

양단지지된 변단면보의 자유 및 강제진동의 비선형해석

Nonlinear Analysis of Stepped Beam Immovable Ends for Free and Forced Vibrations

심	재	수*
Shim,	Jae	Soo
함	원	식**
Ham,	Won	Shik

요 약

자유 및 강제진동하중이 작용하는 양단지지된 변단면 들보의 유한 진폭 운동을, 축방향 및 전단변형과 회전관성을 고려한 유한요소를 이용하여 추적하였다. 수정된 조화하중 행렬을 도입하여 조화하중이 작용하는 변단면 들보와 비조화하중이 작용하는 들보의 유한진폭의 운동을 비선형해석을 하였다. 여러가지 경계조건에 대한 고유진동수와 변위를 계산한 예들은 제안된 방법이 효과적이며 유효함을 보여준다.

Abstract

A stepped beam with immovable ends under the free and forced vibrations with large amplitude is investigated by using the finite element method to show the effects of longitudinal displacement, shear deformation and rotary inertia. A modified harmonic force matrix is introduced for analysis of finite amplitude vibration of the stepped beam under uniform harmonic loading and a beam under nonuniform harmonic loading. Numerical examples are analysed for deflections and natural frequencies of stepped beam under various support conditions. Results show that the proposed method is valid and efficient.

1. 서론

구조물의 선형진동 해석은 공학적으로 많이 이용되나, 조화하중을 받는 경량유연구조물의 진동문제와 같이 진폭이 미소하지 않고 유한하면 중립면에

서의 부재 축방향 변위를 무시하는 가정에 근거를 둔 선형해석 결과는 부정확하므로 비선형진동해석이 필요하다. 일반적으로 비선형 문제는 재료의 특성을 나타내는 응력과 변형도의 관계가 비선형인 재료의 비선형 문제와, 유한변형에 기인하는 변위

* 정회원 경희대학교 토목공학과 교수

** 경희대학교 토목공학과 석사

□ 이 논문에 대한 토론을 1990년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1990년 12월호에 그결과를 게재하겠습니다.

와 변형도 관계가 비선형인 기하학적인 비선형 문제이다.

연속체 이론으로 들보와 평판이 기하학적 비선형 문제를 해석하는 연구가 진행되어져 Woinow Kykrieger¹⁾은 기둥의 비선형 자유 진동을 연구하여 진동수는 진폭과 함수 관계임을 알았으며, Yamaki와 Mori²⁾는 초기변형과 초기축방향변위의 영향을 고려하여 등분포 조화하중을 받는 양단지지인 들보에서 비선형 강제 진동을 연구하여 해석적 해와 실험 결과를 비교하였다. 이들의 연구에서는 비선형 진동을 받는 들보의 mode shape를 가정하고 비선형 편미분 운동 방정식을 Galerkin방법을 사용하여 비선형 상미분 방정식인 Duffing을 방정식으로 변환하여 elliptic function, perturbation 혹은 수치해석으로 해를 구하였다. 유한 요소법의 발전으로 비선형 진동 문제의 영역에서도 근사해법에 관한 연구가 진행되어져, Ray와 Bert³⁾등의 연구는 비선형 진동해에 유한요소법을 사용하였고 Rao⁴⁾ 등은 비선형변위 변형도 관계를 선형화하여 유한변형이 발생하는 들보와 원형평판에 대하여 연구하였다.

최근에 Mei와 Umphai⁵⁾는 비선형 강제 진동을 받는 들보와 평판을 해석하기 위하여 유한요소법을 이용한 조화하중행렬을 발전시켰으나 균일한 단면에 등분포 조화하중이 작용한다고 가정하였으므로 변단면들보나 임의의 구간에만 작용하는 하중의 경우에는 해석할 수 없다. 그러므로 본 논문에서는 유한 요소법을 이용하여 등분포 하중이 작용하는 변단면들보와 들보의 임의의 구간에 하중이 작용하는 경우를 해석하기 위하여 보 요소의 축방향 변형, 전단변형과 회전관성을 고려하고 조화하중행

렬을 보완하여 양단이 지지된 변단면들보의 기하학적 비선형 자유 및 강제 진동 해석을 위한 고유치와 진동 현상을 구함이 목적이다.

