

특이성을 갖는 비정형 평판의 p-version 유한요소해석

p-version Finite Element Analysis of the Irregular Shaped Plates With Singularities

禹 光 性*
Woo, Kwang Sung

요 지

p-version 유한요소법을 사용한 바닥 슬래브의 탄성해석은 어떤 종류의 凹形모서리, 開口 그리고 損傷斷面을 갖는 점에서 응력특이성을 수반하게 된다. Reissner-Mindlin의 평판이론에 근거한 C^0 -평판 계층요소를 사용한 결과가 이론치 및 참고문헌에 발표된 수치해석값과 비교되었다. h-, p-와 hp-version의 수렴속도는 전체적 차원에서의 자유도 증가에 따른 에너지노름값을 사용하여 예측할 수 있다. 만약에 자유도의 향으로 나타내지는 정확도를 여러 해석방법을 비교하는 기준으로 삼으면 본 연구에서 새로 제안되는 p-version 유한요소해석법의 近似解는 종래의 h-version에 근거하여 현재 까지 발표된 어떤 것 보다 훨씬 효율적 접근방법이라 하겠다. 解析例로는 150° 둔각을 갖는 마름모꼴평판과 손상단면을 갖는 정방형평판이 사용되었다.

Abstract

The elastic analysis of floor slabs using the p-version of finite element method encounters stress singularities at certain types of reentrant corners, openings and cut-outs. Results obtained using the computer code based on C^0 -hierarchical plate element formulated by Reissner-Mindlin theory are compared with theoretical predictions and with computational results reported in the literature. The convergence rate of h-, p- and hp-version can be estimated on the basis of the energy norm in global sense. If accuracy in terms of the number of degrees-of-freedom is used as a criterion, the solutions presented here are the most efficient that have been published up to date. Examples are the rhombic plate with the obtuse angle of 150° and the square plate with cut-outs.

1. 서론

건물의 슬래브는 종종 비정형단면 즉, 일반적으로 쓰이는 사각형 또는 원형이외에 美觀과 設計上

의 이유로 슬래브에 開口(openings), 損傷단면(cut-outs), 凹形모서리(reentrant corners)등을 갖게되어 이로 인한 심한 應力集中을 수반하게 된다. 이를 應力特異性(stress singularity)이라 하고 응력특이가 일어나는 점을 特異點(singular point)이라 한다.

* 정희원, 전남대학교 토목공학과 조교수

이 논문에 대한 토론은 1990년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1991년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이런 비정형평판을 고전적 평판이론으로 해석하는 데는 많은 어려움이 있으므로 많은 유한요소모델이 최근까지 연구개발되었으나 解가 수렴하지 않거나 수렴속도가 느린 결점을 보여왔다.¹⁾ 그 이유는 수렴 속도는 특이점 근처에서의 해의 정확도에 지배되는데 종래의 유한요소모델은 특이기동을 표현하는데 적합하지 않기 때문이다. 본 연구에서는 90° 凹形 모서리(reentrant corner)를 갖는 정방형평판의 사각형 開口 모서리점과 150° 마름모꼴평판의 둔각꼭지점(obtuse vertex)에서 특히 발생하는 특이기동의 이론적 규명과 새로 제안되는 p-version 유한요소법이 종래의 유한요소 접근방법에 비해 꼭지각이 예각에서 둔각으로, 혹은 원활영역(smooth domain)에서 특이점으로 전이함에 따라 응력함수가 원활함수(smooth function)에서 특이함수(singular function)로 변하는 현상을 더욱 효율적으로 정식화할 수 있는가를 국부적차원(local sense)으로 임의의 점에서의 처짐량과 모멘트값의 비교로 알아봄과 동시에 전체적차원(global sense)으로 자유도증가에 따른 포텐셜에너지의 近似解와 正解에 대한 상대오차개념인 에너지노름으로 종래의 유한요소법(h-version)과 p-version과의 수렴성 비교를 수행하여 그 우월성을 입증해 보이는 것이 본 연구의 목적이라 하겠다.

사각형開口를 갖는 평판의 문제해석을 위해 Geiger²⁾는 경계조건과 평판의 기하형상에 따른 특이성 규명을 이론적으로 접근하였다. 한편 Hughes³⁾는 Heterosis요소를 제안하였고, Hrudey⁴⁾는 L-型 特異要素(singular element)를 사용한 유한요소해석을 하였다. 또, 마름모꼴평판의 경우는 Morley⁵⁾가 이론적해석을 하여 둔각꼭지점 부근의 x, y 축방향의 모멘트가 서로 다른 부호를 가짐을 보였다. 그러나, Sander를 비롯한 여러 논문에서는 서로 같은 부호를 가지는 오류를 범하고 있어 본 연구에서도 이점을 주목하여 이에 대한 자세한 연구결과를 보이고자 한다. Argyris와 Lochner는 TUBAC6 요소를 사용하여 Morley와 근사한 해를 보였다. 한편, 본 연구에서는 형상함수로 적분형 르장드르다항식(Integrals of Legendre Polynomials)이 사용되고 Reissner-Mindlin의 평판이론에 기초

한 C°-평판계층요소(C°-hierarchical plate elements)를 사용하고 수치적분을 위해서 Dunavant이 제안한 Economical Gaussian Quadrature와 사상함수로는 超有限寫像(transfinite mapping)이 적용되었다. 또한, 본 논문의 이해를 돕기 위해 유한요소의 접근방법인 h-version과 p-version의 차이점을 간단히 살펴보겠다.

