

셸구조 해석을 위한 개선된 Degenerated 셸유한요소

Improved Degenerated Shell Finite Elements for Analysis of Shell Structures

| | | |
|-------|-------|------|
| 최 | 창 | 근* |
| Choi, | Chang | Koon |
| 유 | 승 | 윤** |
| Yoo, | Seung | Woon |

요 약

본 연구에서는 셸구조물의 해석을 위한 개선된 degenerated 셸유한요소를 제시하였다. 본 연구의 개선된 degenerated 셸요소는 shear locking 해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 사용하고, membrane locking 현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 셸요소자체의 거동을 보완하기 위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하였다. 본 요소는 기존 degenerated 요소계열에서 가장 큰 문제점중의 하나인 locking 현상과 전달가능한 거짓영에너지모드가 발생하지 않으며, 조각시험도 통과한다. 본 개선된 셸요소의 거동을 알아보기 위해 다수의 예제시험을 행하였다. 수치시험결과 본 요소는 빠른 수렴성과 안정성을 보여준다.

ABSTRACT

The development of an improved degenerated shell element is presented in this paper. In the formulation of this element, an enhanced interpolation of transverse shear strains in the natural coordinate system is used to overcome the shear locking problem; the reduced integration technique in in-plane strains is applied to avoid the membrane locking behavior; and selective addition of the nonconforming displacement modes improve the element performances. This element is free of serious locking problems and undesirable compatible or commutable spurious kinematic deformation modes, and passes the patch tests. To illustrate the performance of this improved degenerated shell element, some benchmark problems are presented. Numerical results indicate that the new element shows fast convergence and reliable solutions.

1. 서 론

셸 구조는 그 자체의 구조력학적 효율성과 미

학적 특성때문에 여러분야의 공학적 구조에 가장 많이 사용되는 구조형태 중의 하나이다. 이러한 구조형태의 해석에는 현재 가장 보편화된 수치해

* 정회원, 회장, 한국과학기술원 교수
 ** 정회원, 한국과학기술원 박사과정

이 논문에 대한 토론을 1990년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1991년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

석 방법인 유한요소법이 일반적으로 많이 사용되고 있다[1,2,3]. Ahmad, Irons과 Zienkiewicz[4]가 처음 제안한 degenerated 쉘 요소 접근방법은 수학적으로 증명되고 비선형 해석에서의 확대가 용이하고, 그 효율성도 양호 하기 때문에 이 접근방법에 의한 쉘유한요소 개발연구는 많은 연구자들에 의해 계속 수행되고 있다. 그러나 많은 연구결과 이 degenerated 쉘유한요소는 다소 두꺼운 쉘의 경우에만 우수한 결과를 주는 것으로 알려졌다. 즉 쉘의 두께가 감소함에 따라 수렴성이 떨어지고, 매우 얇은 경우에는 사용한 요소수에 상관없이 정확한 해에 수렴하지 못하는 현상이 발생한다. 이와같은 바람직하지 못한 현상을 locking 현상이라고 하는데, 이는 원래의 degenerated 쉘요소가 휨거동에 영향을 미치지않고 미소한 막변형도(membrane stain)와 전단변형도(transverse shear strain)을 나타낼 수 없기 때문이다[5,6].

이와같은 locking 현상을 해결하기 위하여 다음과 같은 기법들이 적용되어 왔다. 즉, 강성행렬 계산시 적분차수를 일률적으로 혹은 선택적으로 줄여서 계산하는 감차적분 방법[7,8], 이동변위와 회전변위를 각각 다른 형상함수를 갖는 heterosis 모델에 의한 방법[2]등이 있으며, 감차적분에 의해 특이행렬(singular matrix)이 되는 경우 강성행렬을 안정화시키는 방법[9]이 사용되었다. 또한 막변형도와 전단변형도에 가정된 막, 전단변형도를 대체 사용하는 방법[10,11], 불연속적으로 Kirchhoff 이론을 만족시키는 방법[12], 그리고 요소내에 발생하는 과도한 막변형에너지나 전단변형에너지의 발생을 비적합변위형의 추가함으로써 회복 시키는 방법[13,14] 등이 있다.

그러나 위의 각각의 방법은 각각 나름대로의 부분적인 성공을 가져왔으나 다른 한편으로는 한계도 있었다. 즉, 점차 적분법의 사용은 해석결과와의 개선이외에 계산시간의 감소라는 부수적인 이점을 가져야 주었지만 완전한 해결책은 아니었다. 즉, 8절점요소의 경우에는 감차적분법의 사용에도 불구하고 locking 현상을 완전히 제거하지 못하였고[15], 또한 이방법의 사용은 강성행렬계수(rank of stiffness matrix)의 감소를 초래하여 해석결과를 무용화 시킬 수 있는 전달가능한

거짓영에너지 모드(commutable spurious zero energy mode)의 발생이란 문제점을 발생시킬수도 있다 [16]. 가정된 변형도 대체 사용방법은 전단변형도와 면내변형도를 새로이 가정함으로써 이의 개선책으로 사용하였으나, 전단변형도에 대해서는 좋은 결과를 준 반면 막변형도에의 응용은 그 효과면과 적용성에서 다소의 문제점을 내포하고 있다.

