

LQG와 LQG/LTR 방법을 이용한
헬리콥터의 비행위치 제어

김 종식*, 마 삼선**, 송 명훈***

Control of a Helicopter in Hover Using the
LQG and LQG/LTR Methods

Jong Shik Kim,* Sam Sun Ma,** Myong Hun Song***

Abstract

The LQG and LQG/LTR compensators have the same structures in dynamics. The only difference is the values of the design parameters in the two compensators. The design parameters of the LQG and LQG/LTR compensators are selected in the sense of the least-squares error minimization and loop shaping, respectively. In this paper, the LQG and LQG/LTR design methods are applied to the helicopter in hover which is modeled as a SISO fourth order system. The dynamic characteristics and the performance of the two control systems are analyzed by the computer simulation. It is found that the LQG/LTR design method is systematic and has good performance in comparison with the LQG design method.

* 부산대학교 기계설계공학과

** 한국전력공사

*** 삼성중공업

1. 서 론

제어시스템 설계는 일반적으로 시스템의 공칭 안정도와 모델링 오차에 대한 안정도 - 강인성 (stability-robustness)이 보장되며 명령추종 성능 그리고 외란 및 센서 잡음에 대한 저감도 등 시스템 성능에 관한 사양들을 만족시키는 과정으로 이루어진다. 특히 안정도-강인성 문제는 실제 제어시스템 설계에서 중요한 문제이다. 제어시스템은 제어하고자 하는 시스템에 대한 수학적 모델식을 기반으로 하여 설계되므로 항상 모델링 오차가 존재하게 된다. 이에 대한 안정도-강인성 문제는 Safonov[1]에 의하여 그 중요성이 강조되기 시작하면서 보다 공학적인 제어시스템 설계 방법이 개발되기 시작하였다.

시스템의 주파수역 성능사양과 안정도-강인성 문제를 직접 설계시 고려하기 위하여 개발된 대표적인 방법이 LQG/LTR(Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery) 제어방법 [2,3]이다. LQG/LTR 제어방법은 LQG 최적제어 [4]로부터 발전된 공학적인 최적제어 방법이다. LQG 최적제어는 최소한 시스템이 안정가능(stabilizable)하고 검출가능(detectable)하다는 조건 아래서 모든 상태변수들을 측정할 필요없이 현실적으로 측정할 수 있는 출력만을 이용하여 제어시스템을 설계할 수 있는 수학적 최적제어 방법이다. 그러나 이 방법은 가격함수에 포함되어 있는 가중행렬의 선정방법이 비조작적인 시행착오적 방법일뿐 아니라 시스템 성능 그리고 안정도-강인성 문제를 제어시스템 설계시 직접 고려할 수 없다는 문제점을 가지고 있다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 1980년 초 Doyle과 Stein[2]은 LQG의 성능지수에 있는 설계 파라미터들을 새로운 시각에서 이해함으로써, 단순히 수학적인 최소제곱오차를

얻는 것이 아니라 보다 공학적인 루프형성(loop shaping) 문제로서 설계 파라미터 선정에 융통성을 부여한 LQG/LTR 제어이론을 개발하였다. LQG/LTR 보상기의 구조는 LQG 보상기의 구조와 전적으로 같으나, 오직 설계행렬을 선정하는 방법이 다를 뿐이다. LQG 제어는 최소제곱오차의 관점에서 LQG/LTR 제어는 루프형성의 관점에서 설계행렬을 선정한다.

본 연구에서는 헬리콥터의 비행위치를 제어하기 위하여 Bryson[5]이 시도한 LQG 제어방법과 최근 개발된 강력한 제어방법인 LQG/LTR 방법을 적용함으로써 LQG/LTR 설계가 보다 조직적이고 공학적인 설계방법임을 확증하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 확률 LQG 제어시스템

확률 LQG (stochastic LQG) 제어방법 [4]은 확률 플랜트에 대하여 실제 최적추정을 한 후, LQ(Linear Quadratic) 최적제어 문제를 적용한 모델기준 보상기(model based compensator)를 설계하여 출력 피드백 제어시스템을 구성하는 것이다. LQG 보상기에서는 설계 파라미터인 제어게인행렬(control gain matrix) G 와 필터게인행렬(filter gain matrix) H 를 시행착오 방법에 의하여 선정하지만 확률 LQG 보상기에서는 주어진 확률 신호에 대하여 분산값이 최소가 되도록 Kalman 필터를 설계하므로 실제 주어진 외란의 강도(Intensity) Σ 와 센서잡음의 강도 Θ 값을 이용하여 설계 파라미터 H 를 선정한다. 그리고 나머지 설계 파라미터 G 는 LQG 보상기와 마찬가지로 시행착오 방법에 의해서 선정된다. Fig.1은 확률 LQG 제어시스템의 구조를 나타내는 블록선도이다.

