

경계요소법에 의한 등분포전단을 받는 유한폭 판재의
혼합 Mode 표면균열에 대한 해석

박 성완*, 홍 재학**

Analysis of Mixed Mode Surface Crack in Finite-Width Plate Subjected to Uniform Shearing by Boundary Element Method

S. O. Park and J. H. Hong

Key Words : Surface Crack(표면 균열), Boundary Element Method(경계요소법), Fundamental Solutions(기본 解), Kelvin's Solution(켈빈 解), Stress Intensity Factors(응력확대계수)

Abstract

The mixed mode surface crack in finite-width plate subjected to uniform shearing has been analyzed in 3-D problem by using boundary element method. The calculations were carried out for the surface crack angles(α) of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, and 75°, and for the aspect ratio(a/c) of 0.2, 0.4, 0.6 and 1.0 to get stress intensity factors at the boundary points of the surface crack. For the aspect ratio of 1.0 and the surface crack angles, finite element method was used to check the results in this study. Comparison of the results from both methods showed good agreement.

a : 표면균열의 깊이

2c : 표면균열의 길이

F_I, F_{II}, F_{III} : 무차원 계수

K_I, K_{II}, K_{III} : Mode I, Mode II,

Mode III 응력확대 계수

Q : 반타원균열에 대한 형상계수

H : 판재의 높이

W : 판재의 폭

t : 판재의 두께

α : 표면균열의 각도

* 단국대학교 대학원 박사과정(정회원)

** 단국대학교 기계공학과(정회원)

1. 서론

표면균열문제의 해석은 그 중요성 때문에 1960년대 초기에 Irwin⁽¹⁾에 의해서 연구가 시작된 이래 현재까지 여러가지 방법에 의해 많은 연구가 수행되었다.

Shah⁽²⁾ 등, Smith⁽³⁾ 등은 순차근사법(Alternating Method)을 사용해서 반원, 반타원형 표면균열을 등분포인장에 대해서 해석하였고 Kathiresan⁽⁴⁾, Raju⁽⁵⁾ 등은 유한요소법(FEM)을 사용해서 유한평판중의 반원, 반타원형 표면균열을 등분포인장에 대해서 해석하였다. 또한 Newman⁽⁶⁾ 등은 동일한 형태로 유한요소법에 의한 측면(Side Surface)의 영향도 고려했다. 結城⁽⁷⁾ 등은 경계요소법에 의하여 반타원형 표면균열을 등분포인장에 대해서 해석하였고, Nisitani⁽⁸⁾ 등, 石田⁽⁹⁾ 등은 체적력법(Body Force Method), 渡邊⁽¹⁰⁾ 등은 고정도인 광탄성 실험에 의해 표면균열을 해석하였다. 그러나 표면균열은 3차원 문제이기 때문에 해석은 용이하지 않고 그들의 해석방법도 계산 정도, 범용성, 경제성등의 면에서 일장 일단이 있다.

유한판재에 존재하는 반타원형 표면균열의 응력확대계수(Stress Intensity Factor : SIF) 값은 Raju⁽⁵⁾ 등의 유한요소 수치해석결과가 비교적 신뢰성이 있는 것으로 알려져 있으며 이들의 방법들은 제한된 조건 아래서 사용가능하다는 단점도 있다.

또한 여러 연구자들의 표면균열에 대한 응력확대계수의 이론해석, 수치해석 및 실험해석등을 통구했으나 그 결과는 서로가 5-100%차이를 나타내고 있으며 현재까지 이것에 대한 정설이 설정되지 못한 실정이다. 대부분 표면균열의 거동에 대한 연구는 균열면에 수직방향의 하중이 작용하는 Mode I 부하 및 직선균열에 대해서 행하였다. 그러나 실제문제로서는 Mode I 부하만이 아니고 균열면의 수평방향에 전단이 작용하는 혼합부하를 받는 동시에 균열이 경사진 형태로도 존재한다. 그러므로 혼합 Mode 3차원 균열문제로 되는 경우가 많다고 생각된다.

혼합부하를 받은 3차원 균열은 균열선단에 따라서 Mode가 변화하는 지극히 복잡한 균열로 되고 이 균열 거동을 2차원 관통균열의 거동에서 예측하는 방법은 확립되지 않았다. 본 연구는 최근에 주목되고 급속한 발전을 이루고 있으며 요소분할이 표면만으로 가능하

고 3차원해석에도 Data의 준비가 용이할 뿐만 아니라 탄성문제 특히 균열문제의 해석에서 우수한 결과를 나타내는 경계요소법(Boundary Element Method)을 도입하여 무한영역에 대한 해석解인 Kelvin解를 기본解(Fundamental Solution)로 하고, 기본解에 대한 성질을 파악하여 3차원 경계요소법에 의한 선형파괴역학의 수치해석용 program을 개발하여 유한판재에 존재하는 표면균열의 응력확대계수값을 계산 및 비교 검토하고, 나아가서 혼합 Mode 표면균열로 확장시켜 문제가 되고 있는 유한판재 내의 표면균열 결합평가의 해석에 유용한 응력확대계수의 解를 얻는 것을 목적으로 한다.

2. 경계적분방정식 및 기본解의 성질

탄성문제의 기초 경계적분방정식은 물체력을 고려하지 않을때 다음과 같이 된다.

$$C_{ij} u_j(P) + \int_r T_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_r U_{ij}^*(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (1)$$

여기서 $U_{ij}^*(P, Q)$, $T_{ij}^*(P, Q)$ 는 點 P에 i방향으로 단위집중력이 작용한 경우의 點 Q에서의 i방향의 기본解이고 다음 식으로 표시된다.

$$U_{ij}^*(P, Q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (2)$$

$$T_{ij}^*(P, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right\} \frac{\partial n}{\partial r} - (1-2\nu)(r_{,i}n_{,j} - r_{,j}n_{,i}) \quad (3)$$

여기서 $r_{,i}$, $r_{,j}$, $n_{,j}$, δ_{ij} 는 다음을 의미한다.

