

모우드 파라미터 산출 알고리즘에 관한 연구

黃元杰, 奇昌斗, 金鍾燁

A Study on a Modal Parameter Estimation Algorithm

Won-Gul Hwang, Chang-Doo Kee, Jong-Yeop Kim

ABSTRACT

A new curve fitting algorithm based on modal analysis is introduced for extracting the modal parameters from the measured frequency responses. To compensate the effect of cut-off frequency ranges the transfer function including residual mass and residual flexibility is employed.

Modal parameters are computed from the newly defined form of transfer function in a simple way. The accuracy of this algorithm is proved by applying to the 3 degrees of freedom model and vibration of cantilever beam.

1. 서 론

모우드 해석은 시스템의 동특성을 해석하기 위하여, 모우드 파라미터를 결정하고 결정된 파라미터를 이용하여 구조물의 동특성을 기술하는 수학적인 모델을 만드는 과정이다. 모우드 해석을 이용하여 산출한 모델은 유한요소법과 같은 이론적인 방법으로 산출한 모델을 실험적으로 검증하거나 측정된 응답으로부터 가진력의 예측, 복잡한 하중을 받는 구조물의 응답등을 예측하는데 이용된다. 또 구조물의 구조변경에 대한 영향과 다른 부분들을 결합했을 때의 영향을 예측하거나, 구조물의 진동, 소음 등을 해석하는데도 이용될 수 있다.

근래 다양한 FFT 분석기의 보급과 더불어 주파수 응답법이 실험적 모우드 해석에서 널리 사용되고 있다. 주파수 응답법은 주파수 영역에서 주어지는 전달함수로부터 커브피팅 등과 같은 근사화 방법을 이용하여 모우드 파라미터를 구하는 방법으로 정확한 모우드 파라미터의 산출을 위하여 비선형 최소자승법과 대형 컴퓨터를 이용하거나[3], 신속한 해석을 위해 FFT 분석기에 하드웨어를 추가로 설치하여 단일 모우드 피팅법으로 실수 모우드 해석을 행하고 있다. 또한 최근에는 정확성과 신속성을 동시에 얻기 위한 효과적인 방법들이 계속 개발되고 있다. [1, 5]

본 연구에서는 실험적 모우드 해석시 필요한 커브 피팅과 관련하여 복소 모우드 해석을 행하되, 보다 정확하게 모우드 파라미터를 산출하고 계산속도와 계산량을 줄일 수 있는 알고리즘을 제시함으로써 정확성과 신속성을 동시에 개선하였다. 그리고 3자유도 시스템의 시뮬레이션과 외팔보의 실험에 의하여 제시한 알고리즘의 유용성을 검증하였다.

2. 전달함수와 모우드 파라미터

기계구조물의 j점을 가진 점, i점을 변위의 측정점으로 할 때, 잘 알려진 바와 같이 주파수 응답함수는 다음과 같다.

$$\frac{X_i}{F_j} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Psi_{ik} \cdot \Psi_{jk}}{a_k(i\omega - \lambda_k)} + \frac{\Psi_{ik}^* \cdot \Psi_{jk}^*}{a_k^*(i\omega - \lambda_k^*)} \right] \dots\dots\dots (2-1)$$

여기서 $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ 와 $\lambda_k^* = \mu_k - i\nu_k$ 는 공액복소수이고, μ_k 는 감쇠계수, ν_k 는 감쇠 고유진동수이다. 식 (2-1)에서

$$\frac{\Psi_{ik} \cdot \Psi_{jk}}{a_k} = U_{\nu k} + iV_{\nu k} \dots\dots\dots (2-2)$$

$$\frac{\Psi_{ik}^* \cdot \Psi_{jk}^*}{a_k^*} = U_{\nu k} - iV_{\nu k}$$

라 하면, Ψ_{ik} , Ψ_{jk} , Ψ_{ik}^* , Ψ_{jk}^* 는 변위의 복소벡터 성분이므로, 파라미터 $U_{\nu k}$, $V_{\nu k}$ 는 j점을 가진했을 때의 i점의 상대진폭을 나타내며, 모우드 상수(modal constant)라 한다.