1.1 h-version 유한요소법

종래의 유한요소법은 연속체를 유한한 개수의 요소로 분할하여 有限한 요소내의 거동을 삼각형 혹은 다각형 標準領域(standard domain)에서 區間補間函數(piecewise interpolation function)을 사용하여 표현하며 共通境界(common boundary)에서의 어떤 連續條件(C°-or C¹-continuity)을 만족시키는 Lagrange 혹은 Hermite 1次, 2次 혹은 3次 多項式函數(polynomial function)를 補間函數로 사용한다. 解는 要素를 잘게 分割하면서 向上되는데 이때 분할된 요소의 最大直徑을 h라 하고 h가 0에 접근하면서 正解(exact solution)에 收斂하는 방식인데 이때 보간함수의 次數는 固定되어있다. 여기서 자유도가 증가함에 따라 正解에 수렴하는 것을 擴張(extension)이라 하므로 이를 h-extension이라 하고 이에 따른 컴퓨터수행을 h-version 유한요소법이라 하며 대부분 유한요소 소프트웨어들이 이 version에 기초하고 있다.

1.2 p-version 유한요소법

해석하고자 하는 連續體의 幾何形狀을 표현하는데 필요한 最少의 要素만을 사용하여 그 要素들을 固定시키고 補間函數로 르장드르다항식을 사용하며 이 함수의 次數를 p라 하고 p가 무한대(∞)에 접근하면서 正解에 收斂하는 방식인데 보통 p=1에서 10까지 사용한다. 이러한 접근방식을 p-extension이라 하며 이의 컴퓨터수행을 p-version 유한요소법이라 한다. 여기서 주의해야 될 점은 p의 次數를 低次(p=1, 2 or 3)로 줄이고, 그 次數를 固定시킨 후 要素分割에 의해 正解에 收斂시키는 방법을 취하면 다시 h-version이 되므로 넓은 의미로

보면 h-version은 p-version에 포함된다고 생각할 수 있다. 한편 p-version은 큰 要素를 사용하게 되므로 標準領域(standard domain)으로 부터 원하는 任意의 實際領域(actual domain)의 임의의 境界面에 精確한 寫像을 통하여 幾何學的인 形狀을 精確하게 나타낼 수 있어야 하는데 이를 만족시키기 위하여 超有限寫像(transfinite mapping)이나 混合寫像(blend mapping)등을 사용하여 圓形, 橢圓形과 그밖의 임의의 曲線境界(curved boundary)를 精確하게 표현할 수 있다.

2. 모서리 특이성(Corner Singularity)

모서리각 π/α 를 갖는 비원활경계(non-smooth boundary)의 영역 Ω 가 Fig.1에 나타나 있다. 특이점 P를 포함하는 평면응력이나 평판휨문제의 경우 支配방정식(governing equation)의 일반해는 아래식과 같다.⁶⁾

$$u(r, \theta) = r^\alpha F(\theta) + G(r, \theta) \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

특이점 P를 포함하는 $u(r, \theta)$ 는 변위벡터이고, r 과 θ 는 P점을 중심으로 하는 극좌표이고 $G(r, \theta)$ 는 해의 원활함수(smooth function)이고 $F(\theta)$ 는 특이함수(singular function)를 나타낸다. 만약에 P가 凸형(convex)이 아니면 즉, $1/\alpha > 1$ (즉, $\alpha < 1$)일때 변위벡터의 1차미분값은 r 이 0에 접근함에 따라 무한대로 된다. 내부모서리각이 2π 일 경우는 균열문제가 되며 P점은 龜裂先端(crack tip)을 나타내며

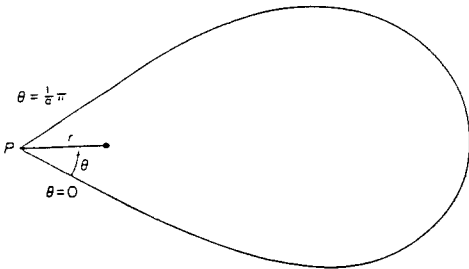


Fig. 1 A domain with corner angle π/α

逆으로 균열문제는 $r^{1/2} F(\theta)$ 형의 특이함수를 갖게 된다. 일반적으로 응력은 변형도에 비례하므로 변위벡터를 1차미분한 균열문제의 특이함수는 $r^{-1/2} F(\theta)$ 꼴의 응력분포를 보이게 되므로 r 이 0에 접근함에 따라 응력이 무한대가 된다. 그러므로 평면응력 상태에서 $\alpha < 1$ 일 경우에 凹形모서리 문제를 나타내며 $\alpha = 1/2$ 인 경우는 龜裂문제를 유발시켜 극심한 응력특이성이 일어나게 된다. 平板문제의 경우는 Williams⁶⁾에 의해 기하형상과 경계조건에 따른 특이성연구가 수행되었다. 즉, 모서리각을 갖는 부채꼴형상의 평판을 독립적으로 떼어내서 다양한 경계조건을 적용시켜 그 組合에 따른 응력 특이성 문제가 연구되었고 최근에 Hrudey⁴⁾에 이르기까지 많은 연구가 되어 기하형상으로는 θ 가 $\pi/2$ 보다 클 경우 경계조건으로는 반경방향(radial edges)이 자유단-자유단의 경우와 고정단-고정단을 제외한 경계조건의 組合에는 강한 모멘트특이성이 발생한다는 결론을 내렸다. 다시말하면 모멘트는 식(1)에서 변위벡터를 2차미분한 값에 비례하므로 $\alpha < 2$ 일 경우에 r 이 0에 접근하면 P점에서 모멘트값은 무한대가 되므로 P점은 특이점이 되므로 Williams의 결론을 확인할 수가 있다. 이로부터 θ 가 $\pi/2$ 보다 큰 경우인 마름모꼴평판($\theta = 5\pi/6$)과 開口를 갖는 평판($\theta = 3\pi/2$)은 각각 모서리점에서 모멘트특이성(moment singularities)이 발생됨을 예측할 수 있다.

