

# 최적구조물 설계를 위한 RQP 알고리즘의 매개변수 성능평가

## An Investigation on Parameters of a RQP Algorithm for Optimum Structural Design

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 임     | 오     | 강*    |
| Lim,  | O     | Kaung |
| 이     | 병     | 우**   |
| Lee,  | Byung | Woo   |
| 변     | 준     | 석***  |
| Byun, | Jun   | Seok  |

### 요 약

주로 경험에 의존하여 최선의 상태를 구하는 설계방식에 반하여 수학적인 해석방법을 사용하여 체계적으로 최상의 결과를 얻고자하는 것이 최적설계이다. 이때 상태의 해석방법 뿐아니라 비선형의 설계함수의 최적화에 관한 기법 연구가 요구된다.

해석적인 비선형 최적화의 기법중 공학설계에 사용할 수 있는 수렴속도가 빠르며, 사용하기에 편리하다고 알려진 반복 이차 계획법(Recursive Quadratic Programming Method)의 매개변수들의 역할을 살펴보고 이들의 변화에 따른 수치성능을 비교 분석하여 계산효율이 개선된 수치적 알고리즘을 제시하였다.

설계함수들의 일차 미분정보를 이용한 근사 이차 미분정보에 의하여 최적해의 접근 속도가 빠른 RQP 알고리즘의 평가를 위하여 구조물의 무게를 최소화하면서 유한요소의 응력, 변위, 최소고유진동수등의 제한조건을 만족하는 주어진 형상의 최적단면을 가지는 구조물도 설계하였다.

### Abstract

Many structural optimization problems are solved by numerical algorithms since these are complicated and nonlinear. To provide a wider base and popularit to structural design optimization, reliable, accurate and superlinearly convergent nonlinear programming algorithm with active-set strategy have been developed. One of these is RQP(recursive quadratic programming method). This algorithm has several parameters and its performance is influenced by variations of these key parameters. Therefore, an RQP algorithm is selected to enhance its numerical performances by choosing proper parameners. The paper persents these influences on its numerical performance.

For comparison of performances, a structural design software for minimum weight of truss subjected to displacement, stress, and lower and upper bounds on design variables is also implemented.

\* 정회원, 부산대학교 공과대학 기계공학과 조교수  
 \*\* 부산대학교 기계공학과 박사과정  
 \*\*\* 현대자동차, 부산대학교 기계공학과 석사과정졸업

이 논문에 대한 토론을 1990년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1991년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서론

반복과정으로 최상의 구조물을 설계할때 체계적으로 접근하려면 구조물의 해석은 물론 효과적으로 최적화기법의 개발이 필요하다. 최적구조물의 설계는 물리적 지배식뿐 아니라 공학의 여러 제약조건 하에서 기준을 가장 만족하는 형태가 된다. 이런 제한조건이 있는 비선형 최적화문제(Nonlinear Constrained Optimization)의 해법에는 무제한조건의 최적문제로 변화시켜서 답을 구하는 변화법(Transformation Method)와 선형으로 바꾼 문제를 반복 해석하여 최적해를 구하는 기본법(Primal Method)로 분류할 수 있다[1]. 실제 공학에 사용된 경우도 변화법인 장애함수를 도입하여 해결하기도 하며[2], 기본법에 속하는 경사법을 이용하기도 하였다.[3]

그러나 무제한조건의 최적화 문제로 변환시키기 위한 장애함수(Penalty function)의 선정과 설계변수에 대한 민감도 해석(sensitivity Analysis)에 따라 수렴속도와 계산시간이 크게 달라지며, 경사법(Gradient Projection Method)에 있어서 설계변수의 변화량을 적절하게 결정하기 위하여서는 사용자의 많은 경험이 요구된다.

이러한 사용자의 경험에 크게 의존하지 않고 수렴속도가 빠른 반복 이차 계획법이 Wilson에 의하여 제안되었다[4]. 이 방법은 비선형의 목적함수와 제한조건식을 이차계획법(Quadratic Programming)으로 단순화시킨 문제의 해를 반복적으로 구하여 최적해를 구하는데 계산량이 많은 Hessian 행렬이 사용되어 실제 문제의 해결에는 도움이 되지 못 하였으나, 일차 미분값을 이용한 근사 Hessian 행렬을 도입한 Han[5] 과 Powell[6]에 의하여 실용화되었다. 그후 Schittkowski[7]에 의하여 더욱 개선되어 왔으나 모든 제한조건을 사용하여야 하는 점이 함축함수(Implicit function)로 표현되는 공학의 최적화문제의 적용에 단점으로 지적되었다 [1].

한편 1970년에 Pshenichny에 의하여 또다른 반복 이차 계획법이 개발되었다[8]. 선형화기법(A Linearization Method for Constrained Optimization)

으로 알려진 이방법은 활성화 제한조건식 기법(Active Set Strategy)을 사용하여 제한 범위의 조건식을 이용,하므로 설계변수가 많은 대규모 공학 문제에 효과적이기는 하나[9,10], 근사 해세 행렬을 사용하지 않으므로 수렴속도(Rate of convergence)가 낮다.

따라서 선형화기법의 수렴속도를 높이기 위하여 Han과 Powell이 사용한 근사 해세를 결합시킨 PLBA (Pshenichny-Lim-Belegundu-Arora) 알고리즘을 제안하여 수치적 효율을 향상시켰다[11]. 이것은 Han과 Powell 알고리즘의 우수한 수렴율을 갖게 하는 근사 해세 행렬을 Pshenichny의 장점인 활성화 집단 정책에 결합시켜 각단계에서의 계산량을 줄이면서 반복횟수도 줄여서 전체적인 수렴속도를 증가시킨 알고리즘이다. 이 알고리즘을 사용하여 최적구조물설계를 하였으며 다른 반복 이차 계획법과 비교하여 우수한 성능을 가짐을 입증하였다 [13]. 또한 이알고리즘을 기계적 진동의 최적화문제에도 적용하여 단위행렬이 아닌 해세 행렬을 가진 알고리즘이 진동 최적설계에 사용할 수 있음을 보여 주었다[14].

그러나 뉴턴 방법이 갖는 일반적인 특성중 최적치 부근에서의 수렴속도는 우수하나 제한 조건식의 위반량이 많고 목적함수의 최적치에서 멀리 떨어진 초기 설계변수에서의 근사 해세 행렬은 설계변수의 변화방향을 결정하는데 좋은 역할을 하지 못하는 경우가 있어서 이점에 대한 보완과 반복 이차 계획법의 근본 약점인 설계변수의 변화량을 결정하는 과정에 대하여 보다 수치적인 개선점이 요구된다. 이 수치적 개선을 위한 연구가 계속되어 왔으나 [15], 이들 연구에서의 수치 성능 비교는 초기 설계변수에 따라 달라지므로 본 연구에서는 PLBA 알고리즘의 매개변수들을 변화시키고 세가지의 초기 설계변수에 대한 결과에 종합하여 성능을 평가하였다.

## 2. 반복이차계획법

많은 최적 설계문제는 다음의 일반적인 비선형 계획법 문제로 정의할 수 있다.

**Problem P**

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(b) && (1) \\ &\text{Subject to} && g_i(b) = 0, i = 1, m' \\ &&& g_i(b) \leq 0, i = m' + 1, m \end{aligned}$$

여기서  $b \in R^n$ 은 설계변수 결정할 내용이며,  $f(b)$ 는 목적함수이고  $g_i(b)$ 는 제한조건식으로써 이들 함수는 연속이며 적어도 2차 미분이 가능하여야 한다. 뉴턴 또는 유사 뉴턴 방법을 비선형 최적화문제에 사용할 수 있게 한 반복 이차 계획법은 식(1)을 표준형의 이차 계획법으로 바꾸고 이를 거듭하여 풀기 때문에 반복 이차 계획법(Recursive Quadratic Programming Method), 또는 연속 이차 계획법(Successive QP Method)이라 하기도 하며 해세 행렬 혹은 메트릭을 사용하므로 제한된 변수 메트릭법(Constrained Variable Metric Method) 또는 투영 라그랑지안법(Projected Lagrangian Method)이라 불린다. 따라서 식(1)의 해는 초기해를 가정하고 보다 개선된 해를 반복적으로 구한다. 개선된 해는 직전 해를 기초로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b' = b + \alpha p \tag{2}$$

여기서  $p$ 는 현재의 해  $b$ 에서 개선이 가장 잘된다고 생각하는 방향벡터이고  $\alpha$ 는 정해진 방향에서 이동하고자 하는 변화량을 가르킨다. 그러므로 반복 이차 계획법에서는 변화방향벡터  $p$ 를 구하는 문제와 변화량  $\alpha$ 를 구하는 문제로 구분되며 보다 수렴률을 높이기 위하여 변화방향벡터의 계산에 사용되는 근사 해세 행렬의 과정이 필요하다. 이 방법중 근사 해세 행렬을 이용하여 수렴속도가 높으며 활성화 제한조건식만을 사용하여 매 반복횟수에서의 계산량이 비교적 적은 PLBA 알고리즘[16]의 방법을 생각하여 개선방안을 제시한다.