이들 모우드 파라미터를 이용한 전달함수는 식 (2-3)과 같이 표현되며,

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{U_k + iV_k}{i\omega - (\mu_k + i\nu_k)} + \frac{U_k - iV_k}{i\omega - (\mu_k - i\nu_k)} \right] \dots\dots\dots (2-3)$$

모우드 k에서의 고유진동수 ω_{ok} 와 감쇠비 ξ 는 각각 다음과 같다.

$$\omega_{ok} = \sqrt{\mu_k^2 + \nu_k^2} \dots\dots\dots (2-4)$$

$$\xi = \frac{-\mu_k}{\omega_{ok}} \dots\dots\dots (2-5)$$

실제의 구조물을 해석할 때는 관심의 대상이 되는 측정 가능한 주파수 범위에서만 해석을 해하며, 해석 주파수 이상이나 이하의 영역에서는 잔여항을 이용하여 근사적으로 처리한다. 모우드 m1에서 모우드 m2까지 해석주파수 범위를 제한한다면, 일반적으로 Compliance는 다음과 같이 가정된다.

$$C(i\omega) = \sum_{k=1}^{m1-1} + \sum_{k=m1}^{m2} + \sum_{k=m2+1}^{\infty}$$

$$\left[\frac{U_k + iV_k}{i\omega - (\mu_k + i\nu_k)} + \frac{U_k - iV_k}{i\omega - (\mu_k - i\nu_k)} \right]$$

$$= \frac{-1}{M_r \omega^2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{U_k + iV_k}{i\omega - (\mu_k + i\nu_k)} + \frac{U_k - iV_k}{i\omega - (\mu_k - i\nu_k)} \right] + S_r \dots\dots\dots (2-6)$$

식 (2-6)에서 M_r 을 질량 보정항(residual mass), S_r 을 강성 보정항(residual flexibility)이라 하며, 첫 번째 항은 해석주파수 범위보다 낮은 모우드들의 영향에 대한 보정항이고, 세번째 항은 해석주파수 범위보다

높은 모우드들의 영향에 대한 보정항이다. 여기서 μ , ν_k , M_r , S_r , U_k , V_k 를 총칭하여 모우드 파라미터라 한다.

Compliance $C(i\omega)$ 와 Accelerance $A(i\omega)$ 는 다음과 같은 관계가 있으므로

$$A(i\omega) = -\omega^2 C(i\omega) \dots\dots\dots (2-7)$$

Compliance에서의 질량보정항 $-1/M_r \omega^2$ 은 Accelerance의 식에서는 $1/M_r$ 이 되고, 강성보정항 S_r 은 Accelerance에서는 $-S_r \omega^2$ 이 된다. [7]

3. 커브피팅에 의한 모우드 파라미터의 유도

커브피팅이란 실험으로 측정된 주파수응답 데이터 값을 최적으로 표현하는 수학적인 모델, 즉 두개의 다항식의 비로 표현된 전달함수(FRF)의 계수를 결정하고, 이 전달함수로부터 각 모우드에서의 모우드 파라미터를 산출하는 방법이다.

3.1 커브 피팅 방법

보통 실험에서 측정하는 값은 가속도이므로 FRF로서 Accelerance를 고려하자. 실험에서 측정된 FRF의 임의의 주파수 ω 에서의 값을 $G(i\omega)$ 라 하면 이를 실수부와 허수부로 나누어 식 (3-1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(i\omega) = G_r(i\omega) + iG_i(i\omega) \dots\dots\dots (3-1)$$

따라서 $G(i\omega)$ 를 최적으로 표현하는 FRF는 다음과 같이 다항식의 비로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H(i\omega) &= \frac{A_0 + A_1(i\omega) + A_2(i\omega)^2 + A_3(i\omega)^3 + \dots\dots}{B_0 + B_1(i\omega) + B_2(i\omega)^2 + B_3(i\omega)^3 + \dots\dots} \\
 &= \frac{A_0 + A_2(i\omega)^2 + \dots\dots + A_{2n+2}(i\omega)^{2n+2}}{B_0 + B_2(i\omega)^2 + \dots\dots + B_{2n}(i\omega)^{2n}} \\
 &= \frac{(A_0 + A_2(i\omega)^2 + \dots\dots + A_{2n+2}(i\omega)^{2n+2})}{(B_0 + B_2(i\omega)^2 + \dots\dots + B_{2n}(i\omega)^{2n})} \\
 &= \frac{\alpha + i\omega\beta}{a + i\omega b} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} = H_r(i\omega) + iH_i(i\omega) \\
 &\dots\dots\dots (3-2)
 \end{aligned}$$