그리고 플랜트의 상태공간 모델식은 다음과 같

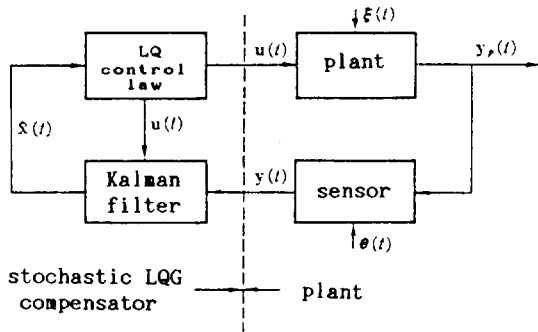


Fig.1 Structure of the stochastic LQG control system

이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + L \xi(t) \dots\dots(1) \\ y(t) &= C x(t) + \theta(t) \end{aligned}$$

여기서 $\xi(t)$ 와 $\theta(t)$ 는 각각 강도 E 와 Θ 인 0-평균 백색잡음이다.

그리고 확률 LQG 제어시스템을 설계하기 위하여 설정된 가격함수의 일반형은 다음과 같은 통계학적 값으로 정의된다.

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \dots\dots(2)$$

가격함수 J 를 최소화하는 제어 $u(t)$ 를 찾기 위하여 다음의 제어법칙을 이용한다.

$$u = -G \hat{X} \dots\dots(3)$$

여기서 $G = R^{-1} B^T K$

그리고 K 는 제어대수 Riccati 식(control algebraic Riccati equation)의 해이다.

$$K A + A^T K + Q - K B R^{-1} B^T K = 0 \dots\dots(4)$$

또한 \hat{X} 를 추정하기 위하여 Kalman 필터를 사용한다.

$$\dot{\hat{X}} = A \hat{X} + B u + H [y - C \hat{X}] \dots\dots(5)$$

여기서 $H = P C^T \Theta^{-1}$

그리고 P 는 필터대수 Riccati 식(filter algebraic Riccati equation)의 해이다.

$$A P + P A^T + L E L^T - P C^T \Theta^{-1} C P = 0 \dots\dots(6)$$

한편 정상상태에서의 입력 및 출력 벡터에 대한 표준편차 σ_u 와 σ_y 를 계산하기 위해서는, 우선 Lyapunov식을 이용하여 최적추정상태 벡터의 상호분산행렬 \hat{X} 를 구한다.

$$(A - B G) \hat{X} + \hat{X} (A - B G)^T + H \Theta H^T = 0 \dots\dots(7)$$

그리고 상태벡터의 상호분산행렬 X 를 구하기 위하여 다음의 Kalman 필터의 특성을 이용하기로 한다.[6]

$$X = \hat{X} + P \dots\dots(8)$$

다음 제어입력과 플랜트 출력벡터에 대한 상호분산행렬 U 와 Y 는 각각 다음 식을 이용하여 구한다.

$$U = G \hat{X} G^T \dots\dots(9)$$

$$Y = C X C^T \dots\dots(10)$$

이제 상호분산행렬 U 와 Y 의 대각선 요소의 제곱근으로부터 각각 정상상태에서의 σ_u 와 σ_y 를 계산할 수 있다.

2.2 LQG/LTR 제어시스템

일반적으로 제어하고자 하는 플랜트의 상태공간 모델식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + L d(t) \dots\dots(11)$$

$$y(t) = C_p x_p(t)$$

여기서 $x_p \in R^n$, $u_p \in R^m$, $d \in R^p$, $y \in R^m$ 이다. 또한 A_p^{-1} 가 존재한다고 가정하고 임의의 일정한 기준입력이나 외란에 대하여 정상상

때 오차가 없는 제어시스템을 원한다고 하면, 플랜트의 각 제어 채널에 피드백이 없는 자유적분요소 (free integrator)를 첨가하여 다음과 같은 설계플랜트모델을 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}d(t) \dots\dots\dots(12) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

여기서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{B}_p & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad \mathbf{C}_p]$$