**2.1 이차계획법의 정의**

식(1)의 목적함수  $f(b)$ 와 제한조건식  $g(b)$ 을 이차항까지 전개하고, 비선형성을 감안하여 변화량을 제한하는 조건을 부가한 최적화문제의 쿤-터커(Kuhn-Tucker) 필요조건을 생각하면 다음의 이차 계획법부분제를 유도할 수 있다.

Kuhn-Tucker 필요조건을 생각하면 다음의 이차 계획법부분제를 유도할 수 있다.

**QP subproblem**

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \frac{1}{2} p^T W p + G^0 p && (3) \\ &\text{subject to} && G^i p + g_i \leq 0, i \in I_2 \end{aligned}$$

여기서  $W = \text{positive definite matrix}$  또는  $\text{metric}$   
 $G^0 = \nabla f^T(b)$  설계변수에 관한 목적함수의 미분

$G^i = \nabla g_i^T(b)$  설계변수에 관한 제한함수의 미분

$\delta = \text{양의 상수}$  활성화 제약 조건의 폭

$\epsilon(b) = \delta - F(b)$  활성화 제약 조건의 두께

$F(b) = \max\{0, |g_1(b)|, \dots, g_m(b), |g_{m+1}(b)|, \dots, g_m(b)\}$  최대위반량

$I_1 = \{i: |g_i(b)| + \epsilon(b) \geq 0, i = 1, m'\}$

등호 활성화 제약 집합

$I_2 = \{i: g_i(b) + \epsilon(b) \geq 0, i = 1, m' + 1, m\}$

부등호 활성화 제약 집합

이 부분제의 해는 설계변수의 변화방향  $p$ 를 주게 된다. 설계변수 변화방향벡터  $p$ 의  $\text{norm}(\|p\|)$ 이 0이되면 원래의 문제 식(1)의 쿤-터커 필요조건을 만족하는 것이 되므로 이것을 최적치에 대한 수렴 정도로 삼을 수 있다[1].

**2.2 변화량 결정**

설계변수 변화방향벡터(search direction vector)  $p$ 를 식(3)에서 결정하게 되면 그 방향으로 얼마나 변화시킬 것인가를 결정하는 변화량  $\alpha$ 를 구하는 것이 변화량 결정과정이다. 이 변화량이 결정되면 새로운 설계변수 값  $b'$ 는 식(2)로 된다.

이 변화량을 구하기 위하여서는 비교변화를 측정할 수 있는 기준이 있어야 하는데 이것을 기울기함수(descent function) 이라고 하며 목적함수와 최고위반량을 조합하여 목적함수와 위반량을 감소하게 하기 위하여 pshenichny는 다음식을 제한하였다[8].

$$\Phi(b) = f(b) + RF(b) \quad (4)$$

여기서  $R$ 은 위반매개변수(penalty parameter)로써 다음식을 만족하여야 한다.

$$R \geq r, r = \sum \mu_i, i \in I, I = I_1 \cup I_2 \quad (5)$$

$\mu_i$ 는 라그란지승수(Lagrange multiplier)로서 식(1)의 QP에서 얻어지는 원래의 선형화기법에서는 직전반복회에서 얻어진 값을 사용하고 있으나 큰  $R$ 값이 사용될 경우에는 위배조건을 감소시키는데 중점을 두게 되므로 가급적 적은 값을 택하기 위하여 현재의 반복회에서의 값을 사용하도록 수정한 것을 쓰고 있고, 식(5)의 조건에 따라  $R$ 을 줄일 수 있게 보완하였다[11].

실제로 식(4)의 최소치는 해석적으로 구하기 어려우며 따라서 수치적인 방법을 사용하고 있다. 즉 변화 방향 벡터에 대한 가중상수  $\beta$ 에 대해 다음식을 만족시키는 가장 작은 정수  $q$ 를  $J$ 라 할 때 변화량  $\alpha$ 를  $0.5^q$ 라 둔다. 물론 이때  $q$ 는 음의 정수가 될 수도 있으며 그럴 경우에는 변화량이 1 보다 크게 되기도 한다.

$$\Phi(b + 0.5^q P) \leq \Phi(b) - 0.5^q \beta \|p\|^2, 0 < \beta < 1 \quad (6)$$

위의 조건은 기울기함수의 상대크기와 변화량 벡터의 크기를 고려하여 변화량을 결정하는 것이다. 이차계획법으로 변형된 문제(3)의 해가 크면 아직 움직여야 하는 변화가 많다는 것이지만 비선형에 따른 오차가 발생할 수 있으므로 크기를 제한하는 효과가 있다.  $\beta$ 가 1에 가까우면 변화량의 제한은 크게 하며 0에 가까우면 기울기 함수만으로 결정되어 비교적 큰 변화량을 갖게 된다.

공학의 설계문제에서는 설계변수의 크기가 제한되는 경우가 많으므로 단순한 0.5의 배수를 택하는 것보다 변화방향벡터와 설계변수제한범위를 고려하여 수정하는 것이 더욱 좋은 결과를 가져왔다 [12, 17].

### 2.3 헤세 행렬

선형화기법에서는 단순한 단위행렬을 사용하고 있으나, 수렴속도를 높이기 위하여 일차 민감도해석의 결과를 이용하여 근사 헤세 행렬을 만드는 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 법을 이용하여 행렬  $W$ 를 변화시킨다[6]. 이를 위하여 먼저 라그란지 함수를 정의하면

$$L(b, \mu) = f(b) + \sum \mu_i g_i(b), i \in I_e \quad (7)$$

여기서 사용된  $\mu_i$ 는 QP에서 구한 라그란지승수이며 함수식(7)의 미분치를 이용하여 헤세 행렬을 다음과 같이 구한다.

$$W = W + a a^T \times e e^T \quad (8)$$

여기서  $a$  = 라그란지 함수의 미분치와 반복해의 차를 조합한 벡터

$e$  = 반복해의 간격에 헤세 행렬을 곱한 벡터

이 변화방식은 행렬  $W$ 가 양정(positive definite)과 대칭성을 유지되게 한다.  $W$ 는 보통 가장 간단한 I 행렬로 시작한다. 일반적인 BFGS법을 활성화정책을 가진 알고리즘에 사용할 때  $a$  벡터의 계산에 문제가 생긴다. 즉 매반복 횟수에서 제한조건식의 집합이 달라질 경우가 많으므로 식(8)의  $a$  계산에 쓰이는 식(7)의 미분치 계산에 차이가 발생한다.  $b^*$ 에서 새로운 제한조건으로 활성화되면 이것의 값을 알 수 없고, 반대로 앞 반복회에서 활성화된 조건이 다음 반복회에서 제외된다면 앞의 자료를 처리하는데 문제가 있다. Wilson-Han-Powell 알고리즘에서는 모든 제한조건을 이용하므로 이런 경우가 발생하지 않는다. 이를 피하기 위하여 앞반복회에서  $\mu$ 의 값이 0이 아닌 제한조건식은 무조건 활성화 조건으로 취급하여 계산할 수 있는데 이를 경우에는 취급하는 제한조건식이 많아지는 단점이 있다. 다른 한편으로는 만족하고 있는 제한조건의 라그란지 승수  $\mu$ 를 0으로 생각하여 쓰기도 한다.

2.4 PLBA 알고리즘

이런 반복 이차계획법의 알고리즘을 단계별 과정으로 나타내면 다음과 같다.