측정치 $G(i\omega)$ 와 $H(i\omega)$ 의 차는 커브피트 오차로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 e_0(i\omega) &= G(i\omega) - H(i\omega) \\
 &= (G_r(i\omega) - \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}) \dots\dots\dots (3-3)
 \end{aligned}$$

모든 측정점에서 $e_0(i\omega)$ 의 제곱의 합을 E_0 라 하면

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \sum |e_0(i\omega)|^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{pno} \{ [G_r(i\omega_k) - H_r(i\omega_k)]^2 + [G_i(i\omega_k) - H_i(i\omega_k)]^2 \} \dots\dots\dots (3-4)
 \end{aligned}$$

로 된다. 여기에서 pno는 측정점의 갯수이며, $G(i\omega)$ 를 최적으로 표현하는 전달함수 $H(i\omega)$ 를 구하기 위하여는 E_0 를 최소화시키는 다항식의 계수 A_{j1} , B_{j2} , $j1=0, 1, \dots, 2n+2$, $j2=0, 1, \dots, 2n$ 을 결정하면 된다. 즉 E_0 를 최소화시키는 필요조건은 식 (3-5)와 같으므로,

$$\frac{\partial E_0}{\partial A_{j1}} = 0, \quad \frac{\partial E_0}{\partial B_{j2}} = 0 \dots\dots\dots (3-5)$$

$$j1=0, 1, \dots, 2n+2, \quad j2=0, 1, \dots, 2n$$

이 방정식으로부터 미정계수 A_{j1} , B_{j2} , $j1=0, 1, \dots, 2n+2$, $j2=0, 1, \dots, 2n$ 을 산출한다.

그러나 이 결과식은 비선형 방정식이 되므로, $e_0(i\omega)$ 에 가중함수 $D(i\omega)$ 를 곱하고, 미정함수 $D_0(i\omega)$ 를 새로운 오차 $e(i\omega)$ 를 식 (3-6)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 e(i\omega) &= \frac{D(i\omega) \cdot e_0(i\omega)}{D_0(i\omega)} \\
 &= \frac{D(i\omega) \cdot G(i\omega) - N(i\omega)}{D_0(i\omega)} \dots\dots (3-6)
 \end{aligned}$$

여기서 $D(i\omega)$ 와 $D_0(i\omega)$ 가 거의 같으면 $e(i\omega)$ 는 $e_0(i\omega)$ 에 매우 근접하게 되므로, 새로 정의한 $\sum |e(i\omega)|^2$ 를 최소화시키는 다항식의 각 계수를 구하면 된다.

어떤 주파수 ω_k 에서의 오차를 e_k 라 하고 $E_k = |e_k|^2$ 이라 하면

$$e_k = \frac{D(i\omega_k) \cdot G(i\omega_k) - N(i\omega_k)}{D_0(i\omega_k)} \dots\dots\dots (3-7)$$

$$E_k = |e_k|^2 = |D(i\omega_k) G(i\omega_k) - N(i\omega_k)|^2 \cdot W_k$$

..... (3-8)

여기서

$$W_k = \left| \frac{1}{D_0(i\omega_k)} \right|^2 \dots\dots\dots (3-9)$$

이다. 따라서 pno개의 모든 측정점에서 E_k의 합을 E라 하면

$$E = \sum_{k=1}^{pno} |D(i\omega_k) G(i\omega_k) - N(i\omega_k)|^2 \cdot W_k \dots\dots\dots (3-10)$$

로 되고

$$N(i\omega_k) = (A_0 + A_2(i\omega_k)^2 + \dots\dots + A_{2n+2}(i\omega_k)^{2n+2}) + (i\omega_k) (A_1 + A_3(i\omega_k)^2 + \dots\dots + A_{2n+1}(i\omega_k)^{2n}) = a_k + (i\omega_k) b_k$$

$$D(i\omega_k) = (B_0 + B_2(i\omega_k)^2 + \dots\dots + B_{2n}(i\omega_k)^{2n}) + (i\omega_k) (B_1 + B_3(i\omega_k)^2 + \dots\dots + B_{2n-1}(i\omega_k)^{2n-2}) = a_k + (i\omega_k) b_k$$

$$G(i\omega_k) = G_{rk} + iG_{ik} \dots\dots\dots (3-11)$$

이므로 E를 다시 쓰면 식 (3-12)와 같이 된다.