LQG/LTR 제어시스템의 구조는 Fig.2와 같고, LQG/LTR 제어시스템 설계절차는 크게 2 단계로 구분된다. 우선 설계플랜트모델(12)에 대하여 바람직한 루프형성이 되도록 목표필터루프 (target filter loop)를 설계하고, 다음 루프전달회복 (loop transfer recovery)을 통하여 설계된 피드백 제어시스템의 루프형상을 목표필터루프의 형상으로 회복시키는 단계로 이루어진다. 그리고 LQG/LTR 보상기의 전달함수행렬 $K(s)$ 는 다음과 같다.

$$K(s) = G(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{H}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{H} \dots\dots\dots(13)$$

여기서 설계파라미터 \mathbf{H} 는 목표필터루프 설계과정에서 그리고 설계파라미터 \mathbf{G} 는 루프전달회복 과정에서 선정된다.

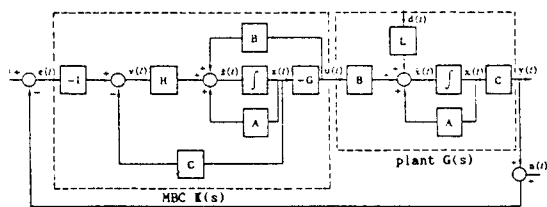


Fig.2 Structure of the LQG/LTR control system

목표필터루프 설계

제어시스템 설계 목적상 프로세스와 센서에

대한 잡음을 백색잡음으로 가정하여 설계플랜트의 상태공간 모델식을 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\xi(t) \dots\dots\dots(14) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \theta(t) \end{aligned}$$

여기서 $\xi(t)$ 와 $\theta(t)$ 는 각각 강도 \mathbf{I} 그리고 $\mu\mathbf{I}$ 인 가상의 백색잡음이다. 즉,

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= 0, \quad E[\xi(t)\xi^T(\tau)] = \mathbf{I}\delta(t-\tau) \dots\dots\dots(15) \\ E[\theta(t)] &= 0, \quad E[\theta(t)\theta^T(\tau)] = \mu\mathbf{I}\delta(t-\tau) \end{aligned}$$

목표필터루프를 설계하기 위해서는 우선 위와 같은 가상의 센서잡음에 대한 Kalman 필터 문제를 해결함으로써 필터계인행렬 \mathbf{H} 를 구한다.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}\mathbf{C}^T \dots\dots\dots(16)$$

여기서 \mathbf{P} 는 다음의 필터대수 Riccati식으로 부터 구한다.

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T - \frac{1}{\mu} \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{P} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

그리고 설계파라미터 μ 와 \mathbf{L} 을 선정하기 위해서 Kalman 필터 주파수역 등가 (Kalman filter frequency domain equality) 결과 [7]를 이용하여 목표필터루프의 전달함수행렬 $G_F(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}$ 를 근사적으로 다음과 같이 구하기로 한다.

$$G_F(s) \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{L} \dots\dots\dots(18)$$

특히 단일입출력 시스템 경우에는 최적루프형성 (optimal loop shaping) [8]을 이용하여 첨가된 자유적분요소만 남겨 놓고 플랜트의 모든 극점을 제거하여 바람직한 목표필터루프를 형성할 수 있다. 이때 필터 개루프 전

달함수 $G_{\text{FOL}}(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_{\text{FOL}}(s) = C (sI - A)^{-1} L \dots\dots\dots(19)$$

그리고 설계 파라미터 L 을 선정하기 위하여 식 (19)에서 연속적으로 L 의 각 요소를 1로 하고 나머지 요소는 0으로 하여 n 개의 필터 개루프 전달함수를 구한다. 이 n 개의 필터 개루프 전달함수의 영점다항식은 $G_{\text{FOL}}(s)$ 의 영점다항식을 얻기 위하여 선형결합을 할 수 있는 성분 (constituent) 영점다항식의 요소가 된다. 이 성분 영점다항식의 계수를 이용하여 다음과 같은 선형방정식을 만든다.

$$Z_C L = z_d \dots\dots\dots(20)$$

여기서 Z_C 는 전달함수 $G_{\text{FOL}}(s)$ 의 성분 영점다항식의 계수가 열벡터의 요소가 되는 ($n \times n$) 행렬이다. 예를 들면, 행렬 Z_C 의 첫번째 열벡터는 $C(sI - A)^{-1} [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 의 분자의 계수로 이루어지는 벡터이다. 그리고 z_d 는 바람직한 영점다항식 즉, 첨가된 자유적분요소 없는 개루프 특성방정식의 계수로 이루는 벡터이다. 식 (20)에서 해 L 이 유일하게 존재하기 위해서는 $\text{rank}(Z_C) = n$ 이어야 한다. 플랜트가 중근 (repeated root)을 갖고 있지 않다면 이 조건식은 만족하게 되며, 이 때 설계파라미터 L 은 다음 식을 이용하여 선정할 수 있다.