3. 평판의 계층요소모델(Hierarchic Plate Model)

3.1 p-version의 장점

종래의 h-version에 대한 p-version의 우월성은 COMET-X, FIESTA, PROBE등과 같은 p-version 소프트웨어에 의한 수치해석적 방법^{7) 8)}과 Babuska, Szabo등에 의한 수학적 방법⁹⁾을 통해서 입증되고 있다. 특히, 본 연구와 같은 특이성문제에는 종래의 유한요소 방법으로는 해가 수렴되지 않거나 매우 느림을 알 수 있다. 고로, p-version 유한요소해석의 장점을 살펴봄으로서 왜 본 연구에서 p-version을 사용하는가하는 이유를 설명하고자 한다.

첫째, 特異舉動(singular behavior)의 표현에 적합

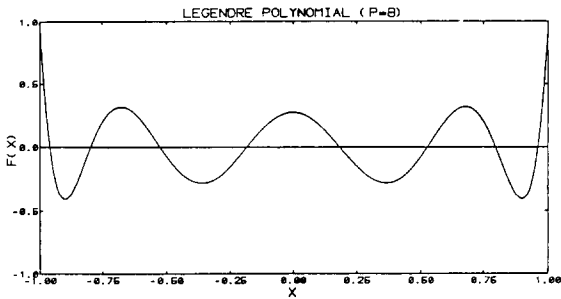


Fig. 2 Legendre Polynomial when p=8

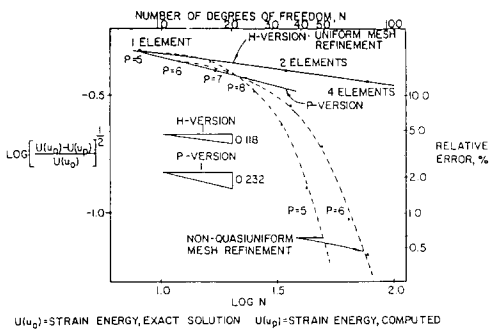


Fig. 3 Relative Error in Energy Norm vs. DOF

하다. 즉, $-1 < x < 1$ 인 표준구간에서 르장드르함수가 x 축과 만나는 절편값인 **根**(roots)들은 균등한 간격을 갖고 위치하지 않고 **兩端**에 다소 밀집되어 있으므로 **兩端** 부근의 값을 신뢰성을 높일 수 있다. **變位場**을 정의하는데 형상함수로 사용되는 르장드르함수를 1차 미분한 값이 **變形度**이고 이 값은 **應力**에 비례하는 사실로 Fig.2의 8차 르장드르함수를 양단에서 접선을 그어보면 경사가 매우 가파름을 알 수 있는데 이것이 바로 **應力傾斜**(stress gradient)를 나타낸다. 고로, 응력경사가 매우 큰 응력특이성 문제에 적합하다고 하겠다.

둘째, 우월한 **收斂性**(convergence characteristics), 즉 **自由度**증가에 따른 수렴속도가 특이거동이 심하게 일어나는 2차원 평면응력 상태하에서의 **龜裂**문제의 경우 h-version비해 2배가량 빠르다는 것이 수치실험적으로 또, 수학적으로 이미 입증된 바 있다. 단순지지 마름모꼴평판에서도 동일한 결과를 얻을 수 있다. Fig.3에서 p-version과 h-version의 수렴속도는 0.232 : 0.118로 거의 2배가량 빠름을 알 수 있다. 물론 이 경우는 p-version의 경우 1개

網目(mesh)만을 사용하여 형상함수의 차수만을 $p=5$ 에서 6, 7, 8로 단순증가 시킨 결과를 표시하였으나 $p=5$ 혹은 $p=6$ 으로 형상 함수의 차수를 고정시키고, h-version의 개념을 도입하여 **非均等要素分割**(non-quasiuniform mesh refinement)을 통해 網目的 수를 증가시키면 놀랄만한 수렴속도를 보이게 된다. 이것이 가장 이상적 유한요소법인 hp-version 유한요소법인 것이다.

셋째, 강한 **通用性**(robustness)이다. 두께, 형상비(aspect ratio)의 변화가 매우 심한경우와 포아슨비가 0.49999인 **非壓縮性**(incompressibility)문제에서도 해가 빠른속도로 수렴됨을 보이고⁹⁾ 특이성문제 해석에도 본 연구를 위해 많은 학자들에 의해 제안된 **特別要素**(special element) 또는 **特異要素**(singular element)를 사용할 필요없이 훌륭한 신뢰도와 정확도를 보여준다.

네째, **計算上의 效率性**이다. 즉, 르장드르다항식은 **直交性**(orthogonality)을 갖고 있어서 **剛度**매트릭스가 대각선화(diagonalized)됨을 유발하고 h-version에서 요소분할을 통해 발생하는 round-off 오차가 p-version에서는 놀랄만큼 줄어들어 well-conditioned 매트릭스가 됨을 **條件數**(CN : Condition Number)를 사용하여 입증할 수 있으며 이로 인해 많은 CPU 時間을 줄일 수 있다.^{8) 10)}

다섯째, 모델링의 **單純性**, **幾何形狀**을 표현할 수 있는 **最少個數**(때로는 1개)의 요소를 사용한다. 고로, 입력자료를 준비하는 **使用者**(user)의 시간을 크게 절감할 수 있음과 동시에 사용하기가 매우 **容易**하다.

여섯째, **階層的 性質**(hierarchical nature)이다. $(p-1)$ 次 요소의 **剛度**매트릭스와 **荷重**벡터는 p 次 요소의 **從屬**매트릭스(submatrix)가 된다.¹⁰⁾

3. 2 에너지노름에 의한 수렴성(Convergence in Energy Norm)

수학적인 오차해석은 에너지노름을 사용하여 **正解**와 **近似解**에 의한 에너지값의 상대오차의 제곱근으로 아래와 같이 표현된다.

$$\|e\|_E = \frac{U_{exact} - U_{approx}}{U_{exact}} \quad (2)$$

이러한 에너지노름은 아래와 같은 이유로 解의 수렴성을 예측하는데 사용된다.