$r_{,i}$: 點 P와 點 Q의 거리

$r_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(Q_j - P_j) / r$ 인 방향여현

$n_{,j}$: 경계의 외향단위법선의 j방향성분

δ_{ij} : Kronecker Delta

따라서 內點(Inner Point) 계산에 필요한 3차원의 Kelvin 解⁽¹¹⁾는

$$U_{i,j,k}^*(P, Q) = \frac{1}{16\mu(1-\nu)r^2} [-r, i\delta_{jk} - r, j\delta_{ki} + (3-4\nu)r, k\delta_{ij} + 3r, ir, jr, k] \quad (4)$$

$$T_{i,j,k}^*(P, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} [3(r, i\delta_{jk} + r, j\delta_{ki} - 5r, ir, jr, k) \frac{\partial r}{\partial n} + 3r, ir, jr, k + (1-2\nu) \{ \delta_{ij}n_k + \delta_{jk}n_i - \delta_{ki}n_j + 3(-n_i r, jr, k + n_j r, kr, i - r, k\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n}) \}] \quad (5)$$

이다.

경계요소법에서는 Navier 미분방정식을 만족하는 기본해를 사용하므로 기본해에 대한 성질을 파악할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 간단하게 하기 위해 기본해(式(3))의 성질을 2차원문제로 고찰한다.

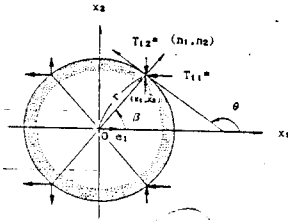


Fig.1 Fundamental solutions on a virtual boundary of radius r due to a unit load e₁ applied in the x₁ direction

Fig.1과 같이 무한판의 중심에 반경 r의 원형가상경계를 고려하면 단위집중력 e₁에 의한 가상경계상의 반력이 기본해 T₁₁^{*}, T₁₂^{*}이며 (θ-β)=π/2이다.

$$\begin{aligned} T_{11}^* &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} [2\cos^2\beta + (1-2\nu)] \\ &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} [\cos 2\beta + 2(1-\nu)] \\ T_{12}^* &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} 2\cos\beta \sin\beta \\ &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \sin 2\beta \end{aligned} \quad (6)$$

Fig.2는 원주상의 T₁₁^{*}와 T₁₂^{*}의 분포도이다. 원주 전체에 대해서 β₁=0, β₂=2π로 하면 원주 전체에 대한 T₁₁^{*}, T₁₂^{*}의 합력은

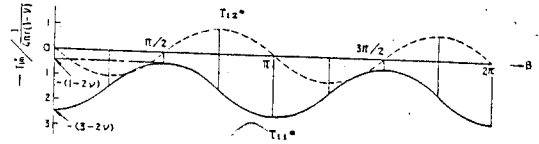


Fig.2 Distribution of fundamental solutions on a virtual boundary of radius r due to a unit load e₁ applied in the x₁ direction

$$\int_0^{2\pi} T_{11}^* r d\beta = -1 \quad x_1 \text{ 방향의 합력} = -1$$

$$\int_0^{2\pi} T_{12}^* r d\beta = 0 \quad x_2 \text{ 방향의 합력} = 0$$

으로 된다.

즉, T₁₁^{*}의 합력은 -1이므로 e₁과 평형을 이루고 있고 또한 T₁₂^{*}의 합력도 0이어서 이것도 평형으로 존재한다. 다음으로 단위집중력 e₁, e₂에 의한 기본해의 변위 u₁₁^{*}, u₁₂^{*}, u₂₁^{*}, u₂₂^{*}의 기준점에 대해서 조사해보면 Fig.3의 위치에서 지지되고 있다고 생각된다.

따라서 이상의 고찰을 정리하면

- (1) 단위집중력 e₁을 중심으로 하는 반경 r의 원주상의 T₁₁^{*}, T₁₂^{*}의 분포는 x₁축에 대해서 대칭이고 x₂축에 대해서는 비대칭으로 된다. 또한 e₂의 경우는 x₂축에 대해서 대칭, x₁축에 대해서는 비대칭으로 된다.
- (2) β₁-β₂의 원주상의 T₁₁^{*}, T₁₂^{*}의 합력은 반경 r에는 관계하지 않고, 즉 Fig.2에 나타낸 바와 같이 원주상의 T₁₁^{*}, T₁₂^{*}의 분포는 동일한 pattern으로 있고 크기는 1/r에 비례해서 감소한다.
- (3) 전체원주에 대한 합력은 T₁₁^{*}에 대해서는 -1, T₁₂^{*}에 대해서는 0이다.

이들의 합력은 e₁에 대한 반력으로 발생하는 것이다. 이반력은 r의 크기에는 관계하지 않는 일정한 값이다. 따라서 r→0의 극한이 집중력으로 있기 때문에 기본해의 계산식은 단위집중력에 의한 응력과 변위의 계산식으로 있는 것을 알 수 있다.

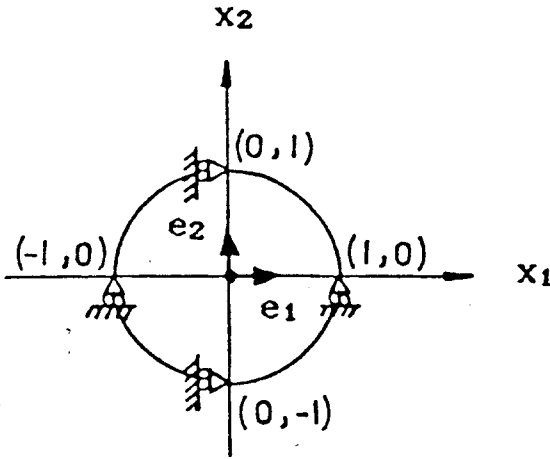


Fig. 3 Fundamental point for boundary displacement

3. 경계적분방정식의 이산화

4각형 선형요소를 체적력을 무시하여 N개의 요소로 분할한 이산화식⁽¹²⁾으로 표현하면 다음 식으로 된다.

$$C_{ij} u_j(P) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (7)$$

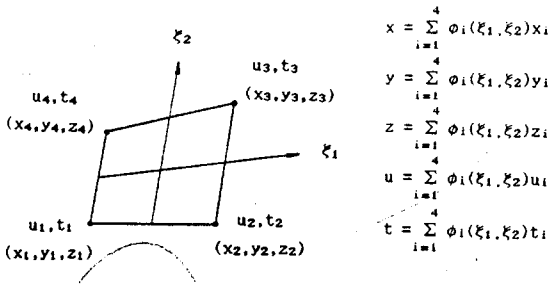


Fig. 4 Rectangular linear element (quadrilateral cells)

Fig. 4에 표시하는 바와 같이 함수값 u, t 는 -1에서 +1로 변화하는 무차원좌표 ξ_1, ξ_2 와 형상함수 $\phi_i(\xi_1,$

$\xi_2)$ 를 사용하여 요소분할수를 N으로 하면 각항은 다음과 같이 표시 되어진다.