$$L = Z_C^{-1} z_d \dots\dots\dots(21)$$

이와 같이 설계파라미터 L 이 선정되면, 다음 설계파라미터 μ 를 이용하여 루프형상을 아래 위로 움직이면서 요구되는 교차주파수 혹은 대역폭을 만족시킨다. 바람직한 설계파라미터 μ 와 L 을 선정함으로써 바람직한 목표 필터루프를 형성한 후, LQG/LTR 보상기의 설계파라미터의 하나인 필터계인행렬 H 를 식 (16)과 식 (17)로부터 선정한다.

루프전달회복

루프전달회복은 저가제어 LQR 문제 (cheap control linear quadratic regulator problem) [2]를 해결함으로써 가능하다. 루프전달회복을 수행하기 위해서는 $\rho \rightarrow 0$ 인 다음의 제어대수 Riccati 식의 해 K 를 구해야 한다.

$$KA + A^T K + C^T C - \frac{1}{\rho} K B B^T K = 0 \dots\dots(22)$$

그리고 제어계인행렬 G 는 다음 식을 이용하여 선정한다.

$$G = \frac{1}{\rho} B^T K \dots\dots\dots(23)$$

루프전달회복의 기본 개념을 유도하기 위하여 ρ 가 0으로 접근할 때 제어대수 Riccati 식의 극한거동을 조사하기로 한다. 시스템 (A, B)가 안정가능하고 (A, C)가 검출가능하며 설계플랜트가 최소위상플랜트라는 가정 아래서 $\rho \rightarrow 0$ 일 때 식 (22)의 극한거동은 다음과 같다.

$$C^T C - \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} K B\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T K\right) \rightarrow 0 \dots\dots(24)$$

식 (23)과 식 (24)를 결합하면

$$(\sqrt{\rho} G)^T (\sqrt{\rho} G) \rightarrow C^T C \dots\dots\dots(25)$$

그러므로 ρ 가 0으로 접근할 때 제어계인행렬 G 의 극한거동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G \rightarrow U C \dots\dots\dots(26)$$

여기서 U 는 $U^T U = I$ 를 만족하는 일원행렬 (unitary matrix)이다.

이제 식 (26)을 이용하여 모델기준 보상기 $K(s)$ 와 루프 전달함수행렬 $T(s)$ 의 극한거동을 구한 결과를 요약하면 다음과 같다. [8]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) \rightarrow [C(sI - A)^{-1} B]^{-1} C(sI - A)^{-1} H = G^{-1}(s) G_F(s) \dots\dots\dots(27)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} T(s) \rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} G(s) K(s) = G(s) \\ G^{-1}(s) G_F(s) = G_F(s) \dots (28)$$

위 식으로부터 LQG/LTR 보상기는 ρ 가 0으로 접근할 때 플랜트 전달함수행렬 $G(s)$ 의 역수 그리고 바람직한 루프 전달함수행렬 $G_F(s)$ 를 만들 수 있다는 것을 알 수 있다.

최소위상시스템 경우에는 ρ 가 0으로 접근하면 할수록 루프전달회복은 잘 이루어지지만 제어입력의 크기를 증가시키는 효과가 있다. 따라서 교차주파수의 10배가 되는 주파수까지 회복시킬 수 있는 ρ 를 선정하는 것이 일반적이다. [8] 이와 같이 선정된 ρ 값을 가지고 LQG/LTR 보상기의 설계파라미터인 G 를 식(22)와 식(23)으로부터 선정한다. 그렇지만 특히 비최소 위상 영점이 교차주파수보다 작은 곳에 위치하는 비최소위상시스템 경우에는 루프전달회복 과정에서 명령추종 및 외란제거 성능이 제한을 받게 된다.[4]

3. 제어시스템 설계

3.1 문제 정의

본 연구에서는 헬리콥터의 비행위치를 제어하기 위하여 비행위치만을 측정할 수 있고 로터(rotor) 추력의 경사각을 제어입력으로 하는 단일입출력시스템으로 가정한다. 먼저 확률 LQG 설계방법을 이용하여 바람에 의한 랜덤(random) 외란이 존재하는 헬리콥터의 수평 운동을 제어하여 비행위치 오차의 표준편차를 최소화 시킨다. 다시말하면 LQG 방법으로 상호 보완(trade off)설계의 중요성과 센서 잡음이 확률적 정상상태 성능에 미치는 영향을 최소화한다. 그리고 LQG/LTR 제어방법을 이용하여 보다 조직적이고 공학적인 설계 방법임을 보이고 성능 특성을 구하여 서로 비교 검토하고자 한다.

