

파랑하중의 산정을 위한 유한요소법

Finite Element Method for Evaluation of Wave Forces

朴 佑 善*

1. 서 언

유한요소법은 구조물의 변위 또는 응력 등을 해석하기 위한 구조해석분야에서 뿐만 아니라, 유체역학, 열역학 및 전자기학 등 각종 공학문제의 수학적 모형에 대하여 구해진 미분방정식을 푸는 기법으로 널리 사용되고 있다. 특히, 컴퓨터 기술의 급속한 발달로 인한 유한요소법의 적용범위는 더욱 확장되고 있다.

본고는 구조공학분야에 주로 종사하고 있는 본 학회 회원들에게, 유한요소법이 타 공학문제, 특히 유체에 관련된 문제에서 어떻게 이용되고 있는가를 소개하려 한다. 구체적으로, 해양구조물의 설계에 있어서 선결되어야 할 주요 사항인 파랑하중 산정문제를 예로 들어, 유한요소법을 이용한 이의 수식화과정을 간략히 설명하였다.

2. 유동의 경계치 문제

파동장에 놓인 대형 구조물에 작용하는 파랑하중은 통상적으로 선형회절이론(linear diffraction theory)에 의해서 산정된다. 선형회절이론은 파동장의 물입자 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식을 비점성 및 비압축성 유체이며 비회전류라는 가정 아래 선형화한 Laplace 방정식과, 자유수면, 파동장의 바닥면 및 물체의 표면에서의 경계조건에 대한

선형화 조건식으로 나타내지는 이론이다. 이를 사용하면 불규칙한 실제의 파동을 정현파(sine wave)의 선형중첩으로 나타내어 해석할 수 있다.

선형회절이론에 의하면, 파동장은 지배방정식인 Laplace 방정식과 각 경계면에서 혼합형 경계조건을 만족하는 속도포텐셜로 나타내진다. 또한 이 경계치문제는 선형이므로 고정된 구조물에 바람 등에 의해 생성된 파가 입사하는 회절문제(diffraction problem)와 입사파가 없는 유체장에 구조물의 운동만에 의해 발생한 파를 다루는 방사문제(radiation problem)로 분리하여 해석할 수 있다. 구조물에 작용하는 파랑하중은 이 회절문제와 방사문제를 풀어서 구한 속도포텐셜에 Bernoulli 방정식을 적용하여 쉽게 산정할 수 있다.

그러면, 여기서 회절 및 방사문제의 일반적인 미분방정식의 형태를 살펴보기로 하자. 먼저 지배방정식인 Laplace 방정식은 다음과 같으며,

$$\nabla^2\Phi=0 \quad (1)$$

각 경계면에서의 조건은 다음과 같이 일반적인 형태로 나타내진다(그림1).

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \alpha\Phi + \beta = 0 \quad (2)$$

이 식에서 α 와 β 는 각 경계면에 따라서 다음과 같이 주어진다.

* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

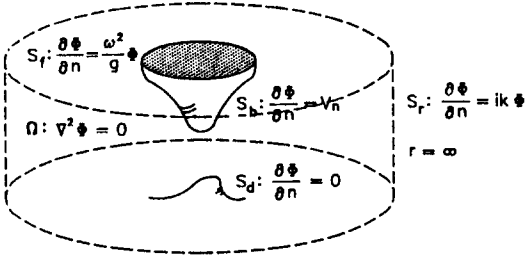


그림 1. 유동의 경계치 문제

자유수면(S_f)	$\alpha = -\omega^2/g$	$\beta = 0$	
파동장의 바닥면(S_d)	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	(3)
물체표면(S_b)	$\alpha = 0$	$\beta = V_n$	
무한원방 경계면(S_r)	$\alpha = -ik$	$\beta = 0$	

여기서, ω 는 입사파 또는 구조물 운동의 진동수를, g 는 중력가속도를 나타낸다. k 는 파수로서 진동수 ω 에 따라 결정된다. V_n 은 물체표면에서 유체영역으로 향하는 물입자의 수직속도 성분을 의미한다. 즉, 회절문제에서는 물체표면에서의 입사파에 의한 수입자의 수직속도가 되며, 방사문제에서는 각 방향운동에 대한 물체의 운동속도가 된다.