2. 비선형 강제 진동의 Formulation

2-1. Immovable end를 갖는 들보의 비선형 강제 진동

그림1과 같은 구형보에서 보의 높이 h 와 폭 b 의 값이 길이 L 에 비하여 매우 작다고 가정하면 중립축을 따라 두 변위값 즉 축방향 변위 $u(x, t)$ 와 수직 변위 $w(x, t)$ 은 보의 변형을 정의하는데 사용되며 비선형 변위 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx} = u, x - zw, xx + \frac{1}{2} w, x^2 \quad (1)$$

여기서 u, x 는 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 이고 w, xx 는 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 을 의미한다

들보의 탄성 변형에너지(U)와 운동에너지(T)는 각각 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI w^2, xx \, dx + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^L EA(u, x + \frac{1}{2} w, x^2) dx \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \, dx \quad (3)$$

여기서 m 은 단위 길이당 질량이다.

외력 $F(x, t)$ 에 의한 포텐셜에너지 V 는

$$V = \int_0^L F(x, t) w dx \quad (4)$$

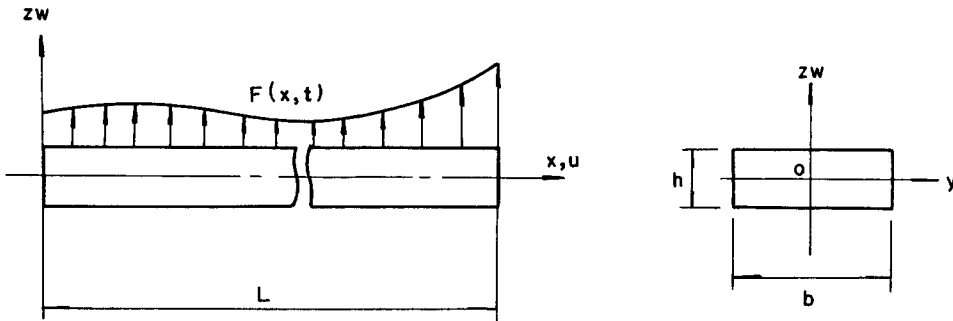


그림1. A rectangular cross-section beam

식(2), (3)과 (4)로 부터 계의 Lagrangian은 $U - T - V$ 이므로 Hamilton의 원리를 적용한 후 부분적분하면 다음과 같은 유한 진폭 운동의 지배 방정식이 된다.

$$(EIw,_{xx}),_{xx} - \frac{d}{dx} [EA(u,_{x} + \frac{1}{2} w,_{x^2}) w,_{x}] + m\ddot{w} = F(x, t) \tag{5}$$

$$m\ddot{u} - \frac{d}{dx} [EA(u,_{x} + \frac{1}{2} w,_{x^2})] = 0 \tag{6}$$

이때 $x=0$ 와 $x=L$ 의 경계 조건은 다음과 같다.

$$w=0 \text{ 혹은 } (EIw,_{xx}),_{x} + EA w,_{x}(u,_{x} + \frac{1}{2} w,_{x^2}),_{x^2} = 0$$

$$w,_{x} = 0 \text{ 혹은 } EI w,_{xx} = 0 \tag{7}$$

$$u=0 \text{ 혹은 } EA(u,_{x} + \frac{1}{2} w,_{x^2}) = 0$$

길이에 대한 단면의 회전반경비가 매우 작으면 \ddot{u} 는 영이라고 가정하고 식(6)은 다음과 같이 된다.

$$EA(u,_{x} + \frac{1}{2} w,_{x^2}) = n(t) \tag{8}$$

$n(t)$ 는 단면의 축력으로 들보의 전길이에 대하여 일정하고 부재의 양단이 지지인 경계조건 $u(0) = u(L) = 0$ 을 고려하면

$$n(t) = \int_0^L \frac{1}{2} w,_{x^2} dx / \int_0^L \frac{1}{EA} dx \tag{9}$$

식(5), (8)과 (9)을 결합하면 수직처짐 $w(x, t)$ 에 대한 비선형 강제 진동의 지배 미분 방정식이 된다.

$$(EIw,_{xx}),_{xx} - n(t) w,_{xx} + m\ddot{w} = F(x, t) \tag{10}$$

2-2 비선형 강제 진동의 해석적인 해

수직 변위 $w(x, t)$ 는 $\phi(x)Y(t)$ 로 치환되고 $\phi(x)$ 는 경계조건을 만족하는 진동현상 함수이다.