Fig. 3은 헬리콥터의 비행위치를 최적으로 제어하고자 할 때 필요한 변수들을 나타내는 개략도이다.

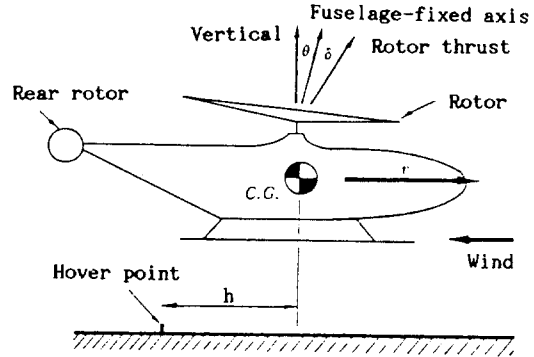


Fig. 3 The hovering helicopter and desired hover point

선형화된 헬리콥터의 상태방정식은 다음과 같다 [5]

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) + L_p w(t) \dots (29)$$

여기서

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.415 & -0.011 & 0 \\ 9.8 & -1.43 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.27 \\ 9.8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.011 \\ -0.02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그리고 상태벡터 $x_p = [p(t) \ q(t) \ v(t) \ h(t)]^T$, 제어입력 $u(t) = \delta(t)$, 외란 $w(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

- $p(t)$: 피치각 (rad)
- $q(t)$: 피치율 (rad/sec)
- $v(t)$: 수평 속도 (m/sec)
- $h(t)$: 바람직한 비행위치로부터 질량 중심까지의 수평 거리 (m)
- $\delta(t)$: 동체에 대한 로터 추력의 경사각 (rad)
- $w(t)$: 수평 방향의 바람에 의한 외란 (m/sec)

또한 $w(t)$ 는 다음과 같은 동역학 식으로 표현

되는 정규 랜덤 프로세스(normal random process)로 가정한다.

$$\dot{w}(t) = -0.2 w(t) + 0.2 \xi(t) \dots\dots\dots(30)$$

여기서 $\xi(t)$ 는 강도 $\mathcal{E} = 75\text{m}^2/\text{sec}$ 인 0-평균 백색잡음이다.

3.2 확률 LQG 제어기 설계

1) 바람 외란 $w(t)$ 에 대한 동역학을 헬리콥터 동역학에 포함시킨 시스템의 가제어성/가안정성을 조사하기 위하여 우선 시스템의 상태방정식을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + L \xi(t) \dots\dots(31)$$

여기서

$$x = [p \ q \ v \ h \ w]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.415 & -0.011 & 0 & -0.011 \\ 9.8 & -1.43 & -0.02 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.27 \\ 9.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

이 시스템에 대한 고유값 λ 와 좌측 고유벡터 행렬 W 를 구하면,

$$\lambda = 0, -0.2, 0.122 \pm 0.379j, -0.679$$

$$W = \begin{bmatrix} 37.7 & 90.9 \\ 0 & 0 \\ 22.9+12.1j & 38.1-7.17j \\ 22.9-12.1j & 38.1+7.17j \\ -5.87 & 24.4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4.83 \\ -0.181+1.04j & 0 & -0.452+0.71j \\ -0.181-1.04j & 0 & -0.452-0.71j \\ 0.407 & 0 & 0.577 \end{bmatrix}$$

그리고 WB 를 계산하면 다음과 같다.

$$WB = \begin{bmatrix} 570 \\ 0 \\ 237-34.8j \\ 237+34.8j \\ 157 \end{bmatrix}$$

$W_2^T B$ 가 0이므로 바람 외란 모드는 제어 불가능하다. 즉, 로터 추력의 경사각에 의하여 바람의 변화를 기대할 수 없다는 것을 알 수 있다. 그렇지만 $\lambda_2 = -0.2$ 이므로 바람 외란 모드는 안정가능하고, 또한 불안정한 복소수 모드는 제어가능하므로 효과적으로 응답을 바꿀 수 있다.