제1단계:  $k=0$ 이라 두고  $b \in R^n, R_0 > 0, \delta > 0, 0 < \beta < 1$ 을 정하고  $W^{(0)} = I$ 라 둔다.

제2단계: 설계변수 방향변화벡터  $p$ 를 구한다.

$b^{(k)}$ 에서 최대 위반 제한조건값  $F(b^{(k)})$ 와  $I_1, I_2, I_\epsilon$ 를 계산한다.

$G^0$ 와  $G^r$ 를 계산하여  $QP$  문제를 풀어서  $p^{(k)}$ 와  $i \in I_\epsilon$ 에 대한 라그랑지 승수  $\mu_i^{(k)}$ 를 구한다. 만일  $QP$  문제를 풀 수 없다면  $\delta_{k+1} = 0.5\delta_k$ 로 두고 다시 푼다.

제3단계: 수렴조건을 만족하는지 조사하여 만일  $F(b)$ 가 주어진 정도보다 작고,  $\|p^{(k)}\|$ 도 주어진 정도 보다 작으면 끝낸다.

제4단계: 위반매개변수  $R$ 을 검토한다.

$r$ 을 구하여 식(5)를 만족하는지를 조사한다. 그 조건을 만족하고 설계변수가 제한조건식을 모두 만족시키면  $R_{k+1} = 0.5(R_{k+1} = r)$ 로 놓는다.

식(5)를 반복하지 않으면  $R_{k+1} = r$ 로 두고 이 이외의 경우는  $R_{k+1} = R_k$ 로 둔다.

제5단계: 변화량  $\alpha$ 를 계산하여  $b^{k+1} = b^k + \alpha_k p^{(k)}$ 라 둔다. 여기서  $\alpha_k$ 는 (0.5)<sup>J</sup>라고 놓는데 J는 식(4)의 기울기 함수를 만족하는 최소의 정수이다.

제6단계: 헤세 행렬 수정을 하기 위하여 식(8)의  $a, e$ 를 계산하고 행렬  $W$ 를 변화시킨다.

제7단계:  $k = k + 1$ 이라 놓고 제2단계로 간다.

3. 알고리즘의 과정 및 매개변수 개선

PLBA 알고리즘을 이용하여 문제를 풀려면 매개변수  $R_0$ (초기 위반 매개변수),  $\delta$ (활성화 제약조건의 폭),  $\beta$ (변화방향 벡터에 의한 가중상수), NFLINE(변화량 선정 반복 횟수 한계), ACC(수렴 정도) 등의 값을 선택해야 하고 매개변수값에 따라 알고리즘의 수치적 성능이 달라진다. 따라서 이들 매개변수들에 대한 성질을 생각하면서 이들의 변화에 대한 연구로 수치성능이 개선된 알고리즘을 만들고

자 한다. 이를 위하여 Lagrange multiplier 값에 따라 활성화 조건식을 결정하는데 따른 변화와 헤세 행렬 변경에 따른 수치적 성능을 비교하고자 한다.

3.1 활성화 제한조건 변화

Pshenichny의 알고리즘의 장점이 바로 이 활성화 조건을 도입하므로 민감도 계산에 노력이 많이 드는 공학의 최적화문제 해결에서 나타나는 장점이 되므로 이상점을 살리면서 보다 개선된 방향을 제시함과 동시에 변형된 알고리즘이 갖는 문제점도 해결하고자 한다.

(1) 라그랑지 승수값에 따른 선정

앞의 2.3절 에서 지적인 바와 같이 근사 헤세 행렬을 구성하기 위하여서는 라그랑지 승수값과 관련이 있는 제한조건식은 활성화조건식 집합에 포함되어 있는 것이 계산상 유리한 점이 많다. 그러나 다음에 나타날 것으로 예측되는 부분까지 포함할 수는 없으므로 영이 아닌 라그랑지 승수값을 가진 제한 조건식을 포함시키는 경우와 원래의 알고리즘대로 하는 경우로 구별하였다.

경우 1:  $I_\epsilon^c(I_1 \cup I_2$ 와 앞 반복에서 라그랑지 승수가 0이 아닌 것을 포함)

경우 2:  $I_\epsilon^c(I_1 \cup I_2)$

(2) 제한조건식값에 따른 선정

활성화 제한조건식의 위반폭을 결정하는데 상수  $\delta$ 가 사용됨을 식(3)의 과정에서 알 수 있듯이, 매개변수  $\delta$ 의 값이 크면 많은 제한조건식이 포함하게 되어 설계변수의 변화방향을 결정하는데 좋게 보이는 하나 민감도 해석에 시간이 많이 걸릴 뿐 아니라  $QP$ 를 풀 때도 많은 시간이 필요하다. 그러나 많은 제한조건이 포함될 경우 각 제한조건식이 수치적으로 독립적이 되지 않을 수도 있고 너무 많은 조건식이 있어서 해석이 힘든 경우도 발생한다. 따라서 제한조건식을 표준화(Normalization)시킨 경우에  $\delta$ 값을 0.1일때와 10.0일때를 비교하였다.

경우1:  $\delta = 0.1$

경우2:  $\delta = 10.0$

(3) 위반 제한조건값에 따른 선정

위배된 제한조건을 모두 포함시키게 되면  
 헤세 행렬 수정 때 생긴 문제를 줄일 수 있으며 이들  
 제한조건식의 정보를 이용하여 보다 나은 설계변수  
 변화방향벡터를 구할수 있으므로식(3)에서  $\epsilon(b)$   
 의 값을 양으로만 제한해 보았다. 이럴 경우  
 취급하여야 할 조건식이 증가한다는 약점도 있으므  
 로 음의 값이 되어 크게 위배된 조건만을 사용하는  
 경우와 비교하였다.

경우1:  $\epsilon(b)^+$  ( $\epsilon$  값을 0이상으로 제한하여  $\epsilon$  값이  
 음수가 될 경우는 0으로 두어 모든  
 위배 조건식을 포함한다.)

경우2:  $\epsilon(b)^-$  ( $\epsilon$  값은 음수도 될 수 있으며 이때  
 는 크게 위배된 조건만 사용한다.)

3.2 헤세 행렬의 조정

수렴속도를 크게 하는데 큰 비중을 차지하고  
 있는 헤세 행렬도 일차의 민감도해석에서 구하  
 므로 틀린 정보를 포함할 경우도 있어서, 오히려  
 근사 헤세행렬이 잘못된 설계변수 변화방향을  
 줄 수 있고 행렬의 수치들의 크기가 너무 차이가  
 날 경우에는 수치해석의 결과과 나쁘게 되기도  
 한다. 이를 피하기 위하여 틀린 근사 헤세행렬을 단  
 위행렬로 바꾸어주는 것이 필요하나 적당한 기준을  
 선정할 필요가 있으므로 활성화 제한조건식의 변화  
 량과 단위행렬의 수치비를 고려하여 보았다.

(1) 활성화 제한조건식 변화율에 따른 조정

활성화 제한조건식이 바뀌게되면 지금까지 사용  
 한 근사 헤세행렬의 정보가 사실과 다르게 되어 이  
 행렬을 이용한 설계변수 변화방향 벡터가 잘못 선  
 정될 가능성이 많다. 이럴 경우에는 초기의 단위행  
 렬을 이용하는 것이 타당성이 많으나 변화될 때마  
 다 단위 행렬을 사용하게 되면 수렴속도가 떨어질  
 가능성도 높게 되므로 활성화조건식수의 변화율  
 XNAC를 기준으로 단위행렬로 취환하였다. 예를  
 들면 앞반복에서 10개의 활성화 제한조건식이 있었  
 고 현반복에서 그들중 2개가 활성화 제한조건식에  
 서 제외되면 XNAC는 20%가 되며 50%라고 하면  
 10개중 5개가 제외된다는 것을 의미한다.

본 연구에서는 XNAC를 50% 와 80%의 경우에  
 대하여 성능을 비교하였다.