작용하는 하중을 $F_0 Y(t)/A_{mp}$ 로 나타내면 F_0 는

하중계수, modal amplitude $Y(t)$ 는 시간의 함수이며, A_{mp} 는 $Y(t)$ 의 최대진폭이다. 식(10)은 다음과 같다.

$$m\phi \ddot{Y}(t) + (EI\phi,_{xx}),_{xx} Y(t) - N(t)\phi,_{xx} Y(t)^3 - F_0 Y(t)/A_{mp} = 0 \tag{11}$$

여기서

$$N(t) = \frac{\int_0^L (\phi,_{xx})^2 dx}{2 \int_0^L \frac{dx}{EI}} \left\{ = \frac{n(t)}{Y(t)^2} \right\}$$

Galerkin방법을 사용하여 양변에 $\phi(x)$ 를 곱하고 보의 길이에 대하여 적분하면

$$\int_0^L m\phi^2 \ddot{Y}(t) dx + \int_0^L (EI\phi,_{xx}),_{xx} \phi Y(t) dx - \int_0^L N(t)\phi,_{xx} \phi Y^3(t) dx - \int_0^L F_0 Y(t) \phi dx = 0 \tag{12}$$

여기서,

$$A_1 = \int_0^L m\phi^2 dx, \quad A_2 = \int_0^L (EI\phi,_{xx}),_{xx} \phi dx,$$

$$A_3 = - \int_0^L N(t)\phi,_{xx} \phi dx, \quad A_4 = \int_0^L \phi dx$$

라 정의하면,

$$A_1 \ddot{Y}(t) + A_2 Y(t) + A_3 Y^3(t) - A_4 \frac{F_0}{A_{mp}} Y(t) = 0 \tag{13}$$

위 식은 Duffing방정식이고 $Y(t)$ 는 근사적으로 $A_{mp} \cos(\omega t)$ 이므로 비선형 항과 하중항은 각각 다음과 같다.

$$Y^3(t) \approx \frac{3}{4} A_{mp}^3 \cos(\omega t) \tag{14}$$

$$F_0 Y(t)/A_{mp} = F_0 \cos(\omega t) \tag{15}$$

식(14)와 (15)을 (13)을 대입하면,

$$A_1\omega^2 - A_2 - \frac{3}{4} A_3 A_{mp}^2 + A_4 Fo / A_{mp} = 0 \quad (16)$$

여기서 A_3 은 비선형 강성계수이고 A_4 는 하중계수이므로 선형자유 진동의 경우에는 $A_3 = A_4 = 0$ 이므로 선형 고유 진동수 ω_L 은 고유벡터의 함수인 A_1, A_2 에 의하여 계산된다.

식(16)에서 ω_L^2 로 양변을 나누면,

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{A_3}{A_1} \frac{A_{mp}^2}{\omega_L^2} - \frac{A_4}{A_1} \frac{Fo}{A_{mp} \omega_L^2} \quad (17)$$

앞의 A_1, A_2, A_3, A_4 값은 유한요소법을 이용하여 구한 형상 함수 $\phi(x)$ 를 수치적분하여 구할 수 있다.

균일한 단면들보와 변단면들보의 ω/ω_L 비는 식(12)의 해석적 해와 식(17)의 perturbation 해로써 표 1과 2에 있다.