2) 상태변수 $h(t)$ 를 측정할 때 부가되는 센서잡음은 강도 $\theta_h = 6.8 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{sec}$ 인 0-평균 백색잡음으로 가정하고 바람 외란을 고려하여 다음과 같은 성능 사양을 만족시키는 ρ 의 범위를 구한다.

$$3\sigma_h \leq 0.75 \text{ m}, \quad 3\sigma_\delta \leq 0.25 \text{ rad}$$

여기서 σ_h 와 σ_δ 는 각각 정상상태에서 비행오차 그리고 로터 각의 표준편차이다.

이제 바람 외란 $w(t)$ 에 대한 동역학을 헬리콥터 동역학에 포함시킨 시스템에 대하여 확률 LQG 보상기를 설계하기로 한다. $h(t)$ 만을 측정할 수 있다고 가정하였으므로 관측기가 요구된다. 따라서 가관측성을 조사한 결과 시스템이 관측가능하므로 관측기를 이용한 제어시스템을 구성할 수 있다. 이 때 상태공간 모델식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + L \xi(t) \dots\dots(32) \\ y(t) &= C x(t) + \theta(t) \end{aligned}$$

여기서 $\xi(t)$ 와 $\theta(t)$ 는 각각 강도 $\mathcal{E} = 75\text{m}^2/\text{sec}$ 그리고 $\theta = 6.8 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{sec}$ 인 0-평균 백색잡음이다. 그리고 가격함수 J 는 다음과 같이 정의한다.

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [h^2(t) + \rho \delta^2(t)] dt \right\}$$

$$= E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \dots\dots\dots(33)$$

여기서 $Q=C^T C$, $C=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$, $R=\rho$
 이제 식(6)부터 식(10)을 이용하여 ρ 값에 따른 정상상태에서의 σ_h 와 σ_δ 를 구하면 Fig.4와 같다. Fig.4로부터 성능사양을 만족하는 ρ 값의 범위는 $6 \leq \rho \leq 12.5$ 임을 알 수 있다.

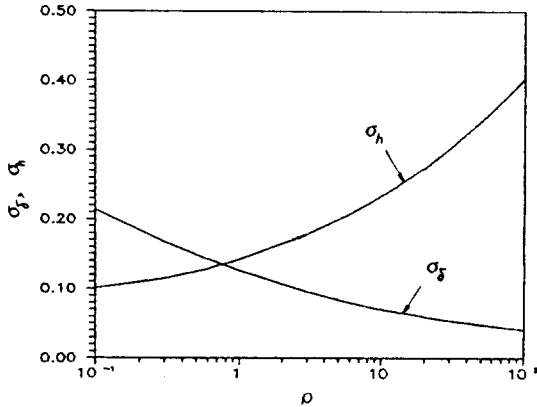


Fig.4 Range of ρ to meet design specifications

3) 성능사양을 만족시키는 ρ 의 최소값은 6이고, 이때 제어게인행렬 G 와 필터게인행렬 H 는 각각 다음과 같다.

$$G = [2.076\ 0.1602\ 0.414\ 0.408\ -0.0023]$$

$$H = \begin{bmatrix} 1.069 \\ 0.751 \\ 8.283 \\ 4.070 \\ -43.88 \end{bmatrix}$$

이제 루프 전달함수 $T(s) = y(s)/e(s)$ 를 구하기 위하여 LQG 보상기와 첨가된 플랜트에 대한 상태 공간 모델식을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= A_t x_t + B_t e \\ y &= C_t x_t \end{aligned} \dots\dots\dots(34)$$

여기서 $x_t = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{LQG 보상기의 상태벡터} \\ \text{첨가된 플랜트의 상태 벡터} \end{bmatrix}$

$$A_t = \begin{bmatrix} A-BG-HC & 0 \\ -B_p G & A_p \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} -H \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_t = [0\ C]$$

이때 전달함수 $T(s)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$T(s) = C_t (sI - A_t)^{-1} B_t \dots\dots\dots(35)$$

그리고 Fig.5와 Fig.6은 각각 확률 LQG 제어시스템에 대한 루프 전달함수 $T(j\omega)$ 의 크기 Bode선도와 단위스텝 응답을 나타낸다.