본 연구의 개선된 degenerated 쉘 요소는 shear locking 현상을 제거 하기 위해 가장 효과적인 가정된 전단변형도장(shear strain fields)를 사용하고, 막변형도에 감차적분기법을 사용함으로써 membrane locking 현상을 제거하며, 쉘요소 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다. 과거에는 이러한 기법들이 단독으로 사용되거나[7,11,14], 평판휨요소에서 감차적분과 비적합변위모드의 혼합사용되어[18,19] 성공한바 있으나, 세 기법을 함께 사용하여 쉘요소에 적용하는 것은 본 연구에서 처음 시도되는 것이다. 그러므로 본 연구에서 제안된 요소는 shear 또는 membrane locking 현상이 완전히 제거되며, 전달가능한 거짓영에너지 모드도 발생하지 않으며 수렴성이 양호하게 된다.

2. Degenerated 쉘유한요소

본 연구의 곡면 쉘요소의 정형화는 어떠한 특별한 쉘이론에 구애됨이 없이 다음과 같은 기본

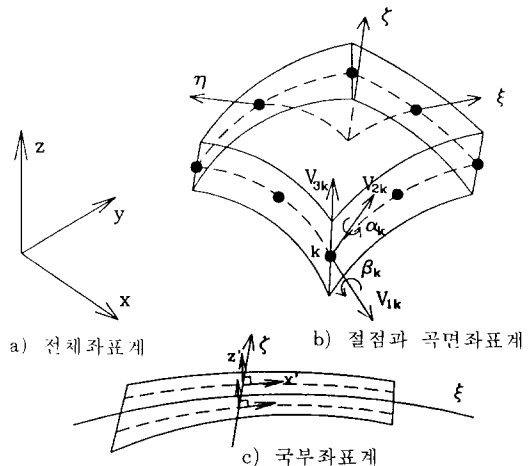


그림 1. degenerated 쉘요소에서의 좌표계

적인 가정만을 바탕으로 한다. 첫째는 변형전에 중립곡면에 수직인 직선은 변형후에도 직선을 유지한다. 둘째는 중립면에 수직인 응력성분은 없다고 가정한다. Degenerated 쉘요소에서 각각의 절점에서는 3개의 이동변위(u, v, w)와 2개의 회전변위(α, β)를 갖는다. 이동변위와 회전변위는 각각 독립적으로 가정하기 때문에 전단변형이 허용된다. 이와같은 접근방법을 평판으로 단순화시킬 경우 Reisser-Mindlin 평판이론[17]과 일치하게 된다.

2.1 쉘요소의 형상화

Degenerated 쉘요소의 정형화에는 그림1과 같이 전체좌표계, 절점좌표계, 곡면좌표계 및 국부직교좌표계등이 함께 사용된다.

쉘의 기하학적 형상은 중립면의 절점좌표와 중립면에 수직인 벡터들을 사용하여 표시할 수 있고 요소 내부의 임의의 점에서의 좌표는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}_{mkt} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \rho \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k}^x \\ \bar{v}_{3k}^y \\ \bar{v}_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 n 은 절점수이며 $N_k(\xi, \eta)$ 는 중립면의 형상함수, h_k 는 k 절점의 쉘두께이며, ξ, η, ρ 는 고려하는 점의 곡면좌표이며, $v_{3i} = x_{top} - x_{bot}$ 으로 정의되며, \bar{v}_{3i} 는 v_{3i} 의 단위벡터이다. 또한 요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서 전체좌표계 방향의 변위자유도(u, v, w)와 쉘의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도(α, β)등 모두 5개의 절점자유도로써 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}_{mkt} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \rho \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{1k}^x & -\bar{v}_{2k}^x \\ \bar{v}_{1k}^y & -\bar{v}_{2k}^y \\ \bar{v}_{1k}^z & -\bar{v}_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2 유한 요소 방정식

쉘의 두께방향(z' 방향)으로 응력이 0이라는 기본적인 가정을 수용하기 위해서는 변형도항을 국부좌표계로 표현하는 것이 편리하며, 일반적으로 쉘의 해석과 설계를 위해서는 국부좌표계에 의한 응력의 표현이 유용하다. 국부좌표계에 의한 응력의 표현이 유용하다. 국부좌표계에 의한 변형도 ϵ' 는 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{,x'} \\ v'_{,y'} \\ u'_{,x'} + v'_{,y'} \\ u'_{,z'} + w'_{,x'} \\ v'_{,z'} + w'_{,y'} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Degenerated 쉘요소에서 변형도행렬 B 는 국부좌표계에 의해 정의된 변형도 ϵ'_s 와 전체좌표계의 절점변수 u 의 관계이다. 즉

$$\epsilon' = B u \quad (4)$$

(4)식을 평면내변형도(in-plane strain) ϵ'_i 와 전단변형도(shear strain) ϵ'_s 로 나누어 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_i \\ \epsilon'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i \\ B_s \end{bmatrix} u \quad (5)$$

여기서,

$$\epsilon'_i = [\epsilon_{x'} \ \epsilon_{y'} \ \gamma_{x'y'}]^T, \quad \epsilon'_s = [\gamma_{x'z'} \ \gamma_{y'z'}]^T \quad (6)$$

또한 평면내변형도는 막(membrane)과 굽힘(bending)의 영향이 함께 포함되어 있다. 중립면에 수직인 방향에 대한 응력성분은 없으므로 5개의 응력, 변형도 관계는 다음과 같이 평면내와 전단항으로 나눌수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma'_i \\ \sigma'_{s'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_i \\ \epsilon'_s \end{bmatrix} \quad (7)$$

국부좌표계에서 쉘요소의 총위치 에너지(total potential energy)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int \epsilon'^T D \epsilon' dV - W \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \left[\int \mathbf{B}'^T D \mathbf{B}' dV \right] \mathbf{u} - W \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \left[\int \mathbf{B}'^T D_s \mathbf{B}' dV \right] \mathbf{u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \left[\int \mathbf{B}'_s^T D_s \mathbf{B}'_s dV \right] \mathbf{u} - W \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 D_f 는 면내탄성행렬이고 D_s 는 전단탄성행렬이며 W 는 작용하중에 의한 에너지이다.