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} T_{ij} u_j d\Gamma &= \iint_{\Gamma} [\phi_1(\xi_1, \xi_2) u_{j1} \\ &+ \phi_2(\xi_1, \xi_2) u_{j2} \\ &+ \phi_3(\xi_1, \xi_2) u_{j3} + \phi_4(\xi_1, \xi_2) \\ &u_{j4}] T_{ij} d\Gamma = u_{j1} \cdot h_{ij}^{(1)} + u_{j2} \cdot h_{ij}^{(2)} \\ &+ u_{j3} \cdot h_{ij}^{(3)} + u_{j4} \cdot h_{ij}^{(4)} \quad (8) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(1)} &= \iint_{\Gamma} \phi_1(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1-\xi_2) T_{ij} |J| \\ &d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Gamma} \phi_2(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1-\xi_2) T_{ij} |J| \\ &d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Gamma} \phi_3(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1+\xi_2) T_{ij} |J| \\ &d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(4)} &= \iint_{\Gamma} \phi_4(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1+\xi_2) T_{ij} |J| \\ &d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma &= \iint_{\Gamma} [\phi_1(\xi_1, \xi_2) t_{j1} + \\ &+ \phi_2(\xi_1, \xi_2) t_{j2} + \phi_3(\xi_1, \xi_2) t_{j3} + \phi_4(\xi_1, \xi_2) \\ &t_{j4}] U_{ij} d\Gamma \\ &= t_{j1} \cdot g_{ij}^{(1)} + t_{j2} \cdot g_{ij}^{(2)} + t_{j3} \cdot g_{ij}^{(3)} + t_{j4} \cdot g_{ij}^{(4)} \quad (9) \end{aligned}$$

여기서

$$g_{ij}^{(1)} = \iint_{\Gamma} \phi_1(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1-\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} g_{ij} &= \int \int_{\Gamma} \phi_2(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1-\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} g_{ij} &= \int \int_{\Gamma} \phi_3(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1+\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} g_{ij} &= \int \int_{\Gamma} \phi_4(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1+\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

|J| : 전체좌표계에서 정규좌표계로의 좌표변환 Jacobian

$$\begin{aligned} |J| &= \sqrt{\left[\frac{\partial y \partial z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial y \partial z}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2} \\ &\quad + \left[\frac{\partial z \partial x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial z \partial x}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial x \partial y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2} \end{aligned}$$

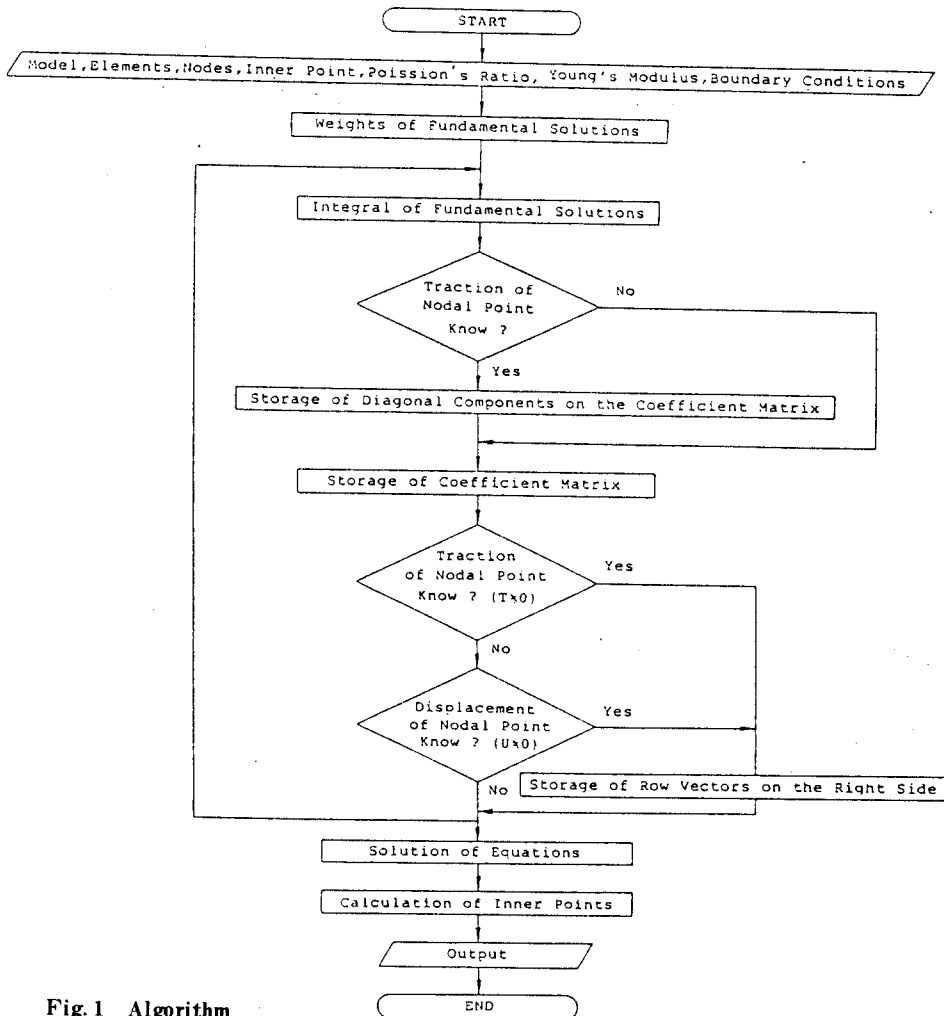


Fig. 1 Algorithm

이것에 의해 式(8), (9)를 경계상의 적분방정식 式(7)에 대입하면 다음과 같은 절점 i에 관한 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 C_{ij}u_j + \sum_{j=1}^N (h_{ij}^{(1)} \cdot u_{j1} + h_{ij}^{(2)} \cdot u_{j2} + h_{ij}^{(3)} \cdot u_{j3} + h_{ij}^{(4)} \cdot u_{j4}) \\
 = \sum_{j=1}^N (g_{ij}^{(1)} \cdot t_{j1} + g_{ij}^{(2)} \cdot t_{j2} + g_{ij}^{(3)} \cdot t_{j3} + g_{ij}^{(4)} \cdot t_{j4})
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