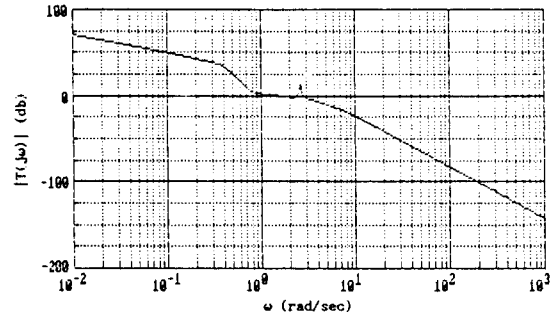


Fig.5 Bode plot of the loop TF $T(j\omega)$ for the LQG control system

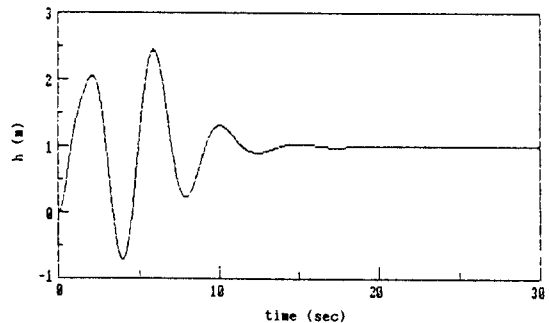


Fig.6 Unit step response of the LQG control system

3.3 LQG/LTR 제어기 설계

임의의 일정한 명령입력과 외란에 대하여 0-

정상상태오차와 대역폭 $\omega_b \cong 10 \text{ rad/sec}$ 가 될 수 있는 LQG/LTR 피드백 제어시스템을 설계하기로 한다.

1) 시스템의 상태방정식을 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \quad \dots\dots\dots (36) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.415 & -0.011 & 0 \\ 9.8 & -1.43 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.27 \\ 9.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

이 시스템은 고유값 0 을 포함하고 있으므로, 임의의 일정한 입력에 대하여 0- 정상상태오차를 만족시키기 위하여 자유적분요소를 첨가시킬 필요가 없다. 따라서 식(36)으로 주어진 시스템을 설계플랜트모델로 설정한다.

2) 목표필터루프 설계

설계플랜트모델에서 자체의 자유적분요소만 남겨 놓고 모든 극점이 제거되도록 하여 바람직한 루프형상을 얻을 수 있도록 식(21)을 이용하여 설계파라미터 L을 선정한다.

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

그리고 대역폭 $\omega_b \cong 10 \text{ rad/sec}$ 를 만족시키기 위하여 설계 파라미터 μ 를 0.01로 선정한다. 이때 필터계행렬 H는 다음과 같고, 목표필터루프 형상은 Fig.7 과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 0.119 \\ -0.055 \\ 5.008 \\ 10.49 \end{bmatrix}$$

3) 루프전달회복

우선 제어대수 Riccati 식에 가중행렬 $Q = C^T C$, $R = \rho$ 를 대입하고 목표필터루프로 잘 회복할 수 있는 ρ 값을 선정하므로 이때 선정된

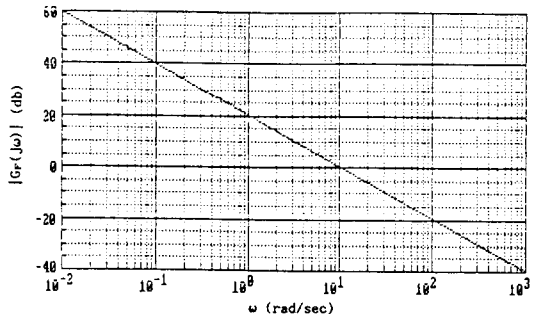


Fig.7 Bode plot of the target filter loop TF $G_F(j\omega)$

ρ 는 10^{-6} 이다. 이 ρ 값을 식(22)와 식(23)에 대입하여 선정된 제어계행렬 G는 다음과 같다.

$$G = [148.6 \quad -249.6 \quad 173.7 \quad 1000]$$

이와 같이 목표필터루프 설계와 루프전달회복 과정에서 선정된 설계파라미터 G와 H를 Fig. 2에 표시된 LQG/LTR 보상기의 구조에 삽입함으로써 LQG/LTR 제어시스템 설계를 마치게 된다. Fig. 8과 Fig.9는 각각 LQG/LTR 제어시스템에 대한 루프전달함수 $T(j\omega)$ 의 크기 Bode 선도와 단위스텝응답을 나타낸다. 또한 설계된 LQG/LTR 제어시스템은 교차주파수보다 작은 곳인 허수축 근처 ($0.234 \pm 2.49j$)에 영점을 갖고 있는 비최소위상시스템이므로 Fig.10에 표시된 바와 같이 루프전달회복이 어느 정도밖에 보장될 수 없다는 것에 유의해야 할 것이다.