2-3. 비선형 강제 진동의 근사적 해

2-3-1. 비선형 자유 진동

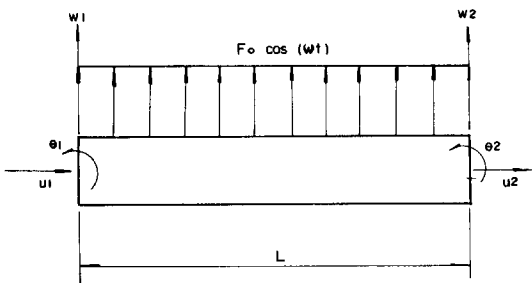


그림2. A beam element

그림2와 같은 들보 요소에서 전단변형을 고려하면 비선형 변위 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx} = u, x - Zw_b, xx + \frac{1}{2} w, x^2 \quad (18)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} w_s, x \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = w_s, x \quad (18)$$

여기서 $w, x = w_s, x - w_b, x$ 이고 각각 전단변형과 휨변형에 의한 회전각이다.

요소의 선형화 함수 f 를 도입하여 다음과 같이 정의하면⁷⁾

$$f = f(x) = \frac{1}{2} w, x \quad (19)$$

식(18)은

$$\epsilon_{xx} = u, x - Zw_b, xx + fw, x^2 \quad (20)$$

전단 변형 효과가 고려되는 Hermitian 다항식을 형상 함수로 사용하면⁷⁾

$$\begin{aligned} W &= h_1 w_1 + h_2 L \theta_1 + h_3 w_2 + h_4 L \theta_2 \\ L \theta &= k_1 w_1 + k_2 L \theta_1 + k_3 w_2 + k_4 L \theta_2 \\ S &= k_s EI / (GAL^2) \quad \beta = x/L \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 G 는 전단탄성계수이고 K_s 는 전단계수이다. 선형 강도행렬 $[K_L]$ 를 유도하는데 필요한 변형 에너지에 대한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2} \int_0^L EI w_b, xx^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA u, x^2 dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L k_s GA w_s, x^2 dx \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)에 식(21)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 선형 강도행렬을 구할 수 있다.

$$[K_L] = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ & b & c & 0 & -b & c \\ & & d & 0 & -c & e \\ & & & a & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & b & -c \\ & & & & & d \end{vmatrix} \quad (23)$$

비선형 강도매트릭스 $[K_{NL}]$ 는 위와 같이 비선형에 관계되는 변형에너지로부터 구할 수 있다.

$$U_{NL} = \int_0^L EAfu, x w, z dx + \frac{1}{2} \int_0^L EAf^2w, z^2 dx \tag{24}$$

식(24)에 식(21)을 대입하여 정리하면 비선형 강도행렬은 아래와 같다.

$$[K_{NL}] = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 & -a_1 & a_3 \\ & a_4 & a_5 & -a_1 & -a_4 & a_6 \\ & & a_7 & -a_2 & -a_5 & a_8 \\ & & & 0 & a_1 & -a_3 \\ \text{sym} & & & & a_4 & -a_6 \\ & & & & & a_9 \end{pmatrix} \tag{25}$$

전단변형을 고려한 고유 진동수의 산정을 위한 질량 매트릭스를 유도하는데 필요한 운동 에너지에 대한 식은 다음과 같다.

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho (A\dot{w}^2 + I\dot{\omega}^2, x) dx \tag{26}$$

여기서 ρ 는 밀도이다.

식(26)에서 식(21)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 전단변형 및 회전관성을 고려한 질량 행렬을 얻을 수 있다.

$$[m] = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ & b_3 & b_4 & 0 & b_5 & b_6 \\ & & b_7 & 0 & -b_6 & -b_8 \\ & & & b_1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & b_3 & -b_4 \\ & & & & & b_7 \end{pmatrix} \tag{27}$$

보 전체의 행렬들은 요소 행렬들을 조립하면 되고 비선형 자유 진동의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$[M] \{\ddot{Y}\} + ([K_L] + [K_{NL}]) \{Y\} = \{0\} \tag{28}$$

2-3-2. 변단면보의 조화하중 행렬

강제 진동의 지배 방정식은 식(12)인데 Prismatic beam이라면 다음과 같다.