여기서 강제변위조건⁽¹³⁾ $h_{ii}^{(k)} = -\sum_{j=1}^N h_{ij}^{(k)}$ 으로 하여

절점에 관하여 정리하면

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_{ij}u_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{ij}t_j
 \tag{11}$$

이것을 간단히 표현하면

$$[H] \{u\} = [G] \{t\}
 \tag{12}$$

이다.

여기서 $\{u\}$ 는 전절점변위 Vector, $\{t\}$ 는 전절점표면력 Vector이다. 실제로 이산화한 적분방정식에 있어서는 특이적분은 式(12)의 Matrix대각성분으로 된다. $[H]$ 에 관해서는 강제변위조건을 사용하는 것에 의해 특이적분을 피해서 간접적으로 평가 가능하고 C_{ij} 는 자동적으로 결정된다.

4. 수치해석

3차원 경계요소법에 의한 수치해석용 Program의 Algorithm을 Fig. 5에 나타내며 그 효용성을 검증하기 위해 굽힘 응력장에서의 내점의 응력계산으로서 Fig. 6은 한변의 길이가 120의 정입방체를 면 ABFE에서 고정하고 면 CDHG에 굽힘을 발생하는 표면력이 주어진 문제로 정입방체의 대칭성을 이용하여 입방체의 중앙($X=Y=60$)인 직선 I-I' 응력분포를 구했다.

Fig. 7은 각 Model에 대한 요소분할을 나타낸 것으로 요소수 96, 절점수 98인 Model I, 직선 I-I'의 표면부분만을 한변의 길이 15인 정방형 요소로 한 요소수 120, 절점수 130의 Model II, 직선 I-I'의 표면부분만을 한변의 길이 7.5인 정방형요소로 한 요소수

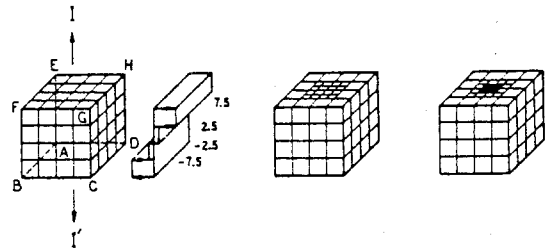
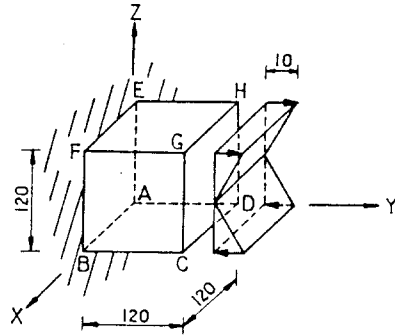
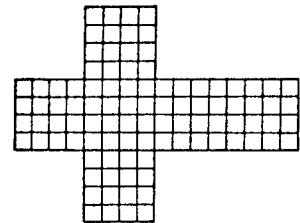
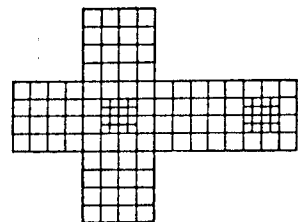


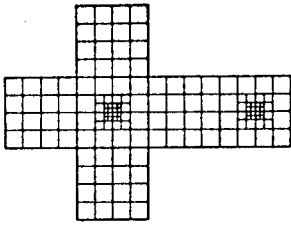
Fig. 6 Test problem geometry



(A) Model I



(B) Model II



(C) Model III

Fig.7 Test problem boundary segments

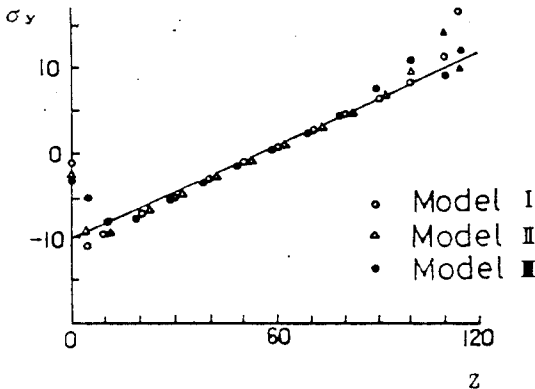


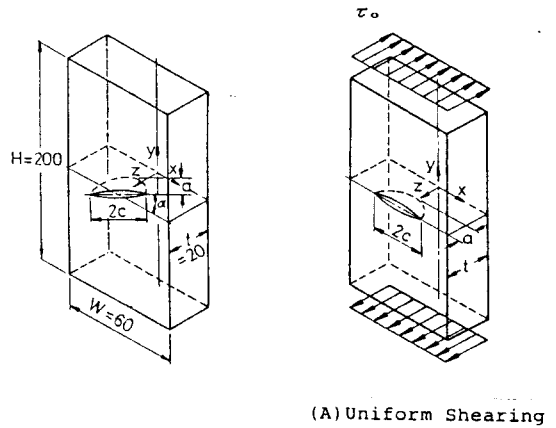
Fig.8 Stress values of inner point

144. 절점수 162인 Model III 으로 하여 계산한다. 경계조건으로는 면 ABFE의 요소는 XYZ방향의 모든 변위를 0으로하고 면 CDHG의 요소는 Y방향에 평행한 표면력을 작용시킨다. Fig. 8은 각 Model 의 내점의 계산결과를 나타낸 것이다.