3. 유한요소법을 이용한 해의 도출

식(1) 과 (2)를 만족하는 속도포텐셜은 이 미분방정식과 경계조건에 대응하는 범함수(Functional)를 구한 후, 이를 최소화하는 기법으로 구할 수 있다[1,2].

$$\Pi(\Phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega + \int_S \left(\frac{1}{2} \alpha \Phi^2 + \beta \Phi \right) dS \quad (4)$$

이 범함수를 속도포텐셜, Φ 에 대해서 변분을 취하여 정리하면, 식(1)과 (2)로 표시되는 경계치 문제로 변환됨을 알 수 있다. 즉, 이는 식(1)과 (2)로 표시된 미분방정식에 대한 해는 식(4)에 주어진 범함수를 최소화함으로써 구할 수 있음을 의미한다. 만일 위와 같은 범함수를 구할 수 없는 경우에는 Galerkin's 방법과 같은 방법으로 적분형태를 구하여 해석할 수 있다.

유한요소법을 사용하여 식(4)에 주어진 범함수를 최소화하는 속도포텐셜을 구하기 위해서는 유체영역을 적당한 크기의 요소로 분할하여야 하며, 분할된 각 요소(e) 내의 포텐셜을 각 절점포텐셜($\{\Phi^e\}$)과 형상함수($\{N\}$)로 나타내어야 한다. 일반적으로 각 요소내의 포텐셜(Φ)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi^e = \{N\}^T \{\Phi^e\} \quad (5)$$

이 식을 식(4)에 대입한 후, $\{\Phi^e\}$ 에 대해서 최소화하면, 다음과 같은 식을 얻게되는데,

$$\frac{\partial \Pi(\{\Phi^e\})}{\partial (\{\Phi^e\})} = [K^e] \{\Phi^e\} + \{P^e\} = 0 \quad (6)$$

여기서, $[K^e]$ 은 요소의 시스템행렬(구조해석문제의 강성행렬)을, $\{P^e\}$ 은 하중벡터를 나타내며, 다음과 같이 나타내진다

$$\begin{aligned} [K^e] = & \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\}^T d\Omega^e \\ & - \int_{S_f^e} \frac{\omega^2}{g} \{N\} \{N\}^T dS_f^e \\ & - \int_{S_b^e} ik \{N\} \{N\}^T dS_b^e \end{aligned} \quad (7)$$

$$\{P^e\} = - \int_{S_b^e} V_n \{N\} dS_b \quad (8)$$

윗 식에서, S_f 는 자유수면을, S_r 는 무한원방의 경계면을, 그리고 S_b 물체표면을 나타낸다. 각 요소에 대한 시스템행렬과 하중벡터를 조합하면 아래와 같은 선형 대수방정식을 얻게되는데

$$[K] \{\Phi\} = \{P\} \quad (9)$$

이 방정식을 회절 및 방사문제에 대해서 각각 풀고, 구해진 각 포텐셜을 선형중첩하면 파동장의 속도포텐셜을 알 수 있으며, 이로부터 최종적으로 구하고자 하는 구조물에 작용하는 파랑하중도 구할 수 있다.

4. 무한원방 방사조건의 모형화기법

앞에서 언급한 일련의 과정을 수행하면 과량하중을 산정할 수 있으나, 식(3)의 경계조건 중 무한원방에서의 방사조건 때문에, 유한요소로 모형화할 유체영역이 매우 커져 실제 적용이 어렵다는 문제점을 안고 있다. 이 문제점의 해결방안에 대한 많은 연구가 수행되어 현재는 상당히 효율적인 방안들이 제시되었다[3-17]. 지금까지 연구되어 온 무한원방의 방사경계조건에 대한 해결방안은 다음과 같이 4가지 유형으로 분리할 수 있다(그림2).