경우1: NAC가 50%

경우2: NAC가 80%

(2) 대각선 행렬의 수치비에 따른 조정

행렬의 조건수(Condition number)에 따라 수치계  
 산 결과의 정확도가 많이 달라진다[18]. 그러나 행렬  
 의 조건식을 정확히 계산하기는 계산량이 너무  
 많아서 실제로 적용할 경우 크게 도움이 되지 않는  
 다. 다행히도 2.3 절에서 설명한 것같이 대각선행렬  
 을 만들고 있으므로 근사적으로 이대각선행렬의  
 요소크기를 비교하여 행렬의 수치계산의 정확도를  
 비교하는데 사용하였다. 따라서 이들의 비가 일정  
 한 범위를 벗어날 경우에도 단위행렬을 다시 사용  
 하도록 하였다. 본 연구에서는  $c = D_{max}/D_{min}$   
 가 10E7, 1.0E9을 기준으로 하여 비교하였다.

경우1: c를 1.0E7

경우2: c를 1.0E9

4. 수치해석의 결과 및 토의

활성화 제한조건의 변화와 근사 헤세 행렬의  
 취환의 조건에 대한 연구를 위하여 정한 경우를  
 조합하면 32가지의 경우의 수가 생긴다. 이 32가지  
 와 원래의 PLBA 알고리즘(PLBA 1:  $I_{\epsilon}^+$ ,  $\epsilon(b)^+$ ,  
 $c=1.0E9$ ,  $\delta=0.1$ 과 PLBA 2:  $I_{\epsilon}^-$ ,  $\epsilon(b)^-$ ,  $c=1.0E9$ ,  
 $\delta=10.0$ )을 합한 총 34 경우들에 대해 그 성능을  
 조사하기 위하여 6개의 문제를 선택하였다. 매개변  
 수  $R_0$ ,  $\beta$ , ACC의 값은 1.0, 0.00001, 0.0001이며  
 변화량 결정의 수치해석 반복횟수인 NELINE은  
 10으로 하였다. 만일 적당한 변화량  $\alpha$ 을 10번의  
 시도에서 구하지 못하면 모든 제한조건이 활성화  
 될때까지  $\delta$ 값을 2배 증가시키도록 했고 최대 반복  
 횟수는 200번으로 일단 제한하였다.

설계변수의 출발점이 다를 경우 알고리즘의 수치  
 적 성능은 각각 다르게 된다. 그러나 지금까지의  
 일반적 성능 비교는 한가지 초기 설계변수를 중심  
 으로 수행하였으므로 초기 설계변수에 따라 다른  
 결과를 가져올 수 있으므로 여러개의 초기치에  
 대하여 풀고 통계처리 한 결과를 비교하는 것이

보다 신뢰성이 있는 성능 연구가 될 것이다. 본 연구에서는 임의의 3가지 출발점을 선택하고 그들의 평균치를 구하여 비교하였다.

비교한 항목은 반복횟수 ITER, 최적값 COST, 수행시간 CPU(단위는 초), 목적함수와 제한조건함수 계산 부프로그램의 호출수 FE, 목적함수 민감도 계산 부프로그램의 호출수 GCF와 제한조건식의 민감도 해석 부프로그램의 호출수 GCO 이다.

평균값의 계산에서 소수점이하 둘째 자리에서 반올림 하였으며 3개의 출발점에서 문제를 풀었기 때문에 3개의 값으로 평균하여야 하나 문제에 따라서는 최적해를 구하지 못하는 경우도 생겼다. 이를 위하여 Table에 SN으로 표시하여 풀린 경우의 수를 표시하였다. Table에서 SN값이 2이면 2가지의 경우에만 최적해를 얻었으므로 2가지를 평균하였다는 의미이다.

이수치해석은 CYBER 180/830에서 수행하였다.

4.1 Rosen-Suzuke 문제

알고리즘의 성능비교에 자주 이용되는 이 문제는 순수한 수학적 문제로 다음과 같다.

minimize

$$f = b_1^2 + 2b_3^2 + b_4^2 - 5b_1 - 5b_2 - 21b_3 + 7b_4 + 100$$

subject to

$$g_1 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_1 - b_3 - b_4)/8 - 1.0 < 0$$

$$g_2 = (b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 + 2b_4^2 - b_1 - b_4)/10 - 1.0 < 0$$

$$g_3 = (2b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1 - b_2 - b_4)/5 - 1.0 < 0$$

3개의 설계변수의 출발점으로 (-1.5, -1.5, -1.5, -1.5), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)와 (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)를 선택하였다. 이 문제의 최적해는 (0., 1., 2., -1)이며 최적치는 56이다. 34가지에 대한 수행결과는 Table 1에 나타나 있다. 결과를 살펴보면  $\delta$ 가 10.0 일 경우에 가장 좋은 결과를 얻었다. 이때 모든 제한조건식이 활성화되었으며 반복횟수가 11회에서 최적해가 구하여졌다. 4번의 경우 즉,  $I^0$ , XNAC = 50%,  $\epsilon(b)$ ,  $\delta = 0.1$ 일 때 반복횟수 12.7 회, CPU시간 0.775초로써 가장 나쁜 성능을 보여준다. 이 경우는 활성화 제한조건식이 가장 작게되며 XNAC값이 작으므로 자주 단위행렬을 사용하므로 Pshenichny의 원 알고리즘과 같게 된다.

4.2 Shell(Colville) Primal 문제

문제는 다음과 같이 정의되며 이때 사용한 계수  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $d_j$ 와  $e_j$ 는 상수로써 참고문헌 19에 주어져 있다.

minimize

$$f = \sum e_j x_j + \sum \sum c_{ij} x_i x_j + \sum d_j x_j^3$$

subject to

$$g_i = - \sum a_{ij} x_j + b_i < 0; \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$x_i \geq 0; \quad 1, 2, \dots, 5.$$

초기설계변수로 (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0) (20.0, 20.0, 20.0, 20.0, 20.0), (50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0)의 세 경우를 선택하였다. 최적값은 -32.35이며 최적해는 (0.3, 0.3335, 0.4, 0.4283, 0.2240)으로 요약한 수치결과가 Table 2에 주어져 있다.

Table 1. Rosen-Suzuki 문제의 결과

| No    | SN | $I_\epsilon$                           | XNAC             | $\epsilon(b)$                          | $c$                  | $\delta$         | 결과   |      |              |      |      |      |
|-------|----|--|------------------|--|----------------------|------------------|------|------|--------------|------|------|------|
|       |    | A: $I_\epsilon^0$<br>B: $I_\epsilon^0$ | A: 50%<br>B: 80% | A: $\epsilon(b)^0$<br>B: $\epsilon(b)$ | A: 1.0E7<br>B: 1.0E9 | A: 0.1<br>B: 10. | ITER | COST | CPU<br>(sec) | FE   | GCF  | GCO  |
| 1     | 3  | A,B                                    | A,B              | A,B                                    | A,B                  | B                | 11.0 | 56.0 | 0.707        | 28.3 | 11.0 | 11.0 |
| 2     | 3  | A,B                                    | A,B              | A                                      | A,B                  | A                | 12.0 | 56.0 | 0.756        | 28.3 | 12.0 | 11.7 |
| 3     | 3  | A                                      | A,B              | B                                      | A,B                  | A                | 11.3 | 56.0 | 0.696        | 27.3 | 11.3 | 11.0 |
| 4     | 3  | B                                      | A                | B                                      | A,B                  | A                | 12.7 | 56.0 | 0.775        | 30.7 | 12.7 | 12.3 |
| 5     | 3  | B                                      | B                | B                                      | A,B                  | A                | 12.0 | 56.0 | 0.732        | 27.3 | 12.0 | 11.7 |
| PLBA1 | 3  | A                                      |                  | A                                      | B                    | A                | 12.0 | 56.0 | 0.757        | 28.3 | 12.0 | 11.7 |
| PLBA2 | 3  | A                                      |                  | A                                      | B                    | B                | 11.0 | 56.0 | 0.708        | 28.3 | 11.0 | 11.0 |