직선 I-I'의 내점 계산결과 Y방향의 응력은 표면에서 떨어져 있는 내점의 오차는 작고 경계근방 즉 직선 I-I'의 표면에 가까운 내점에 있어서는 큰 오차를 나타내고 있으며 이것은 기본解의 1/r특이성으로도 알수 있다. 이들의 표면에 가까운 내점에서는 직선 I-I'의 표면치수를 작게 설정한 Model만큼 계산결과에 포함된 오차는 작게 된다.

대부분 표면균열의 연구는 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ$ 인 Mode I에 대한 해석이었으며 $\alpha=15^\circ-75^\circ$ 인 혼합 Mode에 대한 연구는 별로 찾아볼 수 없었다.

따라서 본 해석에서는 표면균열에 대한 것으로 Fig. 9와 같이 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ,$



(A)Uniform Shearing
Fig.9 Coordinate system and surface crack modeling

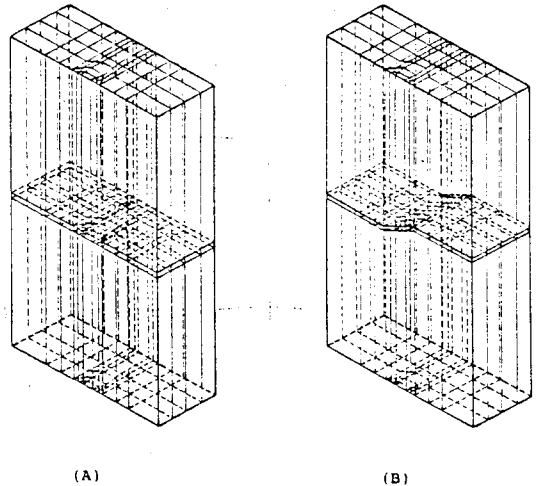


Fig.10 Surface crack modeling segments

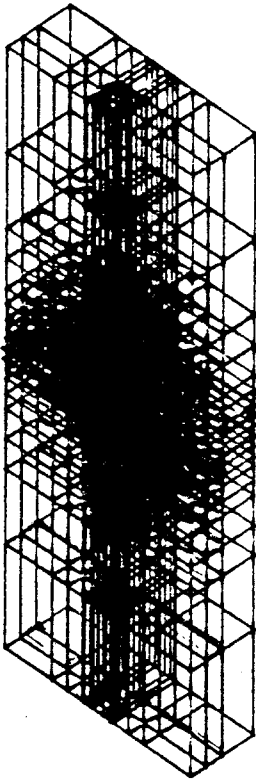
75°로 변화시킨 폭=60, 높이=200, 두께=20인 평판에 반타원 표면균열을 요소수 185, 절점수 196, 내점 (Inner Point)수 199로 요소분할하여 등분포전단의 하중조건으로 수치해석하였다.

Fig.10(A)는 $\alpha=0^\circ$ 에 대한 요소분할이며 (B)는 $\alpha=15^\circ-75^\circ$ 에 대한 요소분할을 나타낸 것이다. 또한 해석결과를 비교하기 위해 FEM Package(ALGOR SUPER SAP 386 Version)를 동일한 Model로하여 해석하였으며 Fig. 11은 요소수 876, 절점수 1264로 분할한 FEM의 요소분할을 나타낸 것이다.

응력확대계수값은 응력법과 변위법을 혼합한 접속의

삽법⁽⁷⁾ (Hybrid Extrapolation Method)을 사용하였으며 Crack의 비대칭성으로 인하여 평판전체를 요소분할 했다. 해석 Parameter는 Aspect Ratio (a/c)=0.2, 0.4, 0.6, 1.0의 4 종류로서 $a/t=0.2$ 이며 표면균열의 角度 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시켜 적용하여 표면균열 전체에서 角 ϕ 에 따라 해석했다.

지금 K_I, K_{II}, K_{III} 는 $F_I=K_I/[2\tau_0\sqrt{(\pi a/Q)}]$, $F_{II}=K_{II}/[2\tau_0\sqrt{(\pi a/Q)}]$, $F_{III}=K_{III}/[2\tau_0\sqrt{(\pi a/Q)}]$ 로 무차원화 했다.



여기서 $Q=[E(k)]^2$ 으로 $E(k)$ 는 제 2종완전타원적분식⁽¹⁴⁾ 즉, $k^2=1-(a/c)^2$,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi \text{이며,}$$

$$E(0) = \pi/2, E(1) = 1 \text{이다.}$$

경계요소법은 영역의 문제를 경계상의 방정식으로 변환해서 풀기 때문에 차원이 일차원 낮아지게 되고 문제를 풀기위하여 필요한 입력 Data는 유한요소법보다 적게되므로 Data의 준비와 Check에 시간과 노력이 크게 절약된다. 그러나 계산시간은 유한요소법의 Matrix가 Band형으로 되는 것에 대해서 경계요소법은 Full-Populated로 되기 때문에 큰 차이는 없었다. 사용된 Computer는 IBM PC-386(25 MHz, OS : DOS 4.01/UNIX V 3.2)이다. Fig. 12는 비교 검토를 위하여 반타원 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ$ 에 대해 등분포 인장을 작용시킬때 현재 표면균열의 해석에서 비교적 신뢰성이 높게 평가받고 있는 Raju등의 유한요소법에 의한 解, Smith등의 순차근사법에 의한 解와 FEM Package에 의한 해석결과를 도시한 것이다. Fig. 12로부터 전체적인 경향은 비교적 잘 일치하고 있지만 $a/c=0.2$ 에서 본 해석의 결과가 Raju등과 Smith등의 解 중간에 존재하는 것을 알수 있다. $a/c=0.4-1.0$ 에서 표면點($2\phi/\pi=0.0$)에서는 본 해석의 결과가 Raju등의 결과보다 높은 값을 나타내고 가장 깊은點($2\phi/\pi=1.0$)에서는 반대로 낮은 값을 나타내고 있으며 그 차이가 5%이내이다. 균열길이가 길어질수록 가장 깊은點에서의 F_I 값은 증가하고 있으나 표면點에서는 오히려 감소하는 경향을 보여주고 있다. 이것은 가장 깊은點의 영향으로부터 멀어지기 때문으로 생각된다.