$$E = \sum_{k=1}^{pno} [(a_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot b_k \cdot G_{ik} - \alpha_k)^2 + (a_k \cdot G_{ik} + \omega_k \cdot b_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot \beta_k)^2] \cdot W_k \dots\dots\dots (3-12)$$

E를 최소화시키는 미정계수 A_{j1}, B_{j2}를 구하기 위한 필요조건은

$$\frac{\partial E}{\partial A_0} = \sum_{k=1}^{pno} [-2(a_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot b_k \cdot G_{ik} - \alpha_k)] \cdot W_k = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A_1} = \sum_{k=1}^{pno} [-2 \cdot \omega_k (a_k \cdot G_{ik} + \omega_k \cdot b_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot \beta_k)] \cdot W_k = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A_2} = \sum_{k=1}^{pno} [2 \cdot \omega_k^2 (a_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot b_k \cdot G_{ik} - \alpha_k)] \cdot W_k = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A_3} = \sum_{k=1}^{pno} [2 \cdot \omega_k^3 (a_k \cdot G_{ik} + \omega_k \cdot b_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot \beta_k)] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-13)$$

$$- \omega_k \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-13)$$

∴ ∴

$$\frac{\partial E}{\partial B_1} = \sum_{k=1}^{pno} [-2 \cdot \omega_k^2 \cdot b_k \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) - 2 \cdot \omega_k \cdot G_{ik} \cdot \alpha_k + 2 \cdot \omega_k^2 \cdot G_{rk} \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial B_2} = \sum_{k=1}^{pno} [-2 \cdot \omega_k^2 \cdot a_k \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) + 2 \cdot \omega_k^2 \cdot G_{rk} \cdot \alpha_k + 2 \cdot \omega_k^3 \cdot G_{ik} \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial B_3} = \sum_{k=1}^{pno} [-2 \cdot \omega_k^4 \cdot b_k \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) - 2 \cdot \omega_k^3 \cdot G_{ik} \cdot \alpha_k + 2 \cdot \omega_k^4 \cdot G_{rk} \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-14)$$

이 되며 이를 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1) m=0, 2, 4, ..., 2n+2일 때 :

$$\frac{\partial E}{\partial A_m} = \sum_{k=1}^{pno} [(-1)^{m/2+1} \cdot 2 \cdot \omega_k^m \cdot (a_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot b_k \cdot G_{ik} - \alpha_k)] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-15)$$

2) m=1, 3, 5, ..., 2n+1일 때 :

$$\frac{\partial E}{\partial A_m} = \sum_{k=1}^{pno} [(-1)^{(m+1)/2} \cdot 2 \cdot \omega_k^m \cdot (a_k \cdot G_{ik} + \omega_k \cdot b_k \cdot G_{rk} - \omega_k \cdot \beta_k)] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-16)$$

3) m=1, 3, 5, ..., 2n-1일 때 :

S = (-1)^{(m-1)/2}라 하면

$$\frac{\partial E}{\partial B_m} = \sum_{k=1}^{pno} [2 \cdot S \cdot \omega_k^{m+1} \cdot b_k \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) + 2 \cdot S \cdot \omega_k^m \cdot G_{ik} \cdot \alpha_k - 2 \cdot S \cdot \omega_k^{m+1} \cdot G_{rk} \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-17)$$

4) m=2, 4, ..., 2n일 때 :

S = (-1)^{m/2}라 하면

$$\frac{\partial E}{\partial B_m} = \sum_{k=1}^{pno} [2 \cdot S \cdot \omega_k^m \cdot a_k \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) - 2 \cdot S \cdot \omega_k^m \cdot G_{rk} \cdot \alpha_k - 2 \cdot S \cdot \omega_k^{m+1} \cdot G_{ik} \cdot \beta_k] \cdot W_k = 0 \dots\dots\dots (3-18)$$

윗 식들을 간단히 표시하기 위해 변수 P_h, S_h, T_h, U_h 를 각각 다음과 같이 정의하면,

$$\begin{aligned}
 P_h &= \sum_{k=1}^{pno} \omega_k^h \cdot W_k \\
 S_h &= \sum_{k=1}^{pno} \omega_k^h \cdot G_{rk} \cdot W_k \\
 T_h &= \sum_{k=1}^{pno} \omega_k^h \cdot G_{ik} \cdot W_k \\
 U_h &= \sum_{k=1}^{pno} \omega_k^h \cdot (G_{rk}^2 + G_{ik}^2) \cdot W_k
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3-19)$$