Table 2. Shell(Colville) Primal 문제의 결과

| No    | SN | $I_\epsilon$ XNAC $\epsilon(b)$ $c$ $\delta$ |        |                   |          |        | 결과   |        |       |      |      |      |
|-------|----|--|--------|-------------------|----------|--------|------|--------|-------|------|------|------|
|       |    | A: $I_\epsilon'$                             | A: 50% | A: $\epsilon(b)'$ | A: 1.0E7 | A: 0.1 | ITER | COST   | CPU   | FE   | GCF  | GCO  |
|       |    | B: $I_\epsilon^o$                            | B: 80% | B: $\epsilon(b)$  | B: 1.0E9 | B: 10. |      |        |       |      |      |      |
| 1     | 3  | A  | A      | A                 | A,B      | A      | 15.7 | -32.35 | 1.348 | 30.3 | 15.7 | 15.7 |
| 2     | 3  | A,B  | A      | A                 | A,B      | A      | 10.7 | -32.35 | 1.163 | 18.3 | 10.7 | 10.7 |
| 3     | 3  | A  | A,B    | B                 | A,B      | A      | 15.7 | -32.35 | 1.314 | 44.3 | 15.7 | 15.7 |
| 4     | 3  | A,B  | A,B    | B                 | A,B      | B      | 10.7 | -32.35 | 1.186 | 19.3 | 10.7 | 10.7 |
| 5     | 3  | A  | B      | A                 | A,B      | A      | 14.7 | -32.35 | 1.315 | 32.3 | 14.7 | 14.7 |
| 6     | 3  | A,B  | B      | A                 | A,B      | B      | 11.3 | -32.35 | 1.264 | 20.7 | 11.3 | 11.3 |
| 7     | 3  | B  | A      | A                 | A,B      | A      | 19.3 | -32.35 | 1.657 | 46.0 | 19.3 | 19.0 |
| 8     | 3  | B  | A      | B                 | A,B      | A      | 21.7 | -32.35 | 1.825 | 72.7 | 21.7 | 21.3 |
| 9     | 3  | B  | B      | A                 | A,B      | A      | 15.7 | -32.35 | 1.407 | 38.7 | 15.7 | 15.7 |
| 10    | 3  | B  | B      | B                 | A,B      | A      | 24.3 | -32.35 | 2.504 | 80.3 | 24.3 | 24.0 |
| PLBA1 | 3  | A  |        | A                 | B        | A      | 13.3 | -32.35 | 1.204 | 29.0 | 13.3 | 13.3 |
| PLBA2 | 3  | A  |        | A                 | B        | B      | 11.3 | -32.35 | 1.264 | 20.7 | 11.3 | 11.3 |

Table 3. Shell(Colville) Dual 문제의 결과

| No    | SN | $I_\epsilon$ XNAC $\epsilon(b)$ $c$ $\delta$ |        |                   |          |        | 결과   |       |        |       |      |      |
|-------|----|--|--------|-------------------|----------|--------|------|-------|--------|-------|------|------|
|       |    | A: $I_\epsilon'$                             | A: 50% | A: $\epsilon(b)'$ | A: 1.0E7 | A: 0.1 | ITER | COST  | CPU    | FE    | GCF  | GCO  |
|       |    | B: $I_\epsilon^o$                            | B: 80% | B: $\epsilon(b)$  | B: 1.0E9 | B: 10. |      |       |        |       |      |      |
| 1     | 3  | A  | A      | A                 | A,B      | A      | 40.0 | 132.3 | 16.618 | 84.3  | 40.0 | 39.0 |
| 2     | 3  | A,B  | A,B    | A,B               | A,B      | A      | 31.3 | 132.3 | 12.205 | 55.7  | 31.3 | 30.7 |
| 3     | 3  | A  | A      | B                 | A,B      | A      | 36.0 | 132.3 | 14.664 | 186.0 | 41.0 | 40.0 |
| 4     | 3  | A  | B      | A                 | A,B      | A      | 38.0 | 132.3 | 15.838 | 89.7  | 38.3 | 37.3 |
| 5     | 3  | A  | B      | B                 | A        | A      | 37.7 | 132.3 | 15.539 | 162.7 | 41.3 | 40.3 |
| 6     | 3  | A  | B      | B                 | B        | A      | 31.7 | 132.3 | 12.925 | 151.7 | 35.7 | 34.7 |
| 7     | 3  | B  | A      | A                 | A,B      | A      | 45.3 | 132.3 | 19.057 | 152.3 | 46.7 | 44.3 |
| 8     | 3  | B  | A      | B                 | A,B      | A      | 41.0 | 132.3 | 16.420 | 219.7 | 48.3 | 47.3 |
| 9     | 3  | B  | B      | A                 | A        | A      | 41.7 | 132.3 | 17.594 | 173.7 | 44.3 | 43.0 |
| 10    | 3  | B  | B      | A                 | B        | A      | 42.0 | 132.3 | 17.764 | 177.0 | 44.7 | 43.3 |
| 11    | 3  | B  | B      | B                 | A        | A      | 38.7 | 132.3 | 16.536 | 223.7 | 45.0 | 44.0 |
| 12    | 3  | B  | B      | B                 | B        | A      | 40.7 | 132.3 | 17.380 | 242.0 | 47.0 | 46.0 |
| PLBA1 | 3  | A  |        | A                 | B        | A      | 35.3 | 132.3 | 15.374 | 190.7 | 39.3 | 38.3 |
| PLBA2 | 3  | A  |        | A                 | B        | B      | 30.3 | 132.3 | 11.915 | 55.7  | 31.3 | 30.7 |

앞의 예제와 같이 가장 크게 영향을 주는 매개변수는  $\delta$  값으로 10.0일때 좋은 결과를 준다. Table 2의 No. 2와 4는 평균 반복횟수 10.7회, CPU 시간 1.186초로서 가장 짧은 시간에서 해를 구하였다. 활성화 제한조건식의 수가 적은 8번과 10번의 경우는 나쁜 결과를 준다.

4.3 Shell(Colville) Dual 문제

이 문제는 앞의 문제와 이원(dual) 문제로 같은

계수를 사용하며 최적치가 같은 문제이다.

minimize

$$f = \sum b_i x_{5+i} - \sum \sum c_{ij} x_i x_j - 2 \sum d_j x_j^3$$

subject to

$$g_i = -\sum a_{ij} x_{5+i} e_j + 2 \sum c_{ij} x_i + 3d_j x_j^3$$

$$j = 1, 2, \dots, 5$$

$$x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, 15$$



Table 4. 스프링 설계 문제의 문제의 결과

| No    | SN | 문제                                     |                  |  |                      |                 | 결과   |         |       |       |      |      |
|-------|----|--|------------------|--|----------------------|-----------------|------|---------|-------|-------|------|------|
|       |    | $I_\epsilon$                           | XNAC             | $\epsilon(b)$                            | $c$                  | $\delta$        | ITER | COST    | CPU   | FE    | GCF  | GCO  |
|       |    | A: $I_\epsilon^1$<br>B: $I_\epsilon^0$ | A: 50%<br>B: 80% | A: $\epsilon(b)^1$<br>B: $\epsilon(b)^0$ | A: 1.0E7<br>B: 1.0E9 | A: 0.1<br>B: 10 |      |         |       |       |      |      |
| 1     | 3  | A                                      | A                | A  | A                    | A               | 26.7 | 0.01270 | 1.550 | 87.7  | 26.7 | 24.7 |
| 2     | 3  | A                                      | A                | A  | B                    | A               | 47.0 | 0.01268 | 2.778 | 184.7 | 47.0 | 47.0 |
| 3     | 3  | A                                      | A                | B  | A                    | A               | 33.0 | 0.01270 | 1.896 | 118.3 | 33.3 | 31.3 |
| 4     | 3  | A                                      | A                | B  | B                    | A               | 35.0 | 0.01267 | 1.995 | 128.3 | 35.7 | 33.0 |
| 5     | 3  | A                                      | B                | A  | A                    | A               | 27.3 | 0.01270 | 1.590 | 90.7  | 27.3 | 27.0 |
| 6     | 3  | A                                      | B                | A  | B                    | A               | 32.3 | 0.01268 | 2.481 | 155.3 | 32.3 | 42.0 |
| 7     | 3  | A                                      | B                | B  | A                    | A               | 34.3 | 0.01270 | 1.948 | 119.3 | 34.3 | 31.7 |
| 8     | 3  | A                                      | B                | B  | B                    | A               | 35.0 | 0.01270 | 2.005 | 129.0 | 35.0 | 33.3 |
| 9     | 3  | B                                      | A                | A  | A                    | A               | 27.0 | 0.01270 | 1.565 | 89.0  | 27.0 | 27.0 |
| 10    | 3  | B                                      | A                | A  | B                    | A               | 47.3 | 0.01268 | 2.808 | 190.3 | 47.3 | 46.7 |
| 11    | 3  | B                                      | A                | B  | A                    | A               | 31.0 | 0.01270 | 1.738 | 106.0 | 31.0 | 28.0 |
| 12    | 3  | B                                      | A                | B  | B                    | A               | 32.7 | 0.01271 | 1.838 | 116.0 | 32.7 | 29.7 |
| 13    | 3  | B                                      | B                | A  | A                    | A               | 27.7 | 0.01270 | 1.606 | 92.0  | 27.7 | 27.3 |
| 14    | 3  | B                                      | B                | B  | A                    | A               | 49.7 | 0.01268 | 2.927 | 195.0 | 49.7 | 48.0 |
| 15    | 3  | B                                      | B                | B  | A                    | A               | 28.7 | 0.01272 | 1.611 | 103.0 | 28.7 | 26.3 |
| 16    | 3  | B                                      | B                | B  | B                    | A               | 30.3 | 0.01271 | 1.709 | 113.0 | 30.3 | 28.0 |
| 17    | 1  | A,B                                    | A,B              | A,B                                      | B                    | B               | 30.0 | 0.01268 | 1.920 | 124.0 | 30.0 | 30.0 |
| 18    | 3  | A                                      | A,B              | A,B                                      | A                    | B               | 20.5 | 0.01271 | 1.301 | 73.5  | 20.5 | 20.5 |
| PLBA1 | 3  | A                                      |                  | A  | B                    | A               | 50.3 | 0.01268 | 3.000 | 205.0 | 50.3 | 49.7 |
| PLBA2 | 1  | A                                      |                  | A  | B                    | B               | 30.0 | 0.01270 | 1.919 | 124.0 | 30.0 | 30.3 |