총위치에너지를 절점변위에 대해 최소화하면 다음과같은 행렬형태의 유한요소 방정식을 얻을수 있다.

$$K_{ij} u_j = f_i \quad (9)$$

K_{ij} 는 다시 면내에너지 부분과 전단에너지 부분으로 다음과같이 나눌수 있다.(여기서도 평면내 에너지 부분은 막과 굽힘 효과가 함께 포함된 부분이다.)

$$K_{ff} = \int \mathbf{B}_{ff}^T D_f \mathbf{B}_{ff} dV \quad (10)$$

$$K_{ss} = \int \mathbf{B}_{ss}^T D_s \mathbf{B}_{ss} dV \quad (11)$$

3. 감차 적분방법

요소의 강성행렬 계산시 감차적분의 사용은 과도한 전단 및 막에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다 준다[7]. 2차요소(quadratic element)의 정상적분점인 $\xi = \sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단및 막변형도는 과도한반면에 감차적분점인 $\xi = \sqrt{1/3}$ 에서는 올바른 전단및 막변형도의 평가가 가능하다. 따라서 휨거동에 영향을 미치지않고 미소한 막변형도와 전단변형도를 나타낼수 없기때문에 발생하는 shear와 membrane locking 현상을 감차적분방법의 사용으로 일부 해결하였다[5].

이와같은 감차적분의 사용은 요소의 정확도를 증가시키면서 강성행렬의 계산시간을 감소시키는 두가지 효과를 가져다준다. 그러나 감차적분방법의 사용은 또다른 문제를 발생시킨다. 8절점요소의 경우에는 감차적분방법의 사용에도 불구하고 shear locking 현상이 존재하고, 4절점요소와 9절점요소에서는 감차적분으로 인해 전달가능한 거짓 영에너지모드가 발생되어 해석결과를 무용화시킬 위험성을 초래한다[16].

따라서 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 억제하기위해 일률적인 감차적분 대신에 선택적으로 감차적분을 행하는 방법도 제안되었다[8]. 또다른 방법으로서 감차적분을 행함으로써 발생하는 전달가능한 거짓 영에너지모드를 안정화시키는 방법이 있다[9]. 이 방법은 전체 강성행렬에 대해 감차적분을 행하고 이것에 거짓 영에너지모드를 억제시키는 행렬을 더함으로써 강성행렬에 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 배제시키는 것이다.

4. 비적합 변위형의 추가

일반 등매개변수 요소가 부정확한 값을 주는 가장 큰원인 중의 하나가 요소내에서 단순한 응력 분포를 제대로 나타내지 못하기 때문이다. Wilson등[13]은 2차원 문제에서 비적합변위형(nonconforming displacement mode)을 추가 함으로써 요소내에서 발생하는 과도한 변형에너지를 제거하였고, 요소의 억제된 거동을 유연하게 하였다.

Choi와 Schnobrich[14]는 이 개념을 등매개변수 쉘요소에 적용하여 원래의 요소의 거동을 개선하였으며, 8절점요소에 추가 적용가능한 다음과 같은 비적합변위 형상함수를 제안하였다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \eta\xi(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \eta\xi(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (12)$$

비적합 변위형의 추가는 원래의 요소의 거동을 개선 시키지만 필연적으로 추가적인 계산시간을 요하게 되 요소의 거동을 크게 저하 시키지않는

범위 내에서 비적합 변위형의 추가를 최소화 하는 것이 바람직하다. 추가된 회전변위(α, β)는 추가된 평면내의 이동변위(u, v, w)에 의해 대략적으로 나타낼수 있으므로 본 요소에서는 회전변위에는 비적합 변위형을 추가 하지 않는다. 위의 비적합 변위형을 원래의 변위장에 추가하여 요소의 변위장을 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$U = \sum N_i u_i + \sum \bar{N}_i \bar{u}_i \quad (13)$$

여기서 $u = [u, v, w, \alpha, \beta]$, $\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, 0, 0]$ 이다.

위의 식에서 \bar{u} 는 실제적인 변위이기 보다는 추가된 비적합 변위형의 크기로 생각할 수 있고, 이 추가된 \bar{u} 는 역시 요소의 변형에너지를 최소화함으로써 구할수 있다. 추가된 비적합변위형에 대응하는 하중항이 없다고 생각할 수 있으므로 비적합변위형의 추가로 원래의 평형관계식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

비적합 변위형의 추가로 확장된 강성행렬에 정적응축(static condensation) 기법을 적용하면 원래와 같은 행렬의 차수로 줄어들게 된다.

$$K'u = F_1 \quad (15)$$

여기서

$$K' = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \quad (16)$$

5. 가정된 전단 변형도장

본 연구에서는 degenerated 쉘요소에서 발생하는 shear locking 현상을 가정된 전단변형도장(shear strain fields)으로 대치 사용함으로써 극복한다. Shear locking 현상을 제거하기 위해서는 얇은 쉘에서 전단변형도 $\gamma_{\xi\xi}$ 와 $\gamma_{\eta\eta}$ 는 영에 가까워져야 한다. 이와 같은 기법의 사용은 4절점요소에서 Bathe와 Dvorkin [10]이 처음 사용했고, 고차 절점요소에서

Huang와 Hinton[11]이 사용하였다. 본 연구에서는 shear locking 현상을 제거하기 위해 Huang와 Hinton 이 제시한 방법을 수정하여 사용한다.