식 (3-15) ~ (3-18)를 식 (3-20)과 같이 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 P_0 & 0 & -P_2 & 0 & P_4 & \dots & T_1 & S_2 \\
 0 & P_2 & 0 & -P_4 & 0 & \dots & -S_2 & T_3 \\
 P_2 & 0 & -P_4 & 0 & P_6 & \dots & T_3 & S_4 \\
 0 & P_4 & 0 & -P_6 & 0 & \dots & -S_4 & T_5 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \dots & U_2 & 0 \\
 S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \dots & 0 & U_4 \\
 T_3 & -S_4 & -T_5 & S_7 & T_7 & \dots & U_4 & 0 \\
 S_4 & T_5 & -S_6 & -T_8 & S_8 & \dots & 0 & U_6 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 -T_3 & -S_4 & \dots \\
 S_4 & -T_5 & \dots \\
 -T_5 & -S_6 & \dots \\
 S_6 & -T_7 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 -U_4 & 0 & \dots \\
 0 & -U_6 & \dots \\
 -U_6 & 0 & \dots \\
 0 & -U_8 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_0 \\
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 \vdots \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4 \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 S_0 \\
 T_4 \\
 S_2 \\
 T_3 \\
 \vdots \\
 0 \\
 U_2 \\
 0 \\
 U_4 \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 = \quad (3-20)$$

즉

$$[A] \{X\} = [B] \quad \dots\dots\dots (3-21)$$

와 같은 형태로 되어 이 연립방정식을 풀면 미정계수 A_{j1}, B_{j2} 를 계산할 수 있다. 반복 계산에서 D_0

($i\omega$)의 초기값은 1로 가정하여 계산하고, 여기서 얻은 $D(i\omega)$ 를 다음 단계의 $D_0(i\omega)$ 로 이용한다. 원하는 정확도에 이를 때까지 위의 절차를 반복하여 다항식의 미정계수 A_{j1}, B_{j2} 를 산출한다.

3.2 모우드 파라미터의 유도

모우드 파라미터는 실험으로 측정된 전달함수의 주파수응답 데이터 $G(i\omega)$ 와 수학적인 모델 $H(i\omega)$ 로부터 산출할 수 있다. 즉 식 (3-2)의 $H(i\omega)$ 를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}
 H(i\omega) &= \\
 &= \frac{C_0 + C_1(i\omega) + \dots + C_{2n+1}(i\omega)^{2n+1}}{B_0 + B_1(i\omega) + \dots + B_{2n}(i\omega)^{2n}} \\
 &\quad + \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}}(i\omega)^2 \\
 &= \frac{L_0 + L_1(i\omega) + \dots + L_{2n}(i\omega)^{2n}}{B_0 + B_1(i\omega) + \dots + B_{2n}(i\omega)^{2n}} \\
 &\quad + \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}}(i\omega)^2 + \frac{C_{2n+1}}{B_{2n}}(i\omega) \\
 &= \frac{M_0 + M_1(i\omega) + \dots + M_{2n-1}(i\omega)^{2n-1}}{B_0 + B_1(i\omega) + \dots + B_{2n}(i\omega)^{2n}} \\
 &\quad + \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}}(i\omega)^2 + \frac{C_{2n+1}}{B_{2n}}(i\omega) + \frac{L_{2n}}{B_{2n}} \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1, \quad C_0 = L_0 = A_0, \quad C_1 = A_1, \\
 C_j &= A_j - B_{j-2} \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}}, \quad j=2, \dots, 2n+1 \\
 L_j &= C_j - B_{j-1} \frac{C_{2n+1}}{B_{2n}}, \quad j=1, \dots, 2n \\
 M_j &= L_j - B_j \frac{L_{2n}}{B_{2n}}, \quad j=2, \dots, 2n-1
 \end{aligned}$$

이며, 식 (2-6)과 식 (3-22)를 비교하면 식 (3-22)의 ($i\omega$)항인 세번째 항이 0이 되어야 하므로 $C_{2n+1}=0$ 으로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$A_{2n+2} = A_{2n+1} \frac{B_{2n}}{B_{2n-1}} \quad \dots\dots\dots (3-23)$$