설계변수의 초기치로 2.5, 5.0과 10.0의 15개 변수값을 선택하였다. 최적치는 전과 같이 32.35이며 최적해는 (0.0, 0.0, 5.174, 0.0, 3.061, 11.84, 0.0, 0.0, 0.1039, 0.0, 0.3, 0.3335, 0.4, 0.4283, 0.224)이다. Table 3 에서 보는 바와 같이 원래의 알고리즘인 PLBA2가 반복횟수 30.3회 CPU시간 11.915초로서 가장 좋은 결과를 보여주며 변형된 알고리즘에서는  $\delta=10.0$ 일 때 좋은 결과를 얻었다.  $I_\epsilon^0$ 와  $\delta=0.1$ 이 같이 사용된 7-12번이 CPU 시간 16.42초와 반복횟수 38.7회 이상으로 좋지 않았다.

4.4 스프링 설계 문제

압축 인장 용수철을 설계하는 문제[16]로 코일지름D, 스프링 소재의 지름d와 유효감감수n을 설계변수로 선정하였다.

minimize

$$f = (n+2) D d^2$$

subject to

$$g_1 = 1.0 - D^3 n / (71.875 d^4) \leq 0$$

$$g_2 = (4 D^2 - d D) / (12.566(D d^3 - d^4)) + 1 / (5.108 d^2) - 1.0 \leq 0$$

$$g_3 = 1.0 - 140.45 d / (D^2 n) < 0$$

$$g_4 = (D + d) / 1.5 - 1.0 < 0$$

$$d > 0.05, D > 0.05, n > 1$$

초기 설계변수로 (0.5, 1.0, 2.0), (2.0, 4.0, 10.0)과 (3.5, 7.0, 14.0)을 선택하였다.

이 문제는 최적해가 여러가지 있는 비선형도가 심한 문제로 최적치는 0.01267에서 0.01272사이에 있다. 수렴상태를 살펴봐도 Table 4 에서 보는 바와 같이 17, 18번의 경우에 최종 결과를 얻지 못하였다. 이것은 원래의 PLBA 알고리즘에서도 실패한 경우를 볼 수 있다. 좋은 결과는 1과 5의  $I_\epsilon(b) + \delta=0.1, c=1.0E7$ 일 때 얻었다.

4.5 Ten bar Truss

10개의 부재로 구성된 외팔보의 최소 중량을 가지는 구조물을 설계하는 문제로 그림1에 나타나 있다. 하중은 아래방향으로 절점1과 3에서 50 kips 이 절점2와 4에서 150 kips 이 주어지며 탄성계수  $E=10^4$  ksi,  $\rho=0.10$  lb/in<sup>3</sup>인 재질로 되어 있으며 제한조건은 각 절점의 변위한계는 2.0 in, 단면적의 하한은 0.1 in<sup>2</sup>이며 각 부재의 응력한계는 25 ksi 로 주었다. 설계하고자하는 단면의 크기인 설계변수의 초기치는 10개의 변수를 각각 0.1, 30.0과 6

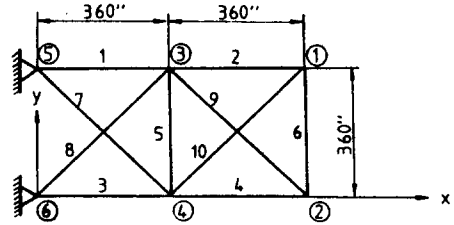


그림 1. 10 bar truss

최적해는 4783이며 그때의 단면적은 (25.14,

1.075, 26.13, 12.99, 0.1, 1.965, 14.225, 15.66, 17.28, 0.1)이다. 요약한 결과 Table 5 을 비교하면 활성화 조건식의 수가 많으면 반복횟수는 줄어드나

Table 5. Ten bar Truss 문제의 결과

| No    | SN | $I_\epsilon$      | XNAC   | $\epsilon(b)$      | $c$      | $\delta$ | 결과    |      |        |       |      |      |
|-------|----|-------------------|--------|--------------------|----------|----------|-------|------|--------|-------|------|------|
|       |    | A: $I_\epsilon'$  | A: 50% | A: $\epsilon(b)'$  | A: 1.0E7 | A: 0.1   | ITER  | COST | CPU    | FE    | GCF  | GCO  |
|       |    | B: $I_\epsilon''$ | B: 80% | B: $\epsilon(b)''$ | B: 1.0E9 | B: 10.   | (sec) |      |        |       |      |      |
| 1     | 3  | A                 | A      | A                  | A        | B        | 35.0  | 4783 | 27.814 | 98.0  | 35.0 | 35.0 |
| 2     | 3  | A                 | B      | A                  | A        | A        | 29.3  | 4783 | 16.123 | 89.3  | 29.3 | 28.7 |
| 3     | 3  | A                 | B      | A                  | A        | A        | 33.0  | 4783 | 26.584 | 93.3  | 33.0 | 33.3 |
| 4     | 3  | A                 | B      | A                  | B        | B        | 29.7  | 4783 | 23.048 | 78.0  | 29.7 | 29.7 |
| 5     | 3  | B                 | A      | A                  | A        | A        | 31.7  | 4783 | 18.425 | 107.3 | 31.7 | 31.0 |
| 6     | 3  | B                 | A      | A                  | A        | B        | 36.7  | 4783 | 28.906 | 100.0 | 36.7 | 36.7 |
| 7     | 3  | B                 | A      | A                  | B        | A        | 39.7  | 4783 | 21.515 | 120.7 | 39.7 | 39.0 |
| 8     | 3  | B                 | A      | A                  | B        | B        | 34.7  | 4783 | 26.864 | 91.3  | 34.7 | 34.7 |
| 9     | 3  | B                 | B      | A                  | A        | A        | 36.3  | 4783 | 21.728 | 129.7 | 36.3 | 35.7 |
| 10    | 3  | B                 | B      | A                  | A        | B        | 33.3  | 4783 | 26.552 | 93.0  | 33.3 | 33.3 |
| 11    | 3  | B                 | B      | A                  | B        | B        | 34.0  | 4783 | 25.916 | 85.7  | 34.0 | 34.0 |
| 12    | 2  | A,B               | A,B    | B                  | A        | B        | 41.0  | 4783 | 32.486 | 114.5 | 41.0 | 41.0 |
| 13    | 2  | A,B               | A,B    | B                  | B        | B        | 34.0  | 4783 | 26.409 | 91.0  | 34.0 | 34.0 |
| 14    | 2  | A                 | A      | A                  | A        | A        | 25.5  | 4783 | 13.212 | 70.5  | 25.5 | 25.5 |
| 15    | 2  | A                 | A      | A                  | B        | A        | 58.0  | 4783 | 34.770 | 213.0 | 58.0 | 57.0 |
| 16    | 2  | A                 | A      | B                  | A        | A        | 49.5  | 4783 | 29.872 | 185.0 | 49.5 | 48.5 |
| 17    | 2  | A                 | B      | A                  | B        | A        | 32.5  | 4783 | 17.208 | 95.5  | 32.5 | 32.5 |
| 18    | 2  | A                 | B      | B                  | A        | A        | 31.0  | 4783 | 27.094 | 152.0 | 50.0 | 49.0 |
| 19    | 2  | A                 | B      | B                  | B        | A        | 50.0  | 4783 | 30.876 | 190.5 | 47.5 | 46.5 |
| 20    | 2  | B                 | A      | B                  | A        | A        | 47.0  | 4783 | 30.876 | 190.5 | 47.5 | 46.5 |
| 21    | 2  | B                 | A      | B                  | B        | A        | 39.0  | 4783 | 24.591 | 149.0 | 39.0 | 38.0 |
| 22    | 2  | B                 | B      | A                  | B        | A        | 31.0  | 4783 | 17.572 | 99.0  | 31.0 | 30.0 |
| 23    | 2  | B                 | B      | B                  | A        | A        | 65.5  | 4783 | 38.230 | 232.0 | 66.0 | 65.0 |
| 24    | 2  | A                 | A      | A                  | B        | B        | 34.0  | 4783 | 26.382 | 91.0  | 34.0 | 34.0 |
| 25    | 1  | A                 | A      | B                  | B        | A        | 51.0  | 4783 | 32.884 | 213.0 | 51.0 | 51.0 |
| 26    | 1  | A                 | B      | B                  | B        | A        | 37.0  | 4783 | 23.288 | 151.0 | 39.0 | 38.0 |
| PLBA1 | 3  | A                 |        | A                  | B        | A        | 39.0  | 4783 | 21.860 | 124.3 | 39.0 | 38.0 |
| PLBA2 | 3  | B                 |        | B                  | B        | B        | 29.7  | 4783 | 23.034 | 78.0  | 29.7 | 29.7 |