1. 유한요소법은 變位法에 기초하여 포텐셜에너지를 최소화한다.
2. 이론적과 수치해석적 비교로부터 총 포텐셜에너지의 자유도에 대한 오차는 근사해의 정확성과 신뢰성을 전체적차원에서 측정하는 기준이 되나 국부적차원으로 절점에서의 변위와 응력에 대한 수렴성은 신뢰할 수 있는 필요조건이 될 수는 없다.
3. $\|e\|_E$ 값은 근사해의 응력값에 대한 평균상대 오차와 같다.

한편 h-extension의 경우 자유도 N 이 均等(혹은 類似均等) 要素分割(uniform or quasi-uniform mesh refinement)을 통해 正解에 수렴할 때 $\|e\|_E$ 는 아래와 같이 표현된다.^{1) 9)}

$$\|e\|_E < \frac{K_1}{N^{1/2\min(\alpha, p)}} \quad (3)$$

여기서 k_1 은 상수값이고 매개변수 α 는 식(1)에서 사용된 것처럼 해석하고자 하는 문제의 특이성정도에 비례한다. 일반적으로 α 는 1/2에서 1 사이로 변한다. p 는 형상함수의 次數를 나타낸다.

p-extension의 경우 要素가 고정되고 p의 次數가 점진적으로 증가될 때 특이점이 요소절점에 위치하면 $\|e\|_E$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.^{1) 9)}

$$\|e\|_E < \frac{K_2}{N^{\alpha-\epsilon}} \quad \epsilon > 0 \quad (4)$$

여기서 K_2 는 상수이다. 수치해석과 이론적 결과는 극심한 특이성이 발생할 경우 자유도증가에 따른 解의 수렴속도는 p-extension이 h-extension의 2배가량 빠름을 보이고 있다. 더욱이 적절한 요소분할과 p次數의 분배를 통하면 훨씬 빠른 수렴속도를 얻을 수 있는데 이와 같은 접근방법이 h-p extension 유한요소법이며 에너지노름의 오차한계는 다음과 같다.^{1) 9)}

$$\|e\|_E < \frac{K_3}{N^\beta} \quad (5)$$

여기는 K_3 는 상수이고 β 는 임의의 큰 값으로 여러 因子에 의해 결정된다. 이와같이 서로 다른 3가지 방법을 공학문제에 적용한 例가 Fig.4에 나타나 있으며 각각의 수렴속도의 비교를 쉽게 할 수 있는데 h-p extension의 경우가 가장 빠른 속도로 수렴하고 있다.

3. 3 적분형 르장드르 형상함수(Integrals of Legendre Shape Functions)

本 연구에서는 위에서 설명한 바와 같이 많은 장점을 갖고있는 르장드르群의 함수를 형상함수로 사용하며 특히, 르장드르함수가 갖고있는 直交性を 최대한 이용하기 위해서 적분형 르장드르함수가 제안된다. $p=1$ 인 경우의 최저차 형상함수는 다음과 같다.

$$N_k = \frac{(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)}{4} \quad (6)$$

여기서 첨자 k 는 정사각형 標準要素(standard element)의 4개의 꼭지점을 나타낸다. 한편 p 의

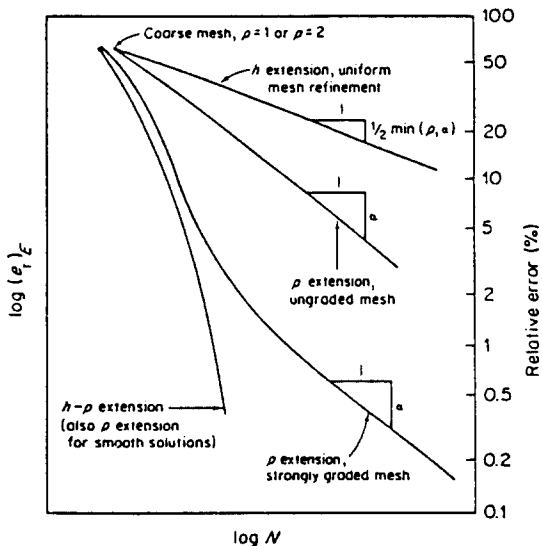


Fig. 4 Performance of the h-, p-, and hp extension process

次數가 증가함에 따라 꼭지점을 제외한 4변에서의 형상함수는 아래와 같이 정의된다.^{8) 11)}

$$\begin{aligned} (1 \pm \eta) F_p(\xi) & \text{ for edges } \eta = \pm 1 \\ (1 \pm \xi) F_p(\eta) & \text{ for edges } \eta = \pm 1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$F_p(x) = \sqrt{\frac{(2p-1)}{2}} \int_{-1}^x P_{p-1}(t) dt \quad (8)$$

여기서 $P_n(t)$ 는 Rodrigues의 式에 의해 정의되는 르장드르다항식인 것이다.

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \quad (9)$$

完全性(completeness)은 $p \geq 4$ 인 경우 標準要素내부에 内部節點(internal nodes)을 형상함수의 곱 형태인 $F_i(\xi) \cdot F_j(\eta)$ 를 고려함으로써 해결될 수 있다. 여기서 $i + j = P$ 이고 $i, j \geq 2$ 인 조건을 만족해야 한다. 2차원의 경우는 정확히 직교성을 만족하지 않지만 거의 직교함(nearly orthogonal)을 보여 well-conditioned 강도매트릭스를 갖는다.