- (1) 물체로부터 유한한 거리에 직접 또는 약간 수정된 방사경계조건을 적용하는 방법(그림 2.a) [3-7]
- (2) 유체영역을 연직원통형 경계면을 갖는 내부영역과 외부영역으로 분리하여, 구조물을 포함하는 내부영역은 유한요소로 모형화하고 외부영역은 해석적 고유함수의 급수해로 나타내어 두 영역의 접합면 사이에서의 조건을 도입하여 해결하는 방법(그림2.b) [8-11]
- (3) 방법(2)의 해석적 고유함수의 급수해 대신에

Green's 함수를 사용하여 나타내는 방법으로 방법(2)에서는 반드시 연직원통형 경계면으로 두 영역을 분리하였으나, 이 방법에서는 임의의 경계면으로 영역을 분리할 수 있다.(그림 2.c) [8, 11, 12]

- (4) 방법(2)의 외부영역을 무한원방의 방사조건을 만족하는 적절한 형상함수를 갖는 무한요소로 모형화하는 방법(그림2.d) [13-17]

이 4가지 무한원방의 방사경계조건의 해결방안은, 서로 비교하여 볼 때, 해외 정확도, 계산의 효율성 등의 차이는 있으나, 어느 방법을 사용하여도 공학적으로 타당한 결과를 얻을 수 있는 것으로 많은 논문에서 보고되었다.

5. 결 언

본 고에서는 Laplace 방정식을 지배방정식으로 하고 혼합형 경계조건을 갖는 경계치문제로 대별되는 과량하중 산정문제를 범함수를 최소화하는 방법으로 수식화하는 과정을 간략히 소개하였다. 즉, 유한요소법을 이용하여 선형 유동문제가 구조공학

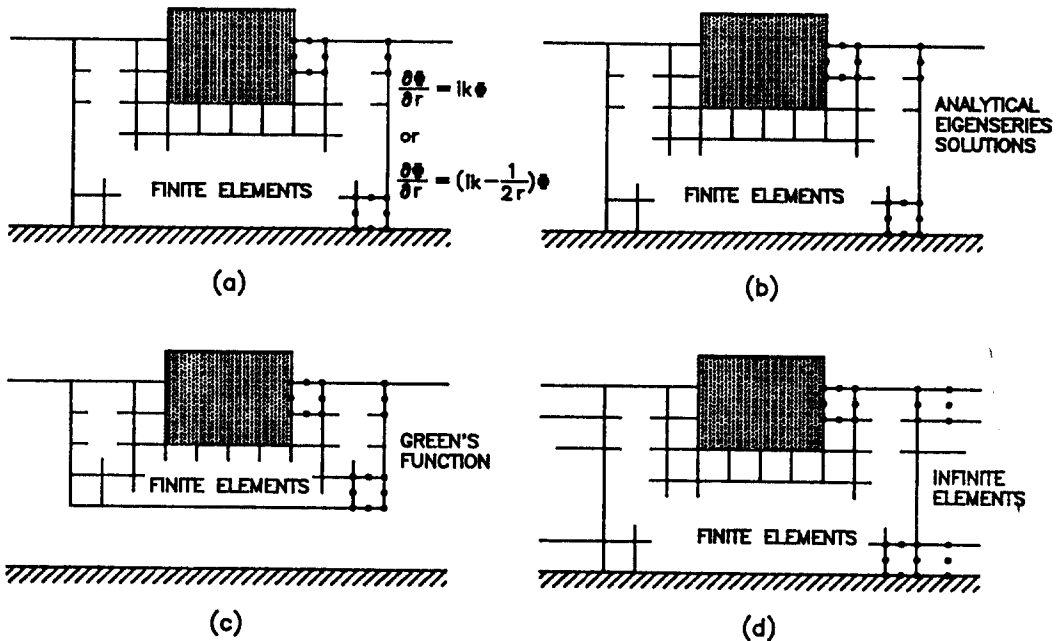


그림2. 무한원방 방사조건의 모형화기법

자에게 익숙한 선형 대수방정식으로 나타내짐을 보였다.