계산시간은 더걸리는 것을 알 수 있다. 예를 들면 7, 8번의 경우  $\delta$ 가 0.1일 때 반복횟수는 39.7회로서  $\delta=10.0$ 일때의 34.7회 보다 5회 가 많으나 시간은 오히려 약 5.3초가 적게 들었다. 이것은 활성화 제한조건식의 수가 많은 경우 제한조건식의 민감도 계산에 소비하는 시간이 많기 때문이다. 또  $\epsilon(b)^-$ 의 경우 변화량을 결정하지 못하는 경우가 많은데 이것은 근사 Hessian 행렬의 구성에 문제가 있음을 보여준다. 전체적으로 2번의 XNAC=80%,  $\epsilon(b)^+$ ,  $c=1.0E7$ ,  $\delta=0.1$ 일 때이며 이 경우 반복횟수 29.3번, CPU 시간 16.124초이다.

4.6 Twenty-five bar Truss

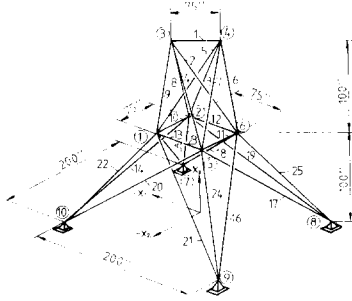
25개의 막대로 된 송전탑을 설계하는 문제로 그림2과 같으며 하중조건도 그림의 표와 같이 주어진다. 재질은 탄성계수  $E=10^4$  ksi,  $\rho=0.10$  lb/in<sup>3</sup>

이며, 응력의 제한조건은 40 ksi, 단면적의 하한은 0.01 in<sup>2</sup>, 각절점의 변위한계는 0.35 in 최대진동수는 77.5Hz이다. 단면의 크기인 설계변수의 초기치는 0.1, 1.0과 10.0의 값으로 25개의 단면을 대칭성을 고려하여 7개의 부분으로 모은 단면을 설계하였다.

이 결과는 Table 6에 요약되어 있다. 최적치는 590.7이며 이때의 단면값은 (0.01, 2.116, 2.379, 0.071, 1.11, 19.8, 2.855)이다.  $\epsilon(b)^-$ 인 경우에 나뉘었으며 특히 14, 19, 22와 23번의 경우에 좋지 않았다. 이 문제에서도 활성화조건식의 수가 적을 경우 반복횟수는 증가하나 오히려 계산시간은 적게 걸림을 알 수 있다.가장 좋은 경우는 6, 7번의 경우로  $I_\epsilon^+$ , XNAC=80%,  $\epsilon(b)^+$ ,  $\delta=0.1$ 일 때 CPU 시간은 각각 69.858과 67.858 초로서 원래의 PLBA 알고리즘의 89.024초 보다 좋았다.

Table 6. Twenty-five bar Truss 문제의 결과

| No    | SN | $I_\epsilon$      | XNAC   | $\epsilon(b)$      | $c$      | $\delta$ | 결과    |       |         |        |       |       |
|-------|----|-------------------|--------|--------------------|----------|----------|-------|-------|---------|--------|-------|-------|
|       |    |                   |        |                    |          |          | ITER  | COST  | CPU     | FE     | GCF   | GCO   |
|       |    | A: $I_\epsilon^+$ | A: 50% | A: $\epsilon(b)^+$ | A: 1.0E7 | A: 0.1   |       |       |         |        |       |       |
|       |    | B: $I_\epsilon^0$ | B: 80% | B: $\epsilon(b)$   | B: 1.0E9 | B: 10.   |       |       |         |        |       |       |
|       |    |                   |        |                    |          |          |       |       | (sec)   |        |       |       |
| 1     | 3  | A                 | A      | A                  | A        | A        | 35.7  | 590.7 | 93.618  | 109.7  | 35.7  | 35.7  |
| 2     | 3  | A,B               | A,B    | A                  | A,B      | B        | 27.0  | 590.7 | 135.040 | 61.7   | 27.0  | 27.0  |
| 3     | 3  | A                 | A      | A                  | B        | A        | 35.7  | 590.7 | 89.870  | 103.3  | 35.7  | 35.7  |
| 4     | 3  | A                 | A      | B                  | A,B      | A        | 50.0  | 590.7 | 170.740 | 237.7  | 51.3  | 51.3  |
| 5     | 3  | A                 | A      | B                  | A        | B        | 28.0  | 590.7 | 134.218 | 48.0   | 28.0  | 28.0  |
| 6     | 3  | A                 | B      | A                  | A        | A        | 28.3  | 590.7 | 69.663  | 79.7   | 28.3  | 28.3  |
| 7     | 3  | A                 | B      | A                  | B        | A        | 29.3  | 590.7 | 67.858  | 74.7   | 29.3  | 29.3  |
| 8     | 3  | A                 | B      | B                  | A        | A        | 42.7  | 590.7 | 121.807 | 168.7  | 43.7  | 43.7  |
| 9     | 3  | A                 | B      | B                  | A        | B        | 27.6  | 590.7 | 132.054 | 47.7   | 27.6  | 27.7  |
| 10    | 3  | A                 | B      | B                  | B        | A        | 43.0  | 590.7 | 130.352 | 176.0  | 43.7  | 43.7  |
| 11    | 3  | A                 | B      | B                  | B        | B        | 38.7  | 590.7 | 187.672 | 58.7   | 38.7  | 38.7  |
| 12    | 2  | B                 | A      | A                  | A        | A        | 39.0  | 590.7 | 104.422 | 121.7  | 39.0  | 39.0  |
| 13    | 2  | B                 | A      | A                  | B        | A        | 39.0  | 590.7 | 100.588 | 115.3  | 39.0  | 39.0  |
| 14    | 2  | B                 | A      | B                  | A        | A        | 126.0 | 590.7 | 715.763 | 1094.7 | 159.0 | 159.0 |
| 15    | 2  | B                 | A      | B                  | A        | B        | 29.7  | 590.7 | 124.802 | 49.7   | 29.7  | 29.7  |
| 16    | 2  | B                 | A      | B                  | B        | B        | 27.7  | 590.7 | 121.391 | 47.7   | 27.7  | 27.7  |
| 17    | 2  | B                 | B      | A                  | A        | A        | 32.5  | 590.7 | 83.131  | 96.0   | 32.7  | 32.7  |
| 18    | 2  | B                 | B      | A                  | A        | B        | 32.3  | 590.7 | 78.918  | 88.7   | 32.3  | 32.3  |
| 19    | 3  | B                 | B      | B                  | A        | A        | 93.7  | 590.7 | 592.737 | 894.3  | 118.3 | 118.3 |
| 20    | 2  | B                 | B      | B                  | A        | A        | 29.7  | 590.7 | 124.713 | 49.7   | 29.7  | 29.7  |
| 21    | 2  | B                 | B      | B                  | B        | B        | 27.7  | 590.7 | 121.422 | 47.7   | 27.6  | 27.6  |
| 22    | 2  | B                 | A      | B                  | B        | A        | 65.5  | 590.7 | 180.597 | 246.5  | 61.5  | 61.5  |
| 23    | 2  | B                 | B      | B                  | B        | A        | 80.0  | 590.7 | 231.084 | 271.0  | 80.0  | 80.0  |
| PLBA1 | 3  | A                 |        | A                  | B        | A        | 35.0  | 590.7 | 89.024  | 100.7  | 35.0  | 34.7  |
| PLBA2 | 3  | A                 |        | A                  | B        | B        | 27.0  | 590.7 | 135.014 | 61.7   | 27.0  | 27.0  |