4. 解析例

4.1 마름모꼴 평판(Rhombic Plate)

Fig.5와 같이 150° 둔각을 갖는 마름모꼴 평판이 단순지지되었고 등분포하중 q 가 작용하고 있다. 이 문제의 처짐에 대한 正解는 알 수 없으나 비교목적으로 충분한 정확도를 갖는 Morely의 해는 다음과 같다.⁵⁾

$$w = w_0 + w_1 \quad (10)$$

여기서,

$$w_0 = \frac{qr^4}{64 D} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\cos 2\theta}{\cos 5\pi/6} + \frac{1}{3} \frac{\cos 4\theta}{\cos 5\pi/3} \right\} \quad (11)$$

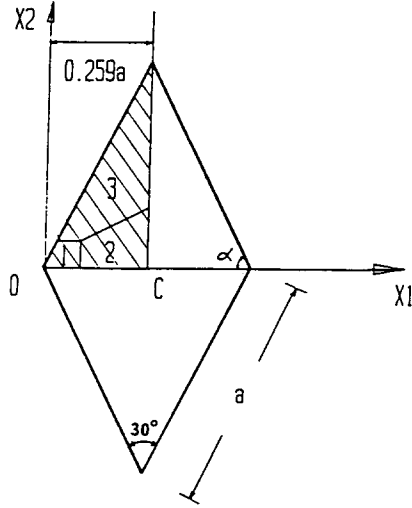


Fig. 5 Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Pressure

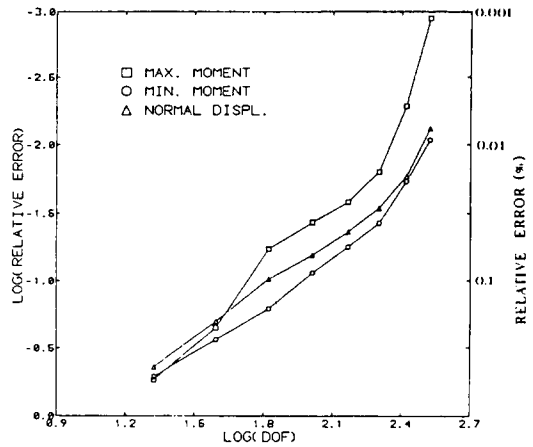


Fig. 6 Relative error of w , M_{\min} and M_{\max} at the center of plate

$$w_1 = \frac{q}{D} \sum_m (a_m + b_m r^2) r^{6(2m-1)/5} \cos \frac{6}{5} (2m-1)\theta \quad (12)$$