$$m \ddot{Y}(t) + \left[\int_0^L (EI\phi, xx), xx Y(t) \phi dx - \int_0^L N(t) \phi, xx \phi Y^3(t) dx - \int_0^L F_0 Y(t) / A_{mp} \phi dx \right] / \int_0^L \phi^2 dx = 0 \tag{29}$$

$F_0 \int_0^L \phi dx$ 를 $A_{mp} \int_0^L \phi^2 dx$ 로 나눈것을 B^0 라 하자 하면, $B^0 Y(t)$ 는 선형 스프링력으로 볼 수 있고 B^0 는 작용하중 $F(x, t)$ 와 형상함수 즉 고유벡터 ϕ 의 함수이며 전들보의 길이에 대하여 일정한 스프링 상수와 같다.

여기서 i 번째 요소에 조화하중이 작용한다면 그 요소의 포텐셜에너지는

$$V_i^e = \frac{1}{2} B_i^0 \int_0^{L_i} w^2 dx \tag{30}$$

여기서 B_i^0 는 요소 i 에서는 일정하며 다음과 같다.(그림5)

$$B_i^0 = \frac{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i dx F_{oi}}{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i^2 dx A_{mp}} \tag{31}$$

식(21), (30)와 (31)을 결합하여 정리하면 조화하중 행렬 $[h]$ 를 얻을 수 있다.

$$[h] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & c_4 \\ & & c_5 & 0 & -c_4 & c_6 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & c_1 & -c_2 \\ & & & & & c_5 \end{pmatrix} \tag{32}$$

비선형 강제 진동의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$[M] \{\ddot{Y}\} + ([K_L] + [K_{NL}] - [H]) \{Y\} = 0 \tag{33}$$

2-4. 계산 과정

해를 구하는 과정은 미소변형에 의한 선형 해와 유한변형에 의한 비선형 해의 두 부분으로 구성된다.

(1) 미소 변형의 자유 진동 선형 해

선형해의 해석은 선형 고유값과 선형 고유벡터를 구하는 과정으로 계산된 선형 고유벡터는 비선형해의 초기값이 된다.

(2) 비선형 해

비선형 해를 구하는 방법으로 반복법이 사용되는데 비선형 강도행렬 $[K_{v,i}]$ 과 조화하중행렬 $[H]$ 은 고유벡터 $\{Y_{i-1}\}$ 에 의하여 형성되고 이때의 $\{Y_{i-1}\}$ 은 이전 단계의 반복 시행시 구한 고유벡터로 주어진 최대 진폭에 의하여 normalize 된다. 결국 식 (33) i 단계의 비선형 고유값 ω_i 와 고유벡터 $\{Y_i\}$ 를 구하는 자유 진동 문제로 귀착되어진다.

비선형 강제 진동 문제를 해석하기 위한 흐름도는 그림3 과 같으며 수렴조건은 Frequency Norm 을 사용하였으며 다음과 같다.

$$e = \left| \frac{\Delta \omega_i}{\omega_i} \right| < \text{Tol} (10^{-8}) \quad (34)$$

2-5. 예제

그림4와 같은 균일한 들보와 변단면들보의 경우를 해석하였다.

- 두께 $H = 8.313 \text{ in}$ (변단면 들보 : $H_i = 1.2H$)
- 폭 $b = 3H = 24.939 \text{ in}$
- 길이 $L = 240 \text{ in}$ (변단면 들보 : $L_i = L/3$)
- 질량 $m = 0.002587 \text{ lb/in}^3$
- 포아송비 $\nu = 0.3$

앞서 가정한 두 B_i^0 에 의한 양단 고정과 양단 힌지의 경우의 해석결과는 각각 표1과 2에 있다.

보의 양단과 단면의 변화에 따른 자유 및 강제진동의 고유 진동수들은 표3에 있고, 진동 mode는 표4에 있다.

3. 결론

본 연구는 변단면 들보 요소를 포함한 들보의 유한 변형을 고려하여 기하학적 비선형 자유

및 강제 진동문제의 고유치와 고유벡터를 계산하였다.