가정된 전단변형도 대치 방법은 각각의 요소내의 임의의 위치에서 전단변형도 값을 새로 가정된 전단변형도장의 값으로 보간시킴으로서 shear locking 현상을 제거하는 방법이다. $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\eta}$ 을 변위장으로부터 구한 전단변형도 $\gamma_{\xi\xi}$ 와 $\gamma_{\eta\eta}$ 을 대치하는 새로운 전단변형도라 가정하면 총위치에너지는 다음과 같은 구속된 범함수로 수정 표현이 가능하다.

$$\bar{\Pi} = \Pi + \int \lambda^{23} (\tilde{\gamma}_{\xi\xi} - \gamma_{\xi\xi}) dV + \int \lambda^{33} (\tilde{\gamma}_{\eta\eta} - \gamma_{\eta\eta}) dV \quad (17)$$

여기서 λ^{23} 와 λ^{33} 는 Lagrangian 승수(multiplier)로서 각각 독립된 함수이다.

비적합변위형중 \bar{N}_5 모드 즉 bubble mode가 이동변위에 추가된 상태를 본 degenerated 쉘요소의 기본형으로 생각한다면 곡면좌표계에서 이동변위 자유도 w 의 미분치와 회전변위 자유도 α, β 는 다음과 같이 다항식의 항으로 이루어진다.

$$\alpha = \alpha [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2\eta, \eta^2, \xi\eta^2] \quad (18a)$$

$$\beta = \beta [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2\eta, \eta^2, \xi\eta^2] \quad (18b)$$

$$w, \epsilon = w, \epsilon [1, \xi, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta^2] \quad (18c)$$

$$w, \eta = w, \eta [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2\eta] \quad (18d)$$

전단변형도의 대치방법을 평판의 경우에 대해 설명하기 위해 먼저 평판에서 전단변형도를 다음과 같이 표현한다.

$$\epsilon_s = \begin{bmatrix} \gamma_{\xi\xi} \\ \gamma_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + w, \xi \\ \beta + w, \eta \end{bmatrix} \quad (19)$$

따라서 가정된 전단변형도 $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\eta}$ 는 적어도 다음과 같은 다항식을 이루어야 한다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 \quad (20a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\eta} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + a_6\xi^2\eta \quad (20b)$$

위의 가정된 전단변형도 다항식의 미지항을 구하기 위해 6개의 요소내의 적분 선택점이 필요하게 된다. $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\eta}$ 의 적분 선택점은 그림2와 같이

각각 상이하고, 다음과같이 보간된다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P_i(\eta) Q_j(\xi) \gamma_{\xi\xi}^i \quad (21a)$$

$$\tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \gamma_{\eta\xi}^i \quad (21b)$$

여기서

$$P_1(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} + 1 \right) \quad P_2(x) = 1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \quad P_3(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} - 1 \right)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \quad Q_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \quad (22)$$

$a = 1/\sqrt{3}$, $b = 1$ 이며 적분 선택점 위치는 그림2와 같다.

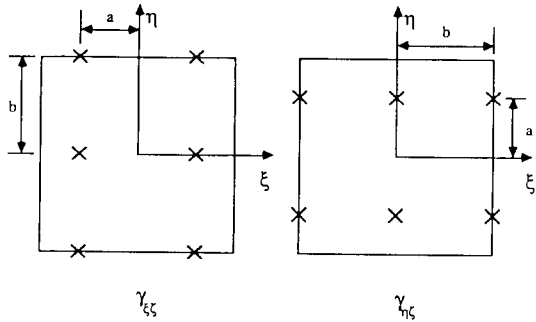


그림 2. 전단변형도의 선택점

6. 개선된 degenerated 셀유한요소

앞에서 언급한 것처럼 감차적분방법, 비적합변위형의 추가 및 가정된 전단변형도의 대치사용 방법 등은 각각 요소의 거동을 개선시킨다는 점과 그 한계는 잘 알려져 있다 [7, 11, 14]. 본 연구에서는 각각의 한계를 배제하고, 각각의 장점을 보완 결합한 개선된 degenerated 셀요소를 구성한다. 먼저 Choi [18]는 위의 방법 중 감차적분과 비적합 변위형의 추가를 평판요소 (plate element) 에 처음으로 결합 사용하여 평판해석에서 많은 효과를 보았으며 Choi와 Kim [19]은 이와같은 방법으로 평판 휩요소를 계속 개선시켜왔다. 그러나 이와같은 연구는 평판 휩요소의 경우에 상당한 개선을 가져왔으나 셀 요소에의 적용은 상당히 미약하였다. 본 연구의 개선된 degenerated 셀 요소의 기본 착상은 shear locking 해결에 우수한 결과를 보인 가정된

전단 변형도를 대치 사용하고, membrane locking 현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 셀 요소 자체의 거동을 보완하기 위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하는 기법들 서로 보완적으로 사용하는 것이다.