4.1 등분포 전단

해석 Model 및 경계조건은 Fig. 9와 같다. Fig. 13 (A)-(F)는 해석 Parameter $a/c=0.2, 0.4, 0.6, 1.0$ 으로 하여 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 에 대한 해석결과와 비교를 위해 FEM Package를 사용하여 $a/c=1.0$ 일때의 결과를 도시한 것이다. Fig. 13으로부터 균열선단에 따라 크게 변화하는 F_{II}, F_{III} 외에 작은 F_I 이 존재하는 지극히 복잡한 혼합 Mode 상태인 것을 알수 있다.

F_I 값은 균열선단에 따라서 α 의 크기에 관계없이 가장 깊은點($2\phi/\pi=1.0$)에서부터 증가하기 시작하여 표면點($2\phi/\pi=0.0$)에서 큰 값을 나타내는 경향을 보여주고 있으며, Aspect Ratio에 따라서는 1.0일때 가장 큰 값을 나타내고 있다.

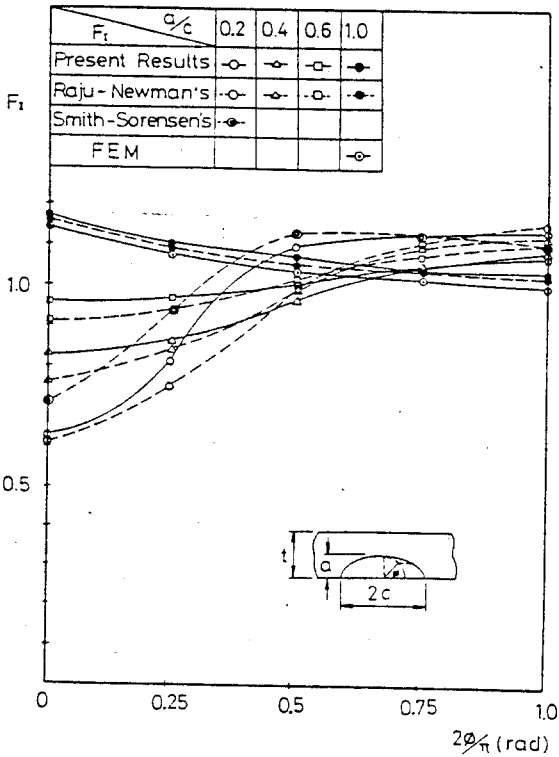


Fig. 12 F versus $2\phi/\pi$ for various a/c (uniform tension)

또한 α 가 증가할수록 미소하게 증가하고 있다. F_{II} 값은 균열선단에 따른 변화를 주목해보면 표면점에서 minus값을 가지며 이후 급격하게 증가하기 시작하여 가장 깊은점에서는 매우 큰 값을 나타내고 Aspect Ratio 1.0일때 가장 큰 값을 나타낸다. α 의 변화에 따르는 조사를 해보면 α 이 증가할수록 표면점의 절대치는 크고 가장 깊은 점에서는 $\alpha=75^\circ$ 일때 $a/c=1.0$ 에서 $F_{II}=2.33$ 이라는 최대값을 나타내고 있다. F_{III} 값은 균열선단에 따라서 α 가 크기에 관계없이 표면점에서 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ 으로 되기 때문에 Zero로 된다. Aspect Ratio에 따라서는 0.2일때 가장 큰 값을 나타낸다. 따라서 등분포 전단의 하중조건에서는 α 가 증가할수록 응력확대계수는 크고 특히 Mode II, Mode III의 영향이 강한 것을 알 수 있다.

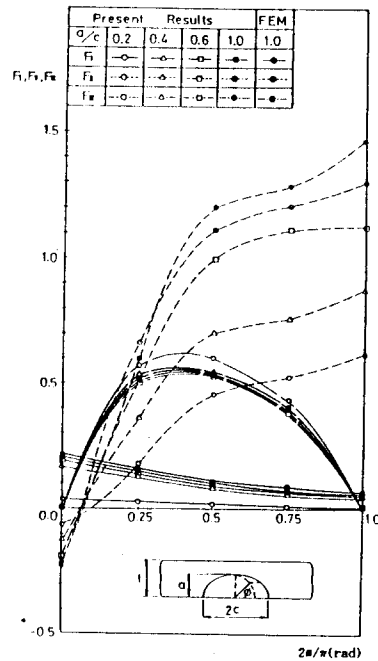
또한 $a/c=1.0$ 에서 FEM Package 값과 5%이내의 차이를 나타내고 있으며 Fig. 14는 $a/c=1.0$ 에서의

FEM에 의한 Stress contours를 나타낸 것으로 가장 깊은 점의 응력등고선 밀도가 조밀하고 α 가 증가할수록 표면점의 응력등고선은 거의 나타나지 않음을 알 수 있다.

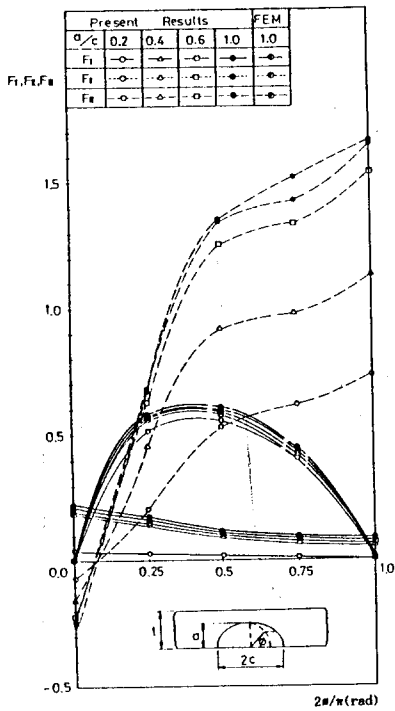
5. 결론

경계요소법을 적용하여 3차원 문제인 표면균열을 등분포전단에 대해서 해석하고 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시켜 혼합 Mode인 표면균열로 확장하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