그 과정은 비선형 변위-변형도 관계식을 선형화하고 선형 진동을 해석한 결과인 기본 고유 벡터를 기하학적 비선형 진동의 초기 mode shape로 하여 조화하중행렬을 계산하고 고유벡터를 구하여 변위를 계산한 후 이 고유벡터를 다시 mode shape로 하여 조화하중행렬을 수정하고 반복 계산하여 고유치 Norm을 check하여 수렴이 된 후 비선형 진동에 대한 고유치와 고유벡터를 구하였다.

본 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 길이가 일정하도록 구축된 보의 유한 진폭의 자유 및 강제진동해석을 위한 비선형 유한 요소 프로그램을 개발하였다.
2. 전단변형을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 고유치 오차는 1% 내외이다.
3. 비선형 자유진동 해석은 조화하중행렬을 null matrix로 대체하면 비선형 강제진동 문제와 같다.
4. 수정된 조화하중 행렬을 도입하여 변단면 들보의 해석과 임의의 영역에 하중이 작용하는 Prismatic 보의 해석이 가능하다.
5. 회전관성 및 전단변형의 영향을 제거한 비선형 진동해석결과는 해석적인 해와 Perturbation 해와 잘 부합한다.
6. 비선형 진동의 각속도와 선형 진동의 각속도의 비는 해석적인 비와 대체로 잘 부합한다.
7. 비선형 진동 모우드는 반복계산 결과 해석적인 값과 잘 부합한다.

후기

1989년도 경희대학교 교비연구비 지원에 대한 연구임.

REFERENCES

1. Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., "Nonlinear Oscillation" John Wiley and Sons, Inc. 1979
2. Mei. C., "Nonlinear Vibration of Beam by Matrix Displacement Method", AIAA Journal, Vol. 10 No. 3, March 1972, pp. 355~357.
3. Mei. C., "Finite Element Displacement Method for Large Amplitude Free Flexural Vibration of Beams and Plates", Journal of Computers and

Structures, Vol. 3, 1973, pp. 163~174.

4. Roo, G.V., Raju, K.K. and Raju I.S., "Finite Element Formulation for the large Amplitude Free Vibration of Beam and Orthotropic Circular Plate", Journal of Computers and Structures, Vol. 6, 1976, pp. 169~172.
5. Mei.C. and Decha Umphai, K., "A Finite element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, 1985, pp. 369~380.

6. Mei. C. and Decha Umphai, K., "Finite Element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Circular Plates", AIAA Journal, Vol. 23, 1985, pp. 1104~1110.
7. 김문영. "전단 변형을 고려한 평면 뼈대 구조물의 기하학적 비선형 해석" 대한 토목학회 논문집 제10권 제1호, 1990.
8. 심재수, 함원식 "보의 자유 및 강제 진동의 비선형 해석" 경희대학교 재료과학 기술연구소 연구논문 제2집, 1989. (접수일자: 1990. 4. 30)

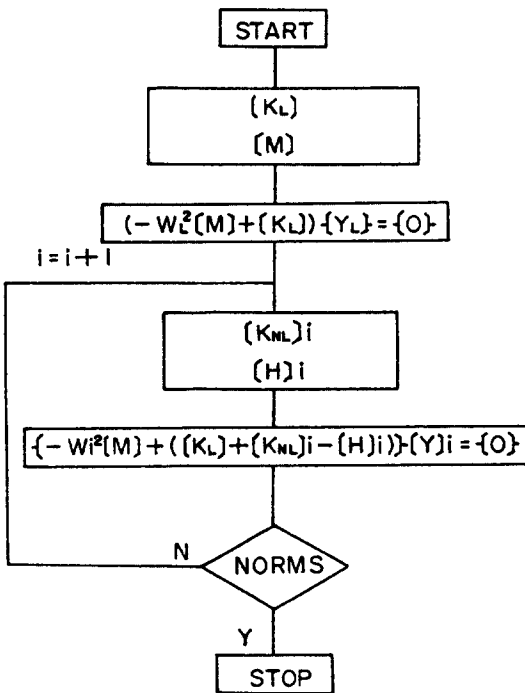


그림3. flow chart

Table. 1 Forced vibration frequency ratio ω/ω_L of a clamped beam for uniform load $F_0=3276.12$ lb/in