따라서 식 (3-2)는 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H(i\omega) &= \frac{M_0 + M_1(i\omega) + \dots + M_{2n-1}(i\omega)^{2n-1}}{B_0 + B_1(i\omega) + \dots + B_{2n}(i\omega)^{2n}} + \frac{L_{2n}}{B_{2n}} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \quad \dots (3-24) \\
 &+ \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}}(i\omega)^2 + \frac{L_{2n}}{B_{2n}} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \quad \dots (3-24)
 \end{aligned}$$

미정계수 A_{2n+2} 는 식 (3-23)에 의하여 계산되며, 나머지 미정계수는 커브피팅에 의해서 계산된다. 감쇠 계수 μ_k 와 감쇠 고유진동수 ν_k 는 식 (3-24)의 분모를 0으로 한 다음 방정식을 풀어 산출한다.

$$D(i\omega) = 0 \quad \dots \dots \dots (3-25)$$

식 (3-25)의 해는 $\mu_k + i\nu_k$, $\mu_k - i\nu_k$ 와 같은 형태가 되어, 감쇠계수 μ_k 와 ν_k 를 산출할 수 있다. 또한 식 (3-24)서 강성 보정항 S_r 과 질량 보정항 M_r 은 다음과 같이 산출한다.

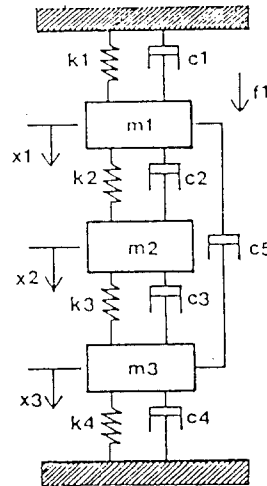
$$S_r = \frac{A_{2n+2}}{B_{2n}} \quad \dots \dots \dots (3-26)$$

$$M_r = \frac{L_{2n}}{B_{2n}} \quad \dots \dots \dots (3-27)$$

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

제시한 알고리즘의 정확도와 응용 가능성을 검증하기 위하여 Fig.1과 같은 3 자유도의 모델에 대하여 Runge-Kutta법을 이용하여 기진력에 대한 응답을 구하고, 커브 피팅에 의하여 모우드 파라미터를 산출하였다. 샘플링 간격은 주파수 특성을 고려하여 0.05초로 하여 512개의 데이터를 만들고, 가속도 응답에 최대 0.15m/sec²에 해당하는 백색잡음을 가하였다.

Table.1에 이론값과 커브피팅에 의하여 산출한 모우드 파라미터를 비교하였다. 그리고 H11의 피팅결과를 Fig.2에 도시하였다. Fig.2에서 수치해법에 의해서 구한 FRF는 점으로 표시하였고, 커브피팅에 의해 산출한 FRF는 실선으로 표시하였다. 커브피팅하여 산출한 모우드 파라미터는 이론값과 서로 잘 일치하였으며, 잡음에 대해서도 큰 영향을 받지 않아, 제시한 알고리즘의 신뢰성을 확인할 수 있었다.



$m_1 = 0.75, m_2 = 1.0, m_3 = 2.0$ (Kg)
 $c_1 = 2.5, c_2 = c_3 = 0.5, c_4 = 2.1, c_5 = 0.1$ (N-Sec/m)
 $k_1 = 320, k_2 = 410, k_3 = 500, k_4 = 1000$ (N/m)

Fig. 1 3-DOF model

	Mode	이론값	커브 피팅	상대오차(%)
고유 진동수 (Hz)	1	2.7574	2.7964	1.41
	2	4.5946	4.6348	0.87
	3	6.1583	6.2006	0.69
감쇠비	1	0.0331	0.0331	0.00
	2	0.0419	0.0409	2.39
	3	0.0377	0.0376	0.27

Table. 1 Modal parameters of 3-DOF model

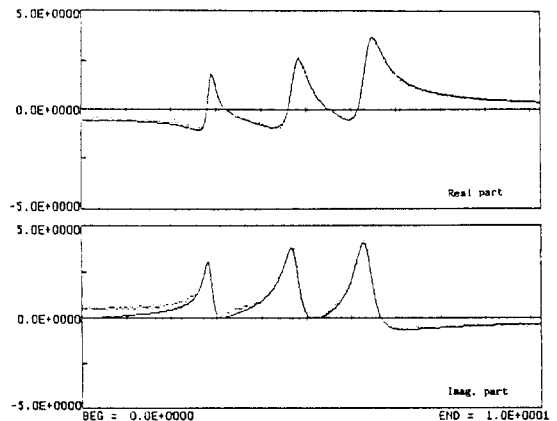


Fig.2. Curve fitting result for 3-DOF model(H11)