이 식에 의하면 마름모꼴 평판의 중앙에서의 최대처짐은 다음과 같다.⁵⁾

$$w_c = 0.408 \times 10^{-3} \frac{qa^4}{D} \quad (13)$$

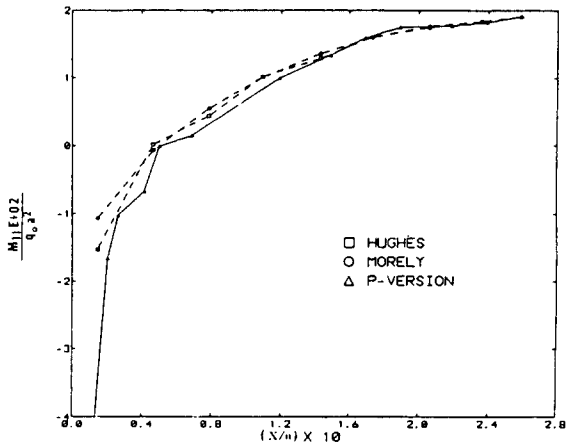


Fig. 7 Bending Moments M_{11} for Rhombic Plate

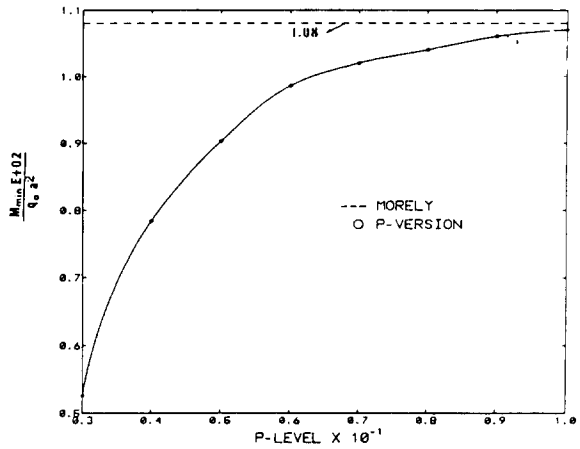


Fig. 10 Convergence of M_{\min} with different p-levels

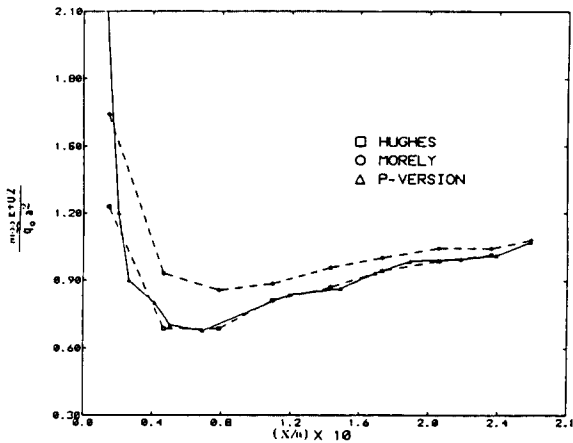


Fig. 8 Bending Moments M_{12} for Rhombic Plate

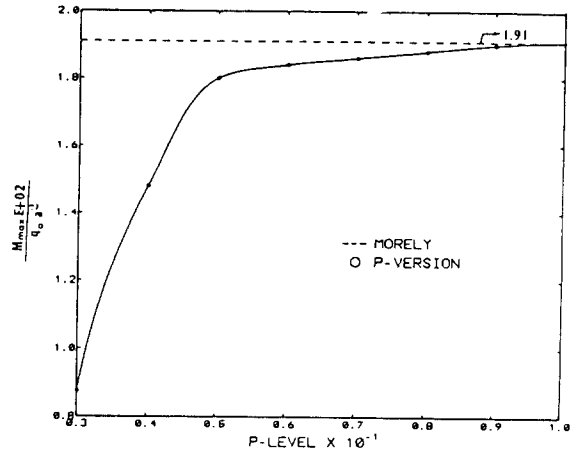


Fig. 11 Convergence of M_{\max} with different p-levels

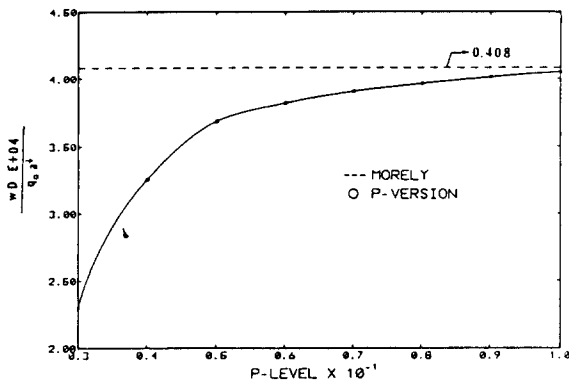


Fig. 9 Convergence of displacements with different p-levels

여기서 Morley의 결과와 64개 網目(mesh)을 사용한 유한차분법(finite difference method)과 $p=10$ 이고 3개의 요소를 사용한 p-version에 의한 연구와의 변위량 및 모멘트를 평판중앙에서 비교하면 다음과 같다. Morely에 의한 標準변위(normalized displacement)는 0.408이고 유한차분법에 의해서는 0.384인데 비해 p-version은 0.405이다. 또 標準모멘트(normalized moment)의 최소치와 최대치는 Morely에 의해 1.08과 1.91이고 유한차분법에 의하면 0.981과 1.92였다. 그러나, 본 연구에 의하면 1.07과 1.91을 얻게된다. 한편, 종래의 h-version 유한요소해석은 Conforming요소를 사용한 Sander의

해²⁾는 최대처짐이 Morley의 해보다 17.5%나 작은 값을 보였고 Argyris와 Lochner¹⁹⁾는 128개 TUB-AC6 (fifth-order) 요소를 사용하여 Morley해의 2% 오차를 보였다. 그러나 p-version 모델(p=10, 3개요소)은 Morely와 비교하여 1%이내의 오차한계를 보임을 Fig.6에서 알 수 있다. 그리고 둔각꼭지점(obtuse vertex)에서 평판중앙까지의 주모멘트(principal moment)의 변화가 Hughes³⁾와 Morley의 결과치와 비교되어 Figs.7, 8에 도시되어 있다. p-version 모델의 p가 증가함에 따른 수렴성이 Figs. 9, 10, 11에 나타나 있다.

4.2 손상단면을 갖는 정방형 평판(Square Plate with Cut-outs)

사각형 開口가 있는 정사각형 평판이 아래와

같이 서로 다른 조합의 경계조건을 갖고 있으며 Fig.12에 본 연구에서 사용되는 유한요소모델과 더불어 그 형상이 나타나 있다.

- 1) 내측 자유단, 외측 단순지지
- 2) 내측 고정단, 외측 자유단
- 3) 내측 단순지지, 외측 자유단

등분포하중이 재하되고 있으며 각각의 경우마다 평판의 대칭성으로 1/4평판을 고려하고 있으며 2개요소와 3개요소로 나누어 각각의 결과를 비교하고자 한다. Hrudey⁴⁾에 의한 수치해석 결과가 첫째 문제의 경우 내측자유단의 중점과 꼭지점, 둘째와 세째 문제의 경우 외측자유단의 중점과 꼭지점에서 무차원 標準變位(normalized displacements) 값이 Table 1에 나타나 있다. 한편, p-version 유한요소해석에 의한 결과가 p=6에서 p=10까지 단순증가됨에 따른 수렴성이 Table 2, 3에 나타나 있고 그에

Table 1

DISPLACEMENTS ; CONCENTRIC SQUARE PLATE UNDER UNIFORM LOAD BY HRUDEY

Mesh	Simply Supported Outer Edge Free Inner Edge		Free Outer Edge Clamped Inner Edge		Free Outer Edge Simple Supported Inner Edge	
	Displ 100 (w/D/q ₀ L ⁴)		Displ 100 (w/D/q ₀ L ⁴)		Displ 100 (w/D/q ₀ L ⁴)	
	Midside of inner edge	Corner of inner edge	Midside of outer edges	Corner of outer edges	Midside of outer edges	Corner of outer edges
Regular rectangular elements						
2×2	0.30716	0.21169	0.043255	0.12460	0.075216	0.13242
4×2	0.31539	0.22293	0.045446	0.12941	0.094648	0.14515
6×6	0.31729	0.22609	0.046254	0.13197	0.098917	0.15202
8×8	0.31811	0.22749	0.046608	0.13334	0.10133	0.15611
10×10	0.31856	0.22826	0.046799	0.13416	0.10290	0.15884
12×12	0.31883	0.22874	0.046917	0.13471	0.10401	0.16079
14×14	0.31902	0.22904	0.046997	0.13510	0.10485	0.16288
16×16	0.31915	0.22930	0.047054	0.13538	0.10550	0.16345
Regular rectangular elements and one regular L-shape element						
3×3	0.32444	0.23822	0.051007	0.16317	0.19634	0.32071
5×5	0.32211	0.23454	0.049338	0.15106	0.16719	0.27395
7×7	0.32126	0.23307	0.048755	0.14656	0.155247	0.25306
9×9	0.32083	0.23232	0.048436	0.14423	0.14824	0.24062
11×11	0.32058	0.23188	0.048235	0.14281	0.14354	0.23222
13×13	0.32042	0.23159	0.048097	0.14185	0.14014	0.22610
15×15	0.32031	0.23139	0.047996	0.14117	0.13754	0.22141
17×17	0.32023	0.23124	0.047920	0.14065	0.13547	0.21768