표 1. 수치적분방법

| ELEMENT | STIFFNESS | $\bar{N}_1 - \bar{N}_6$ | \bar{N}_5 | | | $\bar{N}_1 - \bar{N}_2$ | | | $\bar{N}_3 - \bar{N}_4$ | | |
|---------|------------------|--------------------------|-------------|-----------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|
| | | u, v, w, α, β | \bar{u} | \bar{v} | \bar{w} | \bar{u} | \bar{v} | \bar{w} | \bar{u} | \bar{v} | \bar{w} |
| QSR | IN PLANE | 2x2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | TRANSVERSE SHEAR | 2x2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| Type I | IN PLANE | 2x2 | 2x2 | 2x2 | 2x2 | 3x3 | | | | | 3x3 |
| | TRANSVERSE SHEAR | 2x3/3x2 | 3x3 | 3x3 | 2x3/3x2 | 3x3 | | | | | 3x3 |
| Type II | IN PLANE | 2x2 | 2x2 | 2x2 | 2x2 | 3x3 | | | | | - |
| | TRANSVERSE SHEAR | 2x3/3x2 | 3x3 | 3x3 | 2x3/3x2 | 3x3 | | | | | - |

위에서 언급한 여러 기법의 효과적인 결합을 위하여 전체 요소의 강성을 평면내 부분과 전단 부분으로 우선 나눈다. 평면내 부분에는 막과 굽힘의 효과가 포함되어 있음은 물론이다. 전단 변형도의 수치 적분시 shear locking 현상을 피하기 위해 선택된 위치에서 2x3 / 3x2 적분을 행하고, 평면내 부분은 감차적분 (2x2) 을 행하며, 모든 부분에 대해 비적합 변위형을 선택적으로 추가한다 (표 1).

본 연구의 개선된 degenerated 셀 유한 요소의 정형화에서 변형도와 변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

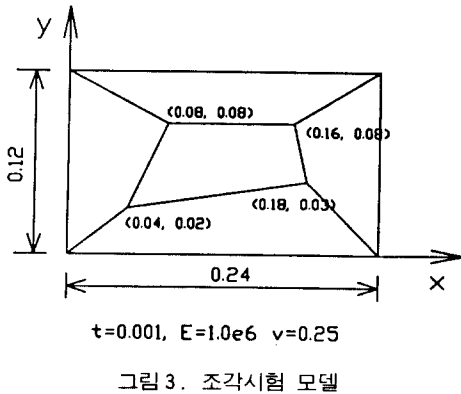
$$\{\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \sum \begin{Bmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_{xy} \end{Bmatrix} u + \sum \begin{Bmatrix} \bar{B}'_x \\ \bar{B}'_y \\ \bar{B}'_{xy} \end{Bmatrix} \bar{u} \quad (23)$$

여기서 $u = [u, v, w, \alpha, \beta]$, $\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, 0, 0]$. B'_x 는 평면내 변형도와 변위 관계 행렬이며, \bar{B}'_x 는 가정된 전단 변형도와 변위 관계 행렬이며, \bar{B}'_y , \bar{B}'_{xy} 는 추가된 비적합 변위형의 변형도와 변위 관계형이다.

개선된 degenerated 셀 요소는 비적합 모드의 추가 형식에 따라 2가지로 구분하였다. 즉 이동 변위 (u, v, w) 에 5개의 비적합 변위형 ($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$) 을 모두 추가하는 Type I 과 이동 변위에 3개의 비적합 변위형 ($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$) 만을 추가하는 선택적으로 Type II 로 구분하였다.

7. 수치 해석

본 연구에서 제시한 개선된 degenerated 쉘요소의 거동을 검증하기 위해 여러 예제시험을 하였다. 비교를 위하여 8절점 등매개요소를 감차적분한 경우를 QSR로 표시하고 본 연구에서 제시한 요소는 비적합변위형의 추가 형태에 따라 Type I 과 Type II로 구분한다.



조각시험(patch test)

본 조각시험은 MacNeal과 Harder[20]가 제시한 방법을 따라 수행하였다. 이 방법을 그림3와 같이 임의의 짜그려진 내부 요소를 갖는 요소망에 일정한 변형도(constant membrane strain)과 일정한 휨곡률(constant bending curvature)을 표현하는 변위경계조건을 가지는 경우에 대해 해석하였다. 본 연구에서 제시한 쉘요소들은 이 경계조건에 부합하는 일정한 막변형도와 일정한 휨곡률을 나타내 주고있다. 그러나 QSR는 일정한 휨곡률 시험에 통과하지 못했다.

표2. 조각시험(patch test) 결과

| CASE | QSR | Type I | Type II |
|----------------------------|------|--------|---------|
| Constant Membrane Strain | Pass | Pass | Pass |
| Constant Bending Curvature | Fail | Pass | Pass |

요소강성행렬의 고유치해석

본 연구의 개선된 degenerated 쉘요소의 강성행렬의 고유치해석을 행한 결과 7개의 영고유치값이 발생하였다. 이중 6개는 요소의 강체운동(rigid body motion)을 나타내고, 나머지 한개는 그림4에서 보는바와 같은 요소가 2개이상 결합하는 경우 양립(compatible)될수 없는 모드를 의미한다. 그러므로 본 요소는 요소수가 2개 이상 결합시 전달가능한 거짓영에너지모드는 발생하지 않는다.

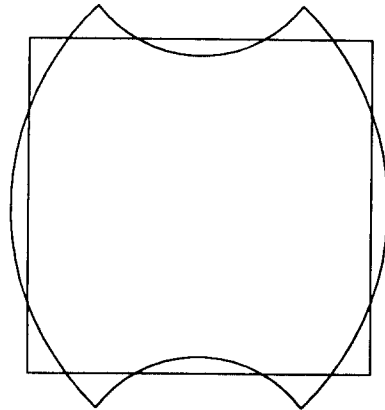
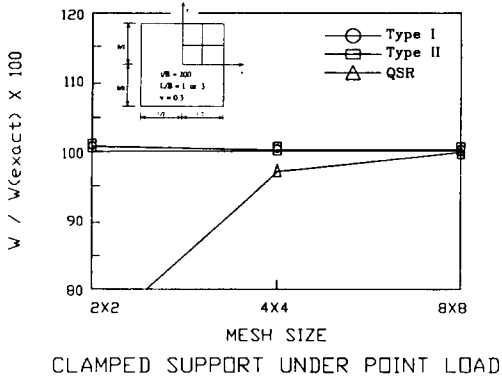