B	cross section	analytic (eq. 13)	perturbation (eq. 17)	present research
B	uniform	A 1.3938 B C	1.4042	1.2513
B ₁₀	uniform	A 1.3770 B 1.3522 C 1.3512	1.3870 1.3719 1.3720	1.3287 1.3285 1.3309
B ₁₀	stepped	A 1.3324 B 1.3140 C 1.3135	1.3405 1.3293 1.3294	1.2893 1.2882 1.2861

A: First iteration
 B: Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear free vibration
 C: Final iteration $\phi(x)$ is from nonlinear forced vibration

$$B_0 = \frac{\int_0^L \phi \, dx}{\int_0^L \phi^2 \, dx \cdot \text{Amplitude}}$$

$$B_{10} = \frac{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i \, dx}{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i^2 \, dx \cdot \text{Amplitude}}$$

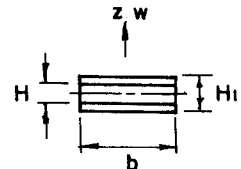
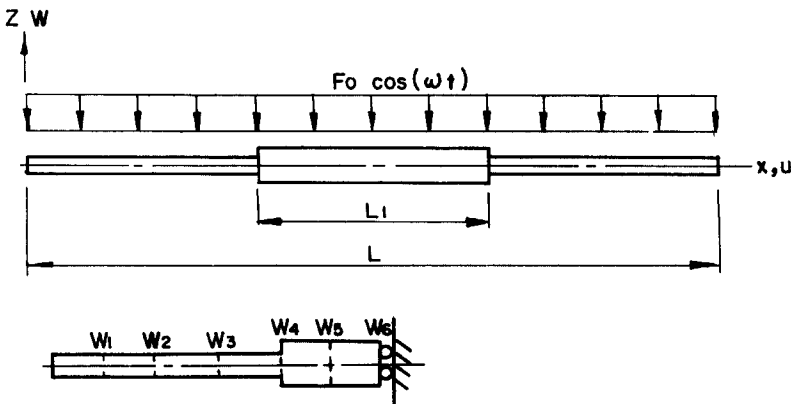


그림4. A stepped beam

Table. 2 Forced vibration frequency ratio ω/ω_L of a hinged beam for uniform load
 $F_0=1321.64 \text{ lb/in}$

B	cross section	analytic (eq. 13)	perturbation (eq. 17)	present research
B	uniform	A 2.2606 B C	2.2996	1.9371
B_1°	uniform	A 2.2606 B 2.2123 C 2.2131	2.2995 2.2656 2.2656	2.0394 2.0379 2.0301
B_1°	stepped	A 2.2137 B 2.0445 C 2.0457	2.1570 2.1005 2.1006	1.9126 1.8984 1.8922

A: First iteration
 B: Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear free vibration
 C: Final iteration $\phi(x)$ is from nonlinear forced vibration

$$B^\circ = \frac{\int_0^L \phi \, dx}{\int_0^L \phi^2 \, dx \cdot \text{Amp}}$$

$$B_1^\circ = \frac{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i \, dx}{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i^2 \, dx \cdot \text{Amp}}$$

$$B_1^\circ = \frac{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i \, dx}{\int_{L_{i-1}}^{L_i} \phi_i^2 \, dx \cdot \text{Amp}}$$