Table 2
CONCENTRIC SQUARE PLATE BY P-VERSION WITH 2-ELEMENTS

P-level	Simply Supported Outer Edge Free Inner Edge		Free Outer Edge Clamped Inner Edge		Free Outer Edge Simple Supported Inner Edge	
	Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)		Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)		Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)	
	Midside of inner edge	Corner of inner edge	Midside of outer edges	Corner of outer edges	Midside of outer edges	Corner of outer edges
P=6	0.31884	0.22822	0.042168	0.10136	0.077822	0.10976
P=7	0.31954	0.22892	0.042273	0.11364	0.084165	0.12567
P=8	0.31993	0.22955	0.045119	0.12287	0.092360	0.15404
P=9	0.32036	0.23000	0.045737	0.12905	0.100494	0.15404
P=10	0.32078	0.23051	0.046288	0.13353	0.107410	0.16796

Table 2
CONCENTRIC SQUARE PLATE BY P-VERSION WITH 2-ELEMENTS

P-level	Simply Supported Outer Edge Free Inner Edge		Free Outer Edge Clamped Inner Edge		Free Outer Edge Simple Supported Inner Edge	
	Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)		Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)		Displ 100 ($w/D/q_0L^4$)	
	Midside of inner edge	Corner of inner edge	Midside of outer edges	Corner of outer edges	Midside of outer edges	Corner of outer edges
P=6	0.31920	0.22862	0.046215	0.12764	0.093228	0.14007
P=7	0.31993	0.22953	0.046417	0.13209	0.098611	0.15038
P=8	0.32073	0.23009	0.047050	0.13491	0.10441	0.16064
P=9	0.32073	0.23057	0.047112	0.13721	0.10950	0.17053
P=10	0.32113	0.23112	0.047281	0.13897	0.11480	0.18015

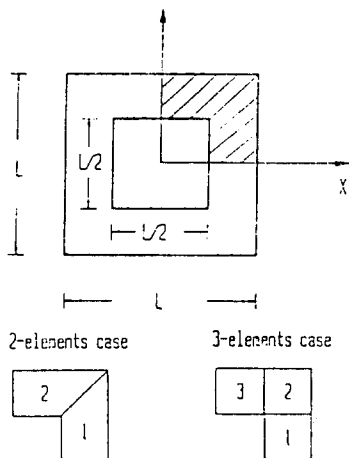


Fig. 12 Concentric Square Plate under Uniform Load

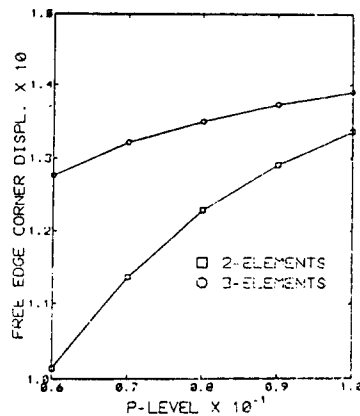


Fig. 13 Displacement Convergence
(Clamped Inner, Free Outer Edge)

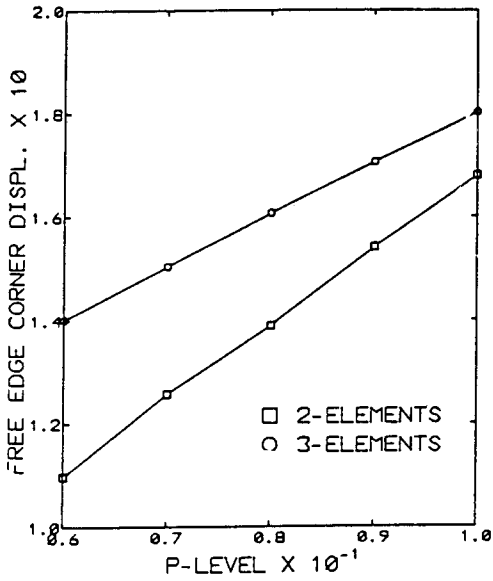


Fig. 14 Displacement Convergence
(Simply Supported Inner, Free Outer Edge)

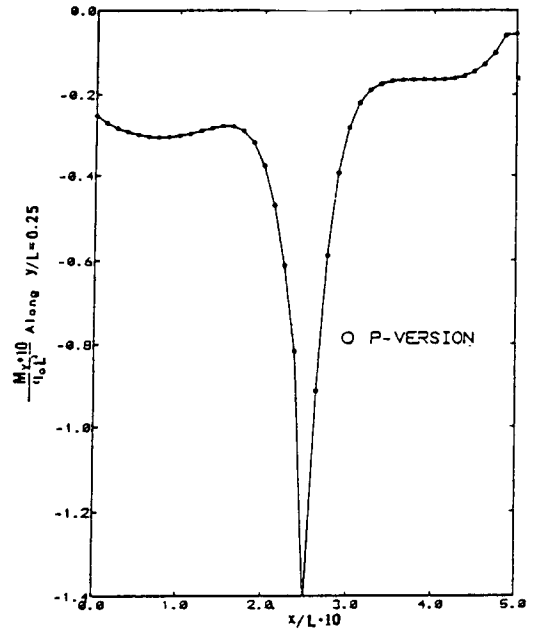


Fig. 16 Bending Moment M_y
(Clamped Inner, Free Outer Edge)