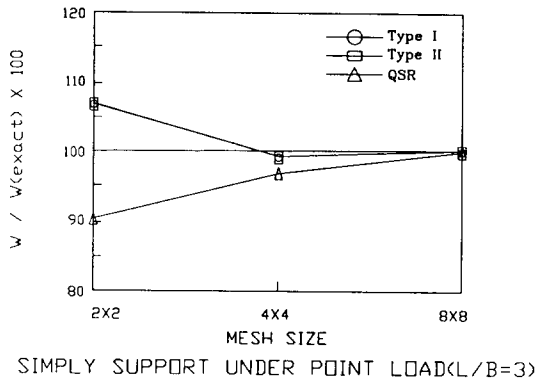
그림 4. 전달불가능한 변형모드

단순지지 평판과 고정지지된 평판

길이대 폭의 비(L/B)가 각각 1, 3인 단순지지(simply supported)와 고정지지(clamped)된 직사각형 평판이 집중하중과 등분포하중을 받는 경우에 대해 요소수의 변화에 따른 수렴성을 조사하였다. 본문제는 대칭성에 의해 평판의 1/4만 모델링하였다. 그림5에서 보는바와 같이 요소수가 증가함에 따라 빨리수렴함을 볼 수 있다. 또한 shear locking 현상을 조사하기 위해 등분포 하중을 받는 단순지지와 고정지지된 평판의 길이대 두께 비(L/h)를 1×10²에서 1×10⁶까지 변화 시켜가며 해석 하였다. 그림6에서 보는바와 같이 L/h의 비가 1×10⁶에서도 거의 shear locking 현상이 발생 하지 않는다.

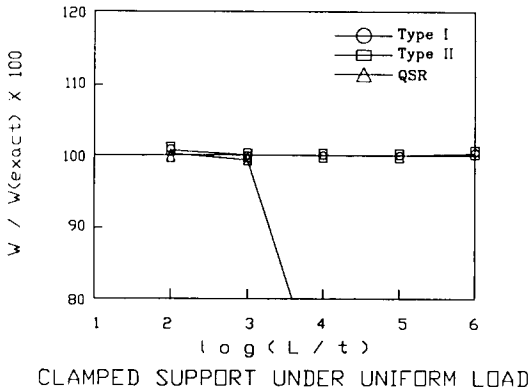


CLAMPED SUPPORT UNDER POINT LOAD



SIMPLY SUPPORT UNDER POINT LOAD(L/B=3)

그림 5. 직사각형 평판과 해석결과



CLAMPED SUPPORT UNDER UNIFORM LOAD

그림 6. locking현상 시험결과

비틀린 캔틸레버(twisted cantilever)

그림7는 평면내 하중과 평면의 하중이 작용하는 비틀린 캔틸레버로써 와핑 찌그러짐(warping distortion)문제이다. 본 요소는 와핑 찌그러짐 문제에서도 양호한 해를 보여줌을 표3에서 볼 수 있다.

기존의 곡면 셸요소중에는 본예제를 만족 시키지 못하는 경우도 있다[9]. 본 비틀린 캔틸레버에서 두께가 0.0032의 경우에 membrane locking 현상이 심하게 발생하는 예제이다. 즉 표3에서 보는바와 같이 막변형도부분에 감차적분을 행하지않은 요소에서는 매우 심한 membrane locking 현상이 발

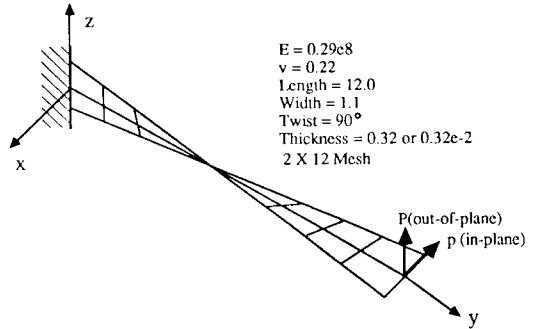


그림 7. 면내하중과 면외하중을 받는 비틀린보

표3. 비틀린보의 변위 결과치 (normalized results)

| Formulation | Element | In-Plane | Out-of-Plane |
|-------------------------------------|----------|-------------------------|-------------------------|
| Degenerated Shell* | 9-Node R | 1.01 | 1.00 |
| | 9-Node S | 0.02 | 0.03 |
| | 9-Node N | 0.01 | 0.01 |
| Resultant Stress Degenerated Shell* | 9-Node R | 1.39 | 1.72 |
| This study | Type I | 1.00 | 1.00 |
| | Type II | 0.99 | 1.00 |
| Beam Theory (실제변위값) | | 0.5256×10^{-4} | 0.1294×10^{-4} |

* Ref. T.Belytschko et al.(1989); 3x13 Mesh
 R Reduced integration (2x2)
 N Normal integration (3x3)
 S Selective integration(in-plane(3x3),shear(2x2))

생했다. 그러나 본 요소에서는 membrane locking 현상이 발생하지 않음을 볼 수 있다.

굽은 캔틸레버(curved cantilever)

본 문제는 Robinson[21]이 셸요소를 평가하기 위해 제시한 문제중의 하나이다. 그림8에서 보는 바와 같이 90° 굽은 캔틸레버의 경우에 대해 요소를 2,3,4,5개를 사용하여 해석하였다. 하중이 작용하는 캔틸레버 끝단에서의 y, z방향변위와 x

방향에 대한 회전값은 표4와 같다. 해석해[22]에 대해 일정하게 수렴함을 볼 수 있다.