$$B^\circ = \frac{\int_0^L \phi \, dx}{\int_0^L \phi^2 \, dx \cdot \text{Amp}}$$

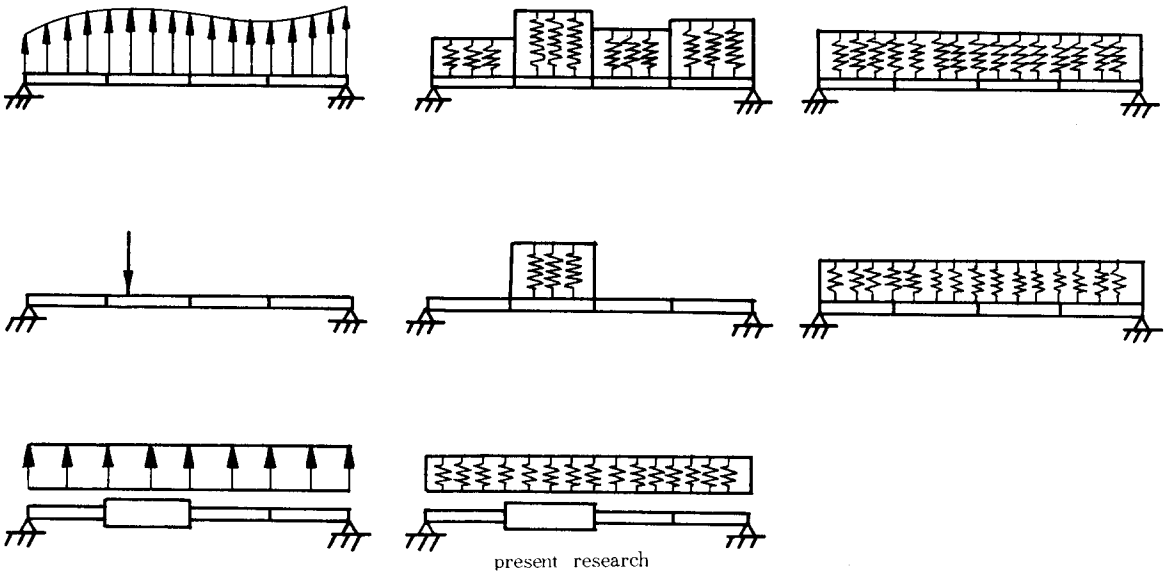
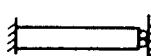
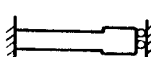
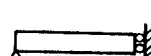



그림5. Difference between two assumption of B° and $B_1^\circ m^2$

Table. 3 Eigenvalues of beam under nonlinear free and forced vibration.

Eigenvalue Beam Type	Free vibration			Forced vibration			
		ω_L	ω_1	ω	ω_L	ω_1	ω
	fs = 0	183.232	243.473	243.473	182.232	243.011	243.876
	fs	182.134	242.042	242.034	182.134	241.577	241.582
	fs = 0	190.029	245.012	244.792	190.029	244.618	244.404
	fs	188.693	243.392	243.209	188.693	242.996	242.819
	fs = 0	80.828	164.843	164.724	80.828	164.196	164.078
	fs	80.701	164.744	164.64	80.701	164.098	163.969
	fs = 0	88.658	169.565	168.309	88.658	169.018	167.762
	fs	88.490	169.425	168.172	88.490	168.878	167.626

ω_L : Linear frequency (rad/s)
 ω_1 : Nonlinear frequency first iteration (rad/s)
 ω : Nonlinear frequency final iteration (rad/s)
 fs : Shear factor ($\gamma = 0.3$)
 $F_0 = 3276.12$ lb/in for clamped beam
 1321.64 lb/in for hinged beam

Table. 4 Eigenvectors of beam under nonlinear free and forced vibration.

Beam Type.	eigenvector	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
	vibration type						
Uniform Clamped Beam	Free vibration	1.02250	3.48798	6.52182	9.33583	11.29846	12.
	$F_0 = 3276.12$	1.15081	3.74737	6.77310	9.48472	11.34135	12.
Stepped Clamped Beam	Free vibration	1.26103	4.05449	7.19999	9.79701	11.42327	12.
	$F_0 = 3276.12$	1.26154	4.05560	7.20113	9.79771	11.42347	12.
Uniform hinged Beam	Free vibration	3.09523	5.98346	8.46950	10.38264	11.58821	12.
	$F_0 = 1321.64$	3.09636	5.98514	8.47108	10.38350	11.58846	12.
Stepped hinged Beam	Free vibration	3.27148	6.29457	8.82306	10.61261	11.64403	12.
	$F_0 = 1321.64$	3.27265	6.29627	8.82453	10.61343	11.64427	12.