본 고에서 다룬 문제와 같이 주어진 수학적 모형이 범함수가 존재하는 경우에는 이를 사용하면 쉽게 유한요소로 수식화할 수 있고, 범함수가 존재하지 않는 미분방정식으로 표시되는 경우에는 Galerkin's 방법 등을 사용하면 유한요소로의 수식화가 가능하다.

급속한 컴퓨터기술의 발전에 힘입은 유한요소법은 본 고에서 언급한 유체역학뿐만 아니라 열역학, 전자기학 등 각종 공학에서 나타나는 문제의 해결 도구로 각광을 받고 있다. 특히, 가격이 저렴한 고성능 개인용 컴퓨터의 등장으로 인하여 이의 적용범위가 더욱 확장되고 있으며, 그 이용도 또한 날로 증가하고 있는 실정이다.

참 고 문 헌

- Davies, A.J., 1980. The finite element method : a first approach, Oxford University Press.
- Sarpkaya, T. and Isaacson, M., 1981. Mechanics of wave forces on offshore structures, Van Nostrand Reinhold Company.
- Bai, K.J., 1972. A variational method in potential flows with a free surface, Univ. of California at Berkley, College of Engineering, Report No. NA 72-2.
- Huang, M.C., Leonard, J.W. and Hudspeth, R.T., 1985a. Wave interference effects by finite element method, J. of W.P.C.O. Div. ASCE, Vol. 111, No. 1 : 1-17.
- Huang, M.C., Hudspeth, R.T. and Leonard, J.W. 1985b. FEM solution 3-D wave interference problems, J. of W.P.C.O. Div. ASCE, Vol. 111, No. 4 : 661-677.
- Sharan, S.K., 1986. Modeling of radiation damping in fluids by finite elements, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 23 : 945-957.
- Sharan, S.K., 1989. Hydrodynamic loadings due to the motion of large offshore structures, Computers and Structures, Vol. 32, No. 6 : 1211-1216.
- Bai, K.J. and Yeung, R.W., 1974. Numerical solution to free-surface flow problems, The 10th Sym. of Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, Cambridge, Massachusetts : 609-647.
- Yue, D.K.P., Chen, H.S. and Mei, C.C., 1976. A hybrid element method for calculating three-dimensional water wave scattering, Technical report No. 215, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, M.I.T. Cambridge, Massachusetts.
- Yue, D.K.P., Chen, H.S. and Mei, C.C., 1978. A hybrid element method for diffraction of water waves by three-dimensional bodies, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 12 : 245-266.
- Taylor, R.E. and Zietsman, J., 1981. A comparison of localized finite element formulations for two-dimensional wave diffraction and radiation problems, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 17 : 1355-1384.
- Zienkiwicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P., 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 11 : 355-375.
- Bettess, P. and Zienkiwicz, O.C., 1977. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 11 : 1271-1290.
- Zienkiwicz, O.C., Bando, K., Bettess, P., Emson, C. and Chiam, T.C., 1985. Mapped infinite elements for exterior wave problems, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 21 : 1229-1251.
- Lau, S.L. and Ji, Z., 1989. An efficient 3-D infinite element for water wave diffraction problems, Int. J. for Num. Meth. in Engg., Vol. 28 : 1371-1387.
- 박우선, 윤정방, 편종근, 1989. 파랑하중 산정을 위한 무한요소, 한국해안·해양공학회지, 제1권 제1호 : 71-80.
- Park, W.-S., Yun, C-B. and Pyun C-K., 1990. Infinite elements for evaluation of hydrodynamic forces on offshore structures, submitted to Computers and Structures.