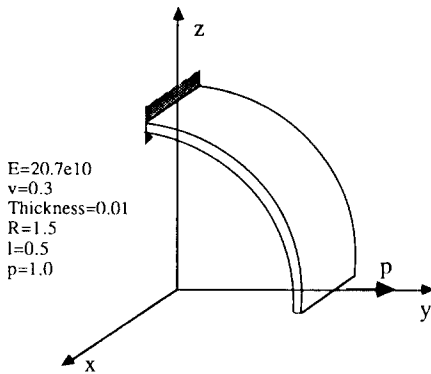


그림 8. 반경방향으로 하중을 받는 곡면보

표4. 굵은보의 수치해석결과 (%)

| Case | No. of element | Y-displ. | Z-displ. | BETA-rot. |
|------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| QSR | 2 | 91.84 | 91.89 | 93.17 |
| | 3 | 93.81 | 93.01 | 95.16 |
| | 4 | 95.85 | 94.72 | 97.05 |
| | 5 | 97.06 | 95.99 | 97.85 |
| Type I | 2 | 97.88 | 94.67 | 100.99 |
| | 3 | 97.61 | 97.70 | 99.84 |
| | 4 | 98.15 | 97.68 | 99.56 |
| | 5 | 98.59 | 98.28 | 99.44 |
| Type II | 2 | 92.67 | 89.30 | 94.94 |
| | 3 | 93.66 | 92.32 | 96.06 |
| | 4 | 95.49 | 94.45 | 97.41 |
| | 5 | 96.79 | 95.88 | 98.07 |
| Analytical(실제변위) | | 3.07×10^{-4} | 1.95×10^{-4} | 2.61×10^{-4} |

반구체 쉘(hemispherical shell)

반구체 쉘이 그림9와 같은 하중을 받는 경우에 대해 해석 하였다. 해석에 사용된 반구체쉘의 형상과 재료특성 등은 그림9에 표시한바와 같다. 반구체가 2중대칭 구조임으로 1/4단 모델링 하였다. 하중작용 절점의 변위가 요소수의 증가에 따라 점차 수렴함을 볼 수 있다. 해석결과를 Mac-Neal과 Harder[20]의 해와 비교하였다. 그림9에서 보는바와 같이 Type I 이 매우 수렴성을 보인다

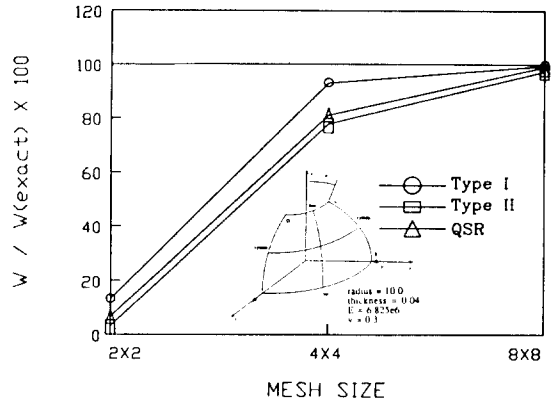


그림 9. 반구체 쉘과 해석결과

원통형 지붕쉘(cylindrical roof shell)

양단이 격판(diaphragm)으로 지지되고 다른 두 면은 자유인 원통형지붕 쉘에 자중만이 작용하는 경우에 대해 해석하였다. 해석에 사용된 원통형 지붕쉘의 형상과 재료특성은 그림10에 표시한바와 같다. 이 지붕쉘의 경우 정확해지는 쉘이론에 따라 다소 차이를 보인다. 즉 깊은쉘이론(deep shell

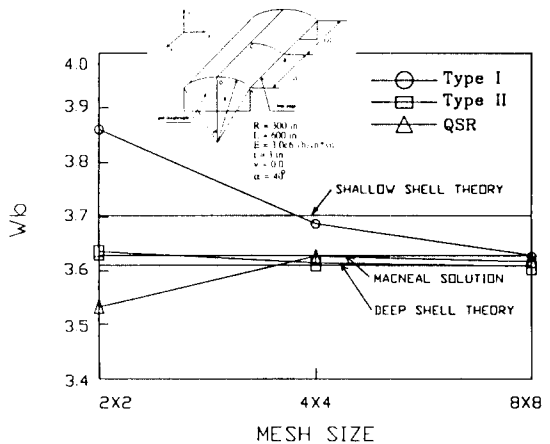


그림10. 지붕 쉘과 해석결과

theory)에 의해 구한 해는 얇은쉘이론(shallow shell theory)에 의한 해보다 약 3%정도 작은 값을 준다 [11,20]. 본 연구에서 제시한 쉘요소에서의 해석 결과는 그림10에 도식화하여 정확해와 비교하였다.

집중하중을 받는 원통형 쉘(pinched cylinder)

그림11에 나타난바와 같이 집중하중을 받는 원통형 쉘구조를 해석하였다. 원통형 쉘의 반경대 두께의 (R/t)가 100, 300, 500로 변하며, 양단의 지지형태는 고정(fixed)된 경우와 격판(diaphragm)으로 지지된 경우이다. 대칭성에 의해 1/8만 모델링 하였다. 해석된 결과는 그림11에 나타난바와

같이 Rhu와 Lee[23]의 결과와 비교하였는바 매우 우수하다.

