structural Engineering Lab. Rep. SESM 69-3, Univ. of California, Berkeley, 1969.
11. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.M. Too, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," Int. J. Num. Meth. Engng., 3, 275-290, 1971.
12. S.F. Pawsey and R.W. Clough, "Improved numerical integration of thick shell finite elements," Int. J. Num. Meth. Engng., 575-586, 1971.
13. P. Prathap and S. Viswanath, "An optimally integrated four node quadrilateral plate bending elements," Int. J. Num. Meth. Engng, 19, 831-840, 1983.
14. T.J.R. Hughes and M. Cohen, "The heterosis finite element for bending," Computers and Structures, 9, 445-450, 1978.
15. J.L. Batoz, K.J. Bathe and L.W. Ho, "A study of three node plate bending element," Int. J. Num. Meth. Engng, 15, 1771-1812, 1980.
16. R.H. MacNeal, "A simple quadrilateral shell element," Computers and Structures, 8, 175-183, 1978.
17. E.N. Dvorkin and K.J. Bathe, "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis," Engng Comput, 1, 77-88, 1984.
18. E. Hinton and H.C. Huang, "A family of quadrilateral Mindlin plate bending elements with substitute shear strain fields," Computers and Structures, 23, 409-431, 1986.
19. A.F. Saleeb and T.Y. Chang, "An efficient quadrilateral element for plate bending analysis," Int. J. Num. Meth. Engng, 24, 1123-1155, 1987.
20. S.W. Lee and S.C. Wong, "Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending," Int. J. Num. Meth. Engng, 18, 1297-1311, 1982.
21. M.Gellert, "A new method for derivation of

- locking free plate bending finite elements via mixed/hybrid formulation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 118–1200, 1988.
22. T.J.R. Hughes and L.P. Franca, "A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plate theory: uniform convergence of all higher order spaces," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 67, 223–240, 1988.
23. S.W. Weissman and R.L. Taylor, "Resultant fields for mixed plate bending elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 79, 321–355, 1990.
24. Y.J. Lee and B.C. Lee, "A new mixed functional proposed for the analysis of linear elastic problems," *Computers and Structures*, to appear.

(접수일자 : 1990. 8. 16)