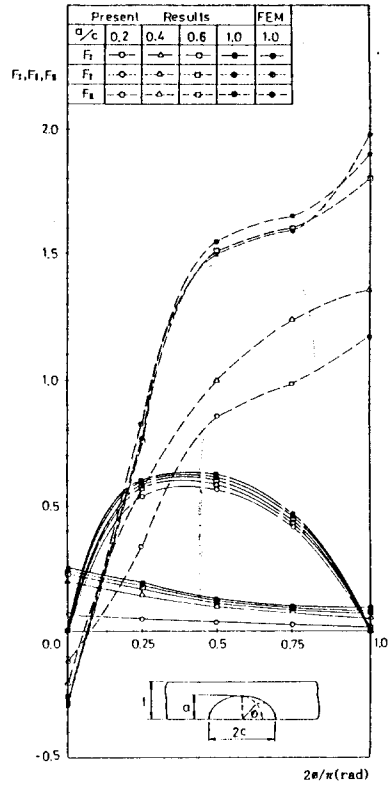
- (1) 등분포전단은 균열선단에 따라 크게 변화하는 F_{II}, F_{III} 외에 작은 F_I 이 존재하는 지극히 복잡한 혼합 Mode 상태인 것을 알 수 있다.
- (2) F_{II} 값은 α 가 증가할수록 표면점에서 부터 급격하게 증가하기 시작하여 가장 깊은 점에서,



(A) Surface Crack ($\alpha=0^\circ$)



(B) Surface Crack ($\alpha=15^\circ$)



(C) Surface Crack ($\alpha=30^\circ$)

Fig. 13 Versus $2\phi/\pi$ for various a/c (uniform shearing)

$a/c=1.0$ 일때, 최대값을 나타내고 F_{III} 값은 α 의 증가에 관계없이 표면點에서는 Zero이고 이후 증가하기 시작하여 $\phi=\pi/4$ 근방에서 최대값을 나타내며 다시 감소하기 시작하여 가장 깊은點에서 零으로 된다.

(3) 본 해석으로 혼합 Mode 표면균열의 F_I , F_{II} , F_{III} 를 계산했으며 이상의 결과 중첩법을 이용하여 용접부의 잔류응력 해석이 가능할 것이다. 따라서 경계요소법은 복잡한 기하학적 형상을 가진 3차원문제에 효율적이다.

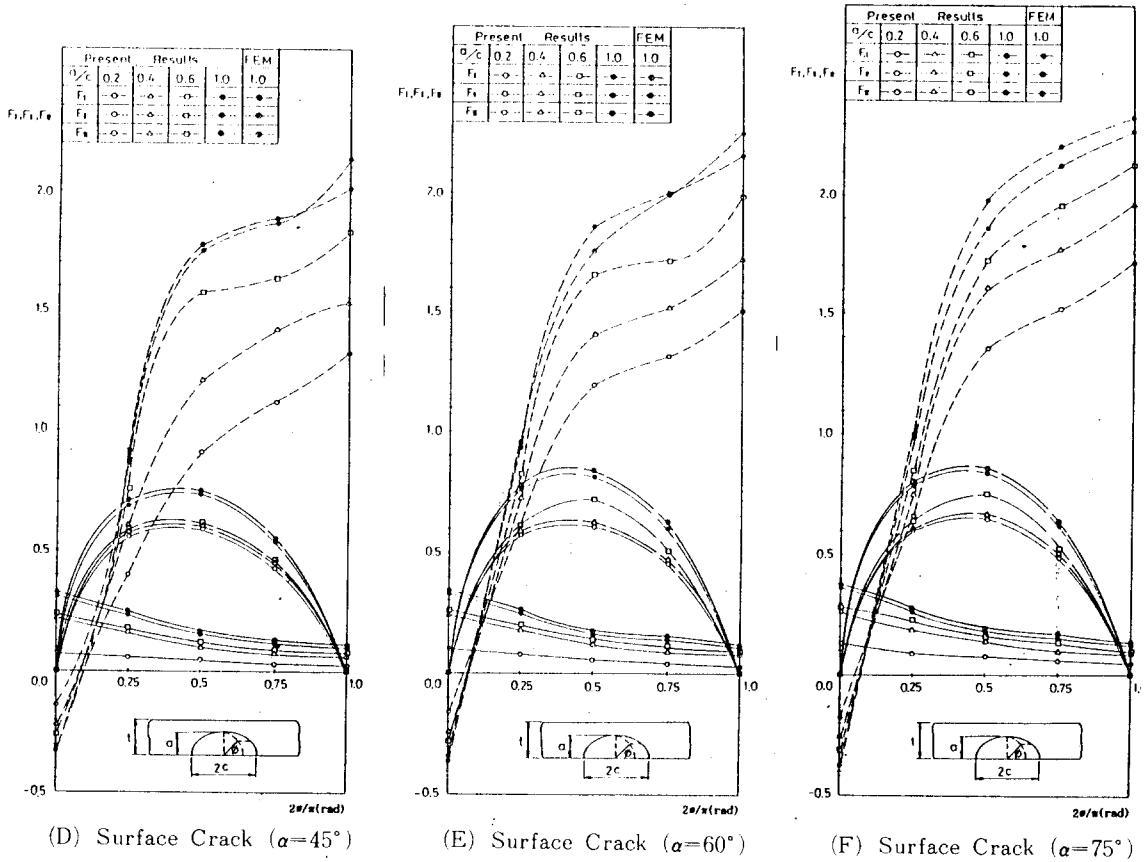
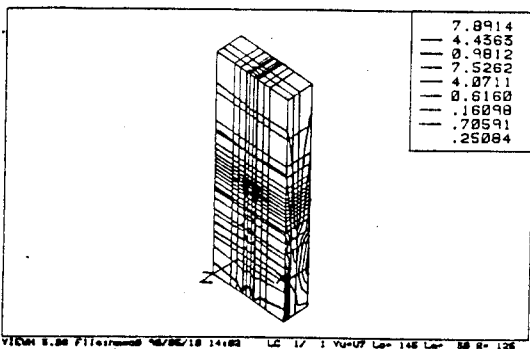
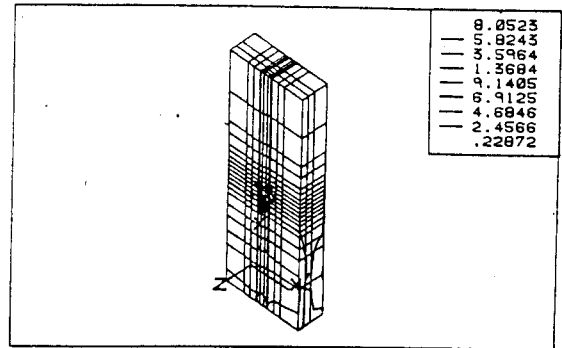