7. 결 론

본 연구의 개선된 degenerated 쉘 유한요소는 shear locking 현상을 제거 하기 위해 가장 효과적인 가정된 전단변형도장을 대치 사용하고, 막변형도에 감차적분기법을 사용함으로써 membrane locking 현상을 제거하며, 쉘요소 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다. 이들 세 기법의 상호보완적인 혼합사용은 본 연구에서 처음 시도된바이다.

본 연구의 개선된 degenerated 쉘유한요소의 수치 해석 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

첫째로, 가정된 변형도장의 대치 사용, 감차적분과 비적합변위형위 추가 등의 장점을 상호 보완적으로 혼합사용한 본 개선된 degenerated 쉘요소는 우수한 수렴성을 보여준다. 둘째로, 본 요소는 조각시험을 통과 하며, 2개 이상의 요소 결합시 전달가능한 거짓영에너지모드가 발생 하지 않는다. 셋째로, 본 요소는 기존 degenerated 쉘요소 계열에서 가장큰 문제점인 shear locking과 membrane locking 문제를 완전히 제거할 수 있다.

참고문헌

1. O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.
2. T.J.R.Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
3. D.G.Ashwell and R.H.Gallagher(Eds), *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, John Wiley · Sons, 1976.
4. S.Ahmad, B.M.Irons and O.C.Zienkiewicz, Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 419-451 (1970).
5. H.Stolarski and T.Belytschko, Membrane locking and reduced integration for curved elements, *J. Appl. Mech.*, 104, 172-176(1982).

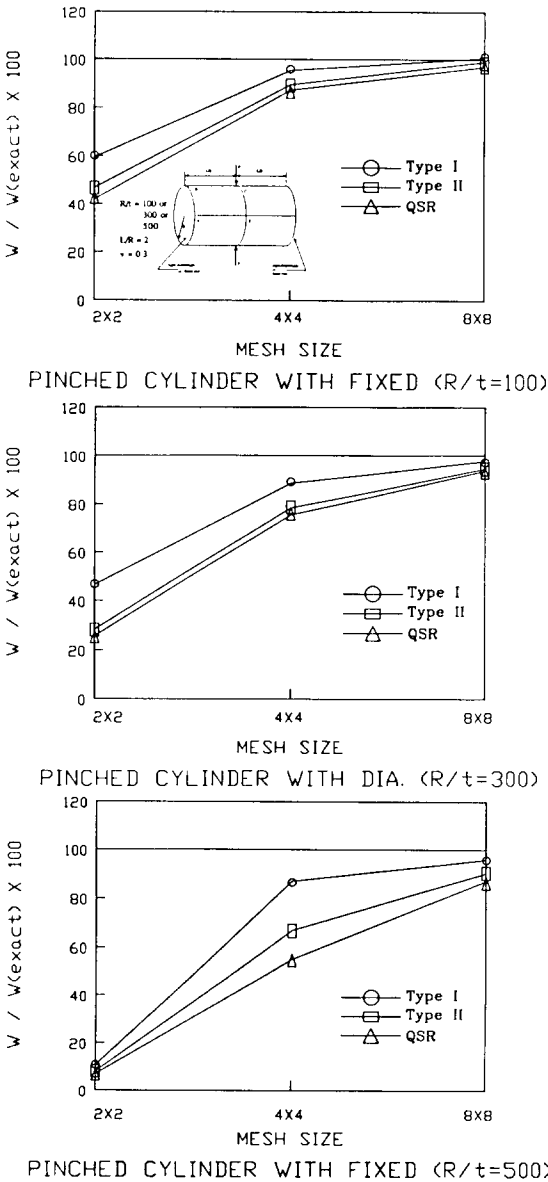


그림11. 원통형 쉘과 해석결과

6. H. Stolarski and T. Belytschko, Shear and membrane locking in curved C(O) elements, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 41, 279-296(1983).
7. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 275-290(1971).
8. T. J. R. Hughes, M. Cohen and M. Haron, Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates, *Nuclear Eng. Desgn.*, 46, 203-222(1978).
9. T. Belytschko, B. L. Wong and H. Stolarski, Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrangian shell elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 385-414(1989).
10. E. N. Dvorkin and K. J. Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, *Engineering Computation*, 1, 77-88(1984).
11. H. C. Huang and E. Hinton, A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22, 73-92(1986).
12. G. Dhatt, L. Macotte and Y. Matle, A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23, 453-470(1986).
13. E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi, Incompatible displacement models, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. T. Fenyves et al, (Eds), Academic Press, 1973.
14. C. K. Choi and W. C. Schnobrich, Use of nonconforming modes in finite element analysis of shells, *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 101, 447-464(1975).
15. E. D. L. Pugh, E. Hinton and O. C. Zienkiewicz, A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12, 1059-1079(1978).
16. N. Bicanic and E. Hinton, Spurious modes in two dimensional isoparametric elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, 1545-1557(1979).
17. R. D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38(1951).
18. C. K. Choi, Reduced integrated nonconforming plate element, *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, 112, 370-385(1986).
19. C. K. Choi and S. H. Kim, Coupled use of reduced integration and nonconforming modes in quadratic Mindlin element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 1909-1928(1989).
20. R. H. MacNeal and R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements Anal. Des.*, 1, 3-20(1985).
21. J. H. Robinson, New user project : cantilever curved beam problem for evaluating shell elements, *Finite Element News*, 2, (1987).
22. H. C. Huang, Elastic and elastic-plastic analysis of shell structures using the assumed strain elements, *Computers and Structures*, 33, 327-335(1989).
23. J. J. Rhiu and S. W. Lee, A sixteen node shell element with a matrix stabilization scheme, *Computational Mechanics*, 3, 99-113(1988).

(접수일자 : 1990. 2. 27)