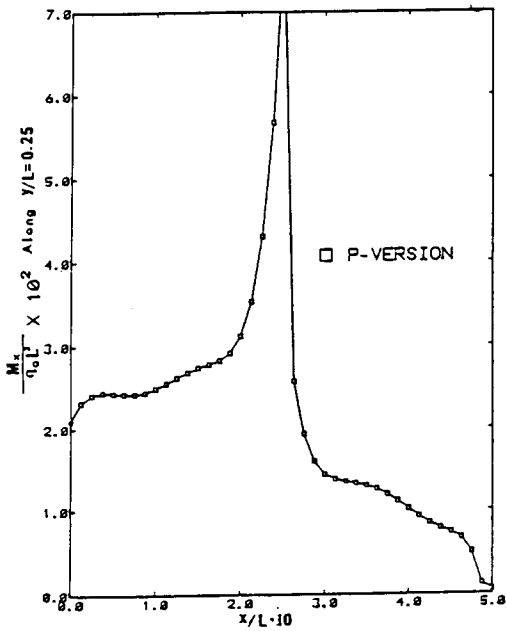


Fig. 15 Bending Moment M_x
(Free Inner, Simply Supported Outer Edge)

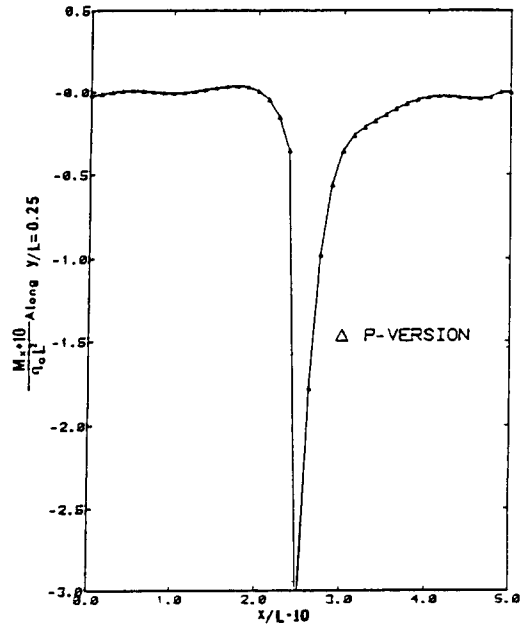


Fig. 17 Bending Moment M_x
(Simply Supported Inner, Free Outer Edge)

대한 그림이 Figs. 13, 14에 표시되어 있다. $p=10$ 을 사용하였을 때 p -version 유한요소해석에 의한 모멘트장(moment field)의 특이거동이 각각의 경우 Figs. 15, 16, 17에 $y=0.25L$ 일때 x 축의 변화에 따라 표시되어 있다. 각각의 경우 꼭지점부근에서의 모멘트특이성이 앞에서 예측한대로 입증되고 있음을 보여준다.

5. 결론

새로 제안되는 평판계층모델(hierarchic plate model)에 기초한 p -version 유한요소해석에 의해 평판중에서 특이거동이 심하게 일어나는 2가지 예를 절점에서의 변위와 모멘트값과 포텐셜에너지 값으로 살펴보았다. 마름모꼴평판의 경우 Morley와 Hughes와의 비교가 수행되었으며 손상단면을 갖는 정방형평판의 경우 주로 Hrudey의 근사해석과 비교되었다. 두 경우 모두 정확도면에서 1% 안팎의 상대오차를 보였고 수렴속도면에서는 2배가량 빠름이 입증되었다. 아울러 같은 정도의 정확성을 갖기위한 총자유도수도 h -version에 비해 놀랄 만큼 줄일 수 있음을 앞의 결과에서 알 수 있었다. 또한, 凹形모서리점과 둔각꼭지점에서는 이론적 예측대로 모멘트특이성을 보였고 마름모꼴평판의 경우 둔각꼭지점 부근에서 x, y 축 방향의 모멘트는 Morley와 같이 서로 다른 부호를 보였다. 이로부터 현재까지 제안된 많은 유한요소모델중 p -version 모델이 특히 정확도 및 신뢰성면과 효율성면에서 뛰어나다고 말할 수 있다.

6. 참고문헌

1. I. Babuska, B.A. Szabo, 'On the Rates of Convergence of the Finite Element Method', Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 18, 323-341, 1982.
2. David H. Geiger, 'Irregular Shaped Plates with Singularities', J. Eng. Mech., ASCE, October, 1971.
3. Thomas J.R. Hughes, M. Cohen, 'THE "HETERO-SIS" FINITE ELEMENT FOR PLATE BENDING', Computers & Structures, Vo. 9, pp. 445-450, 1978.
4. T.M. Hrudey, M.M. Hrabok, 'Singularity Finite Elements for Plate Bending', J. Eng. Mech., Vol. 112, No. 7, 666-681, 1986.
5. L.S.D. Morley, 'Bending of a simply supported rhombic plate under uniform normal loading', Quart. J. Mech. Applied Math., Vol. XV, Pt. 4, 1962.
6. M.L. Williams, 'Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plate under Bending', Proc. of the First National Congress of Applied Mechanics, Chicago, IL., 1951.
7. P.K. Basu, M.P. Rossow, B.A. Szabo, 'Technical Documentation and User's Manual: COMET-X', Report No. R-340, Federal Railroad Admin., 1977.
8. K.S. Woo, 'High precision analysis of plates and cylindrical shells in the presence of singularities by the p -version of F.E.M.', Ph.D. Dissertation, Vanderbilt University, 1988.
9. B. Szabo, 'Estimation and Control of Error Based on p -Convergence in: I. Babuska, J.Gago, E.R. de A. Oliveira and O.C. Zienkiewicz, editors, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons Ltd. 61-78, 1986.
10. O.C. Zienkiewicz, J. Gago, D.W. Kelly, 'The Hierarchic Concept in Finite Element Analysis', Computer and Structures, Vol. 16, pp. 51-65, 1983.
11. P.K. Basu, 'Dimensional Reduction of Structural Plates and Shells', NSF Research Report, Grant No. CEE-84115675, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1986.
12. G. Sander, 'Application of the dual analysis principle', Proc. Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures, Univ. of Liege, pp. 167-207, 1971.
13. J.H. Argyris and N. Lochner, 'On the application of the SHEBA shell element', Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1, 317-347, 1972.

(접수일자 : 1990. 6. 4)