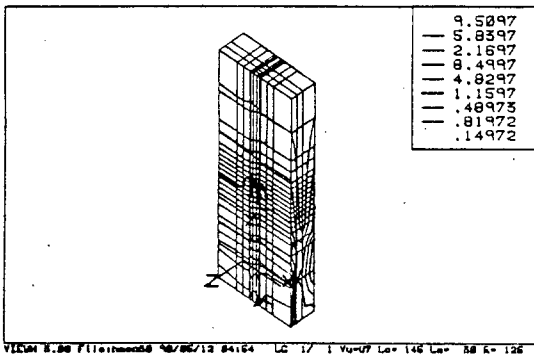
Fig. 13 F versus $2\phi/\pi$ for various a/c (uniform shearing)



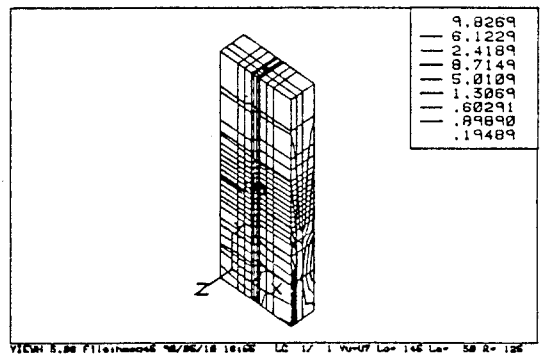
(A) Surface Crack ($\alpha=0^\circ$)



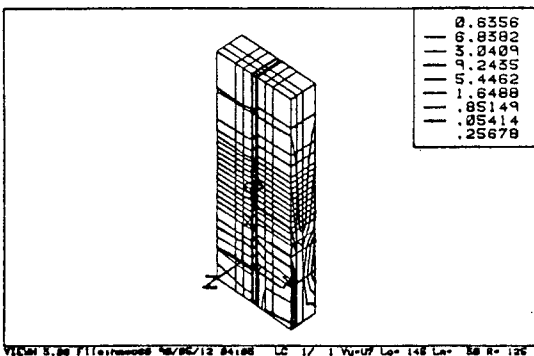
(B) Surface Crack ($\alpha=15^\circ$)



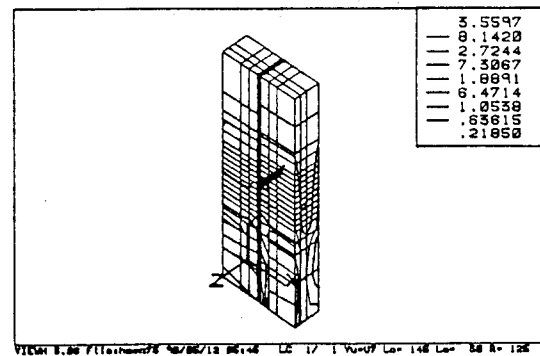
(C) Surface Crack ($\alpha=30^\circ$)



(D) Surface Crack ($\alpha=45^\circ$)



(E) Surface Crack ($\alpha=60^\circ$)



(F) Surface Crack ($\alpha=75^\circ$)

Fig.14 Contours for in the surface cracks obtained using ALGOR SUPERSAP for post processing (uniform shearing)

참고문헌

- (1) Irwin, G. R., "Crack-extension Force for a Part-through Crack in a Plate", Trans. ASME., J. Appl. Mech., 1962, pp. 651-654
- (2) Shah, R. C. and Kobayashi, A. S., "Stress Intensity Factors for an Elliptical Crack Approaching the Surface of a Semi-infinite Solid", Int. J. Fract., Vol. 9, No. 2, 1973, pp. 133-146.
- (3) Smith, F. W. and Sorensen, D. R., "The Semi-elliptical Surface Crack-A Solution by the Alternating Method", Int. J. Fract., Vol. 12, No. 1, 1976, pp. 47-57.
- (4) Kathiresan, K., "Three-dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics Analysis by a

- Displacement Hybrid Finite Element Model", Ph. D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1976.
- (5) Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr., "Stress-intensity Factors for a Wide of Semi-elliptical Surface Cracks in Finite-thickness Plate", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 11, 1979, pp. 817-829.
- (6) Newman, J. C., Jr., "Fracture Analysis of Surface and Through-cracked Sheets and plates", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 5, 1973, pp. 667-689.
- (7) 結成良治, 木顔 博行, 松本敏郎, "境界要素法における應力擴大係數の決定法", 第1會 境界要素法シンポジウム, 1984, pp. 85-90.
- (8) Nisitani, H. and Murakami Y., "Stress Intensity Factors of an Elliptical Crack or a Semi-elliptical Crack Subject to Tension", *Int. J. Fract.*, Vol. 10, No. 3, 1974, pp. 353-368.
- (9) 石田 誠, 野口 博司, "體積方法による 三次元キ裂問題の解析について", 日本機械學會論文集, Vol. 49, No. 442, 1983, pp. 707-716.
- (10) 渡邊勝彦, 久田俊明, 平野八州男, 北川英夫, "三次元キ裂問題の 光弾性實驗による解析", 日本機械學會論文集, Vol. 44, No. 388, pp. 4040-4051.
- (11) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. C., "Boundary Element Techniques," Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 180-233.
- (12) Banerjee, P. K. and Butterfield, R., "Boundary Element Methods in Engineering Science", McGraw-Hill, New York, 1981, pp. 138-165.
- (13) Lachat, J. C. and Waton, J. O., "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-dimensional Elastostatics", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 991-1005.
- (14) Cruse, T. A., "Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics", Kluwer Academic, Dordrecht, 1988, pp. 45-55.