다음으로 Fig. 3과 같은 연강 재질(E=200GPa)의 외팔보(5.5×40×400mm)에 대한 실험을 하였다. 연직방향에서 임펄스 햄머로 가진하였고, 점 2에 가속도계를 부착하여 가속도를 측정하였다. 해석주파수 범위는 0~1000Hz로 하였으며, 7개의 측정점에 대하여 각각 7개의 가진점을 이동해가며 500micro second의 샘플링 간격으로 1024의 힘과 가속도 데이터를 측정했다. 측정된 데이터를 개발한 해석 시스템을 이용하여, 데이터를 변환하고, Fourier 변환하여 FRF를 계산하였으며, 커브피팅하여 모우드 파라미터를 산출하였다.

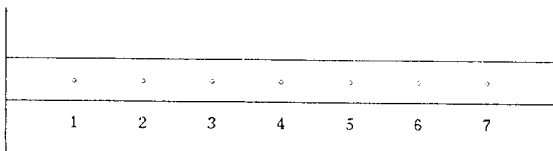


Fig. 3 Cantilever beam

Fig. 4-Fig. 6에 측정된 FRF와 계산된(regenerate d) FRF인 H22, H24, H27을 도시하였다. 그림에서 점들은 측정된 FRF이고 실선이 계산된 FRF이다. 그림을 보면 측정치와 커브피팅된 FRF는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Table. 2에 이론적인 외팔보의 고유진동수와 커브피팅에 의해 산출한 고유진동수를 비교하였다. 이론적인 외팔보의 고유진동수는 진동수 방정식을 풀어 산출하였다[12]. 즉 외팔보의 진동수 방정식 $\cos(\beta_n l) \cdot \sin(\beta_n l) = -1 \dots\dots\dots (4-1)$

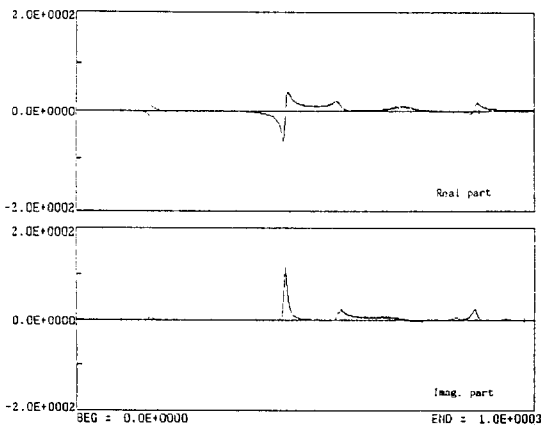


Fig. 4. FRF and Regenerated FRF (H22)

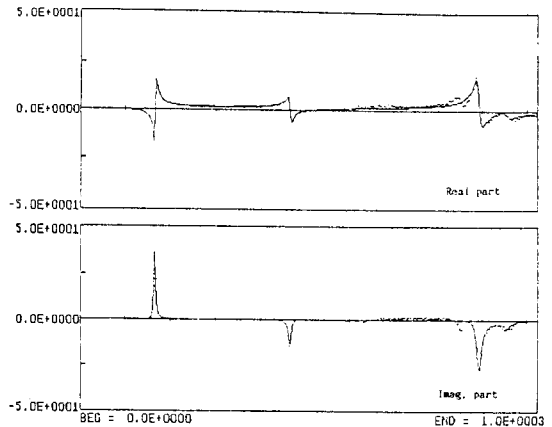


Fig. 5 FRF and Regenerated FRF (H24)