| 하중 | 조건 | 결점 | 하중 방향 |       |      |
|----|----|----|-------|-------|------|
|    |    |    | x     | y     | z    |
| 1  | 1  | 1  | 0.5   | 0     | 0    |
|    | 2  | 2  | 0.5   | 0     | 0    |
|    | 3  | 3  | 1.0   | 10.0  | -5.0 |
|    | 4  | 4  | 0     | 10.0  | -5.0 |
| 2  | 3  | 4  | 0     | 20.0  | -5.0 |
|    | 4  | 3  | 0     | -20.0 | -5.0 |

그림2. Twenty-five bar Truss

### 5. 결론

공학의 최적화 문제는 일반적으로 합축함수로 나타나므로 함수와 그의 미분치를 구 하는 민감도 해석에 시간이 많이 걸린다. 이런 특성 때문에 최적 설계에 사용할 수 있는 알고리즘을 특별히 개발할 필요성이 있다. 많은 최적화 기법중 뉴턴 방법을 제한조건이 있는 경우에 적용할 수 있게한 반복 이차 계획법 중 근사 헤세 정보를 이용하여 수렴속도를 높이고 활성화 제한조건식 기법을 혼합하여 만든 PLBA 알고리즘이 제시되어 일차적인 성능조사에서 좋은 평가를 받았다.

본 연구에서는 이러한 결과를 기초로 보다 수치적 성능을 개선하기 위하여 알고리즘의 과정과 이에 따른 매개변수를 변화시켜 변형된 알고리즘을 제시하고 성능을 비교 분석하였다. 이변형은 주로 활성화 조건식을 결정하는 기준을 바꾸어 보았으며, 근사 헤세 행렬의 정보를 정확하게 유지할 수 있게 사용중이던 행렬을 단위행렬로 새로이 시작하는 기준의 선정에 관한 것이다.

(1) 구조물설계와 같은 제한조건이 많고 그의 민감도 해석이 어려운 문제에서는 활성화 된 조건이 적게 되도록 하는 것이 비록 설계변수 변화 방향 벡터를 결정하는데 나쁜 영향을 주어 반복횟수를

늘이기는 하지만 오히려 전체 풀이 시간을 줄이는데 도움이 되므로 활성화 제한조건식의 선정폭을 표준화 시킨 제한조건식에서 0.1 정도로 택하는 것이 좋다.

(2) 근사 헤세 행렬을 변화시킬 때 활성화 조건식 기법을 사용하면서 나타나는 문제점을 해결하고 보다 정확한 정보를 얻기 위하여서는 전번 반복 횟수에서 영이 아닌 라그란지 승수를 가진 제한조건식은 조건식의 만족여부에 관계없이 활성화 시키는 조건을 사용하는 것이 좋다.

(3) 틀린 정보를 가진 근사 헤세 행렬을 가진것으로 생각할 수 있는 활성화 조건식의 변화가 있을 경우 치환할 기준은 활성화 조건식이 80% 바뀌는 것을 기준으로 하는 것이 좋다.

(4) 헤세 행렬의 조건수가 크게되면 수치계산에서 오차가 많이 발생하므로 조건수를 계산하여야 하나 현실적 문제점이 있으므로 대신 행렬을 만들때 쓰이는 대각선 행렬의 요소크기를 비교하여 1.0E7 정도의 크기가 발생하면 단위 행렬로 바꾸어 쓰는 것이 좋다.

### 감사의글

본 논문은 한국과학재단의 873-0916-014-2 연구지원에 의하여 수행된 결과의 일부입니다. 동재단의 관계제후께 감사드립니다.

### 인 용 문 헌

1. A.D. Belegundu and J.S. Arora., "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimaization, Part I : Theory ; Part II : Numerical Aspects". Int. J. for Numerical Methods in Engineering 21(9); 1583~1624 (1985)
2. 김호룡, 최섬., "자동차 현가장치의 최적설계에 관한 연구", 대한기계학회논문집 11(2); 437~443 (1987)
3. 유명면, "두께와 모양변화를 통한 구조물의 최적설계", 대한기계학회논문집 9(1); 119~126 (1985)
4. R.B. Wilson., "A Simplicial Algorithm for Concave Programming", Ph.D. Dissertation, Graduate School of Business Administration, Harvard

- University(1963)
5. S.P. Han, "A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming". J. of Optimization Theory and Applications 22: 297~309 (1977)
  6. M.J.D. Powell, "A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations", Lecture Notes in Mathematics 630; 144~157 (1978)
  7. K. Schittkowski, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han and Powell with Augumented Lagangian Type Line Search Function, Part I : Convergence Analysis; Part II : An Efficient Implementation with Linear Least Squares Subproblems", Number. Mathematics 38: 83~127 (1981)
  8. B.N. Pshenichny, "Algorithms for the General Problem of Mathematical Programming", Kibernetica 5; 120~125 (1970)
  9. K.K. Choi, E.J., Haug, J.W. Hou and V.N. Sohoni, "Pshenichny's Linearization Method for Mechanical System Optimization", ASME Journal of Mechanical Design 105(1); 97~103 (1983)
  10. 이회각, "Application of Linearization Method for Large-Scale Structure Optimization - 구조물 최적화를 위한 선형화 기법", 전산구조공학 1(1): 87~94 (1988).
  11. O.K. Lim and J.S. Arora, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 57; 51~65 (1986)
  12. G.A. Gabriele and T.J. Beltracchi, "An Investigation of Pshenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimiz-  
ation", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design 109; 248~256 (1987)
  13. P.B. Thanedar, J.S. Arora, C.H. Tseng, O.K. Lim and G.J. Park, "Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems", Int. J. for Numerical Methods in Engineering 23: 2187~2203(1986)
  14. O.K. Lim and J.S. Arora, "Dynamic Response Optimization using An Active Set RQP Algorithm". Int. J. for Numerical Methods in Engineering 24; 1827~1840 (1987)
  15. C.H. Tseng and J.S. Arora, "On Implementation of Computational Algorithm for Optimal Design, Part I : Preliminary Investigation; Part II : Extensive Numerical Investigation", Int. J. for Numerical Methods in Engineering 26; 1365~1402 (1988)
  16. J.S. Arora, Introduction to OPTIMUM DESIGN, McGraw-Hill Co. (1989)
  17. O.K. Lim and J.S. Arora, "Optimal Structural Design using An Active Set RQP Algorithm", Technical Report No. ODL-86.2, The University of Iowa(1986)
  18. K.E. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons(1978)
  19. W. Hock and K. Schittkowski, "Test Examples for Nonlinear Programming Codes" Lecture Notes in Economics and Mathematical and Structural System, 187, SpringerVerlag (1980)

(접수일자 : 1990. 2. 25)