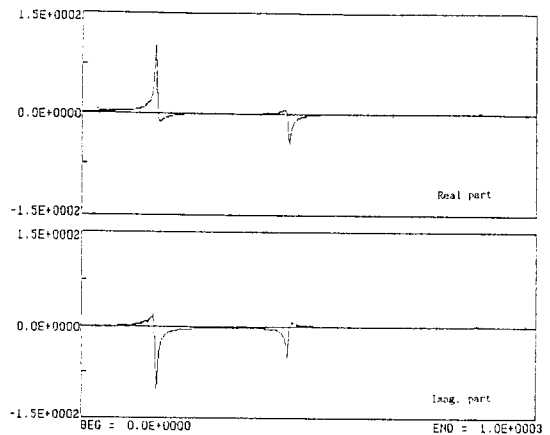


Fig. 6 FRF and Regenerated FRF (H27)

의 근인 β_{n1} 을 구한 다음 다음식에 대입하여 계산하였다.

$$F_n = \frac{1}{2\pi} (B_n l)^2 \sqrt{EI/ml} \dots\dots\dots (4-2)$$

여기서 E는 외팔보의 탄성계수, I는 단면 2차 모멘트, m은 외팔보의 단위길이당 질량, l은 외팔보의 길이를 나타낸다.

첫번째 모우드는 임펄스 햄머의 가진력이 너무 작아 여기되지 않은 것으로 추정된다. 다른 모우드들도 고유진동수를 비교해 보면 이론치와 약간의 차이가 있음을

參 考 文 獻

	Mode	이론값	커브 피팅
고유진동수 (Hz)	1	28.92	163.43
	2	181.26	456.53
	3	507.54	963.35
	4	994.58	
감쇠비	1		0.01594
	2		0.00544
	3		0.00194
	4		

Table 2. Modal parameters of cantilever beam

알 수 있으나 이는 실험 데이터가 좋지 않은 때문으로
사료된다. 이와 같은 오차가 발생한 것은

- 1) 가진력과 응답을 측정할 때의 잡음의 혼입
- 2) 주파수 분해능
- 3) 부정확한 외팔보의 탄성계수 결정으로 인한 이론
값의 오차
- 4) 부정확한 외팔보의 경계조건
등의 원인에 기인하였다고 사료된다.

5. 결 론

본 연구에서는, 구조물에 작용하는 힘과 그 응답으로 나타나는 가속도 데이터로부터 주파수 응답함수를 구하고, 커브피팅에 의하여 모우드 파라미터를 산출하는 알고리즘을 제시하였다.

3 자유도 모델에 대한 시뮬레이션 실험에서, 이론적인 모우드 파라미터와 커브피팅에 의하여 산출한 모우드 파라미터들이 서로 잘 일치하고 있었다. 또한 실험을 행하여 외팔보의 FRF를 측정하였고, 커브피팅하여 모우드 파라미터를 산출하였으며, 외팔보의 이론적인 고유진동수와 비교해 보았다. 측정치와 커브피팅된 FRF는 잘 일치하고 있음을 알 수 있어 제시한 알고리즘의 신뢰성을 확인할 수 있었다. 따라서 다른 구조물의 동특성 규명에도 아주 유용하게 사용할 수 있을 것이다.

1. K. J. Kim and C. G. Sim, "A New Curve Fitting Algorithm For Modal Parameter Estimation", Proc. 5th Int'l Modal Analysis Conf, London, 1987, pp. 415-421.
2. E. C. Levy, "Complex Curve-Fitting, "IRE TRans. Auto. Control. Vol. AC-4, pp. 37-43, May 1959.
3. H. J. Nho and K. J. Kim, "Complex versus Real Mode Approach in Experimental Modal Analysis", Proc. of JSME Vibration Conf., Tokyo, 1985.
4. C. K. Sanathanan and J. Koerner, "Transfer Function Synthesis as a Ratio of Two Complex Polynomials", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-8, pp. 56-58, Jan. 1963.
5. Wang Shimy, Sato H. and Hasanori O., "New Approaching to the Modal Analysis for Machine Tool Structure", Trans. ASME, J. of Eng. for industry, Vol. 106, Feb. 1984.
6. S. BRAUN, Mechanical Signature Analysis, Academic Press, 1986.
7. D. J. Ewins, Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press, 1984.
8. J. C. Snowdon, Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems, John Wiley & Sons Inc., 1968.
9. D. E. Newland, Random Vibration and Spectral Analysis, Longman Inc., 1975.
10. 竹内芳美, パソコンによる 機械の計測と制御, 工業調査會, 1982.
11. 오재웅, 구조물 모우드 해석의 기초와 응용, 회성출판사, 1985.
12. L. Meriovitch, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, Inc., 1975, pp. 210-214.