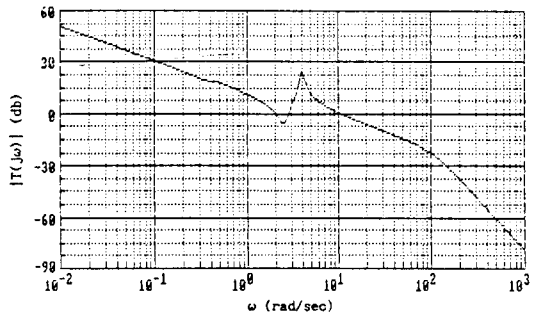


Fig.8 Bode plot of the loop TF $T(j\omega)$ for the LQG/LTR control system

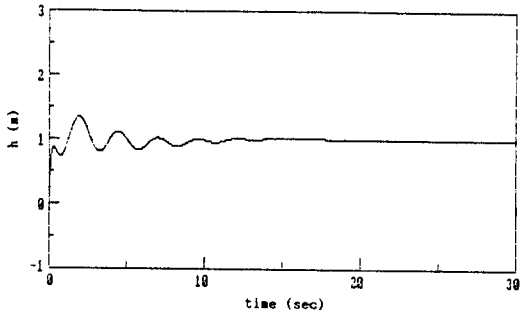


Fig. 9 Unit step response of the LQG/LTR control system

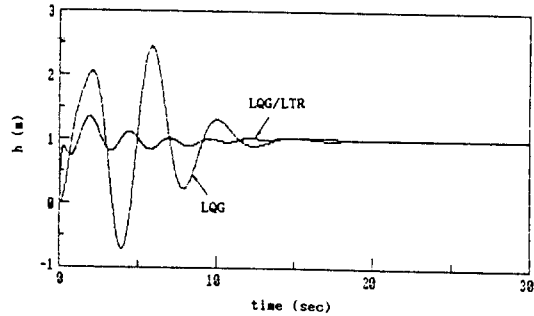


Fig. 12 Unit step responses of the LQG and LQG/LTR control systems.

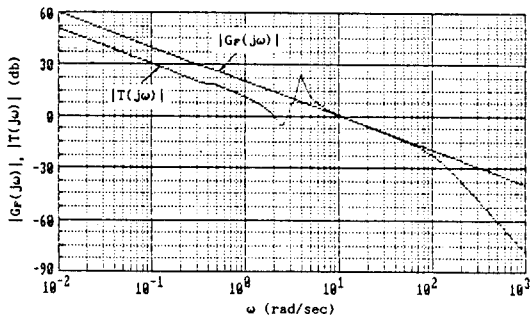


Fig. 10 Bode plots of the target filter loop TF $G_F(j\omega)$ and the recovered loop TF $T(j\omega)$

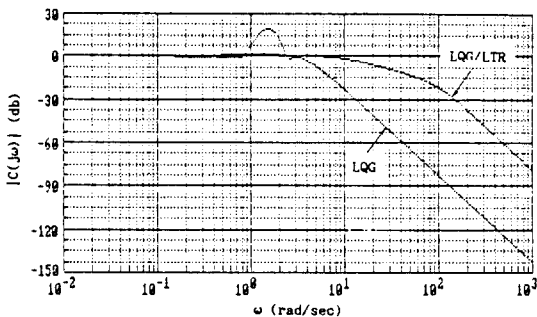


Fig. 11 Bode plots of the closed-loop TF $C(j\omega)$ for the LQG and LQG/LTR control systems

3.4 시뮬레이션 결과 및 고찰

Fig.11 과 Fig.12는 각각 위에서 설계된 두 제어시스템에 대한 페루프 전달함수 $C(j\omega)$ 의 크기 Bode 선도와 출력인 바람직한 비행위치 $h(t)$ 의 단위스텝응답을 나타낸다.

Fig.11 에서 주파수역 성능을 비교하면 LQG 제어시스템은 대역폭이 4 rad/sec 그리고 공진최대값이 20 db로 성능이 바람직하지 못하나, LQG/LTR 제어시스템은 대역폭이 10 rad/sec 그리고 공진최대값이 1.3db로 비교적 양호한 성능을 갖는것을 알 수 있다. Fig.12에서 시간역 성능을 비교하면 LQG 제어시스템은 큰 오버슈트가 발생하고 5% 정착시간이 13.3초로 과도응답상태가 불량하다. 그렇지만 LQG/LTR 제어시스템은 오버슈트가 대폭 감소하고 5% 정착시간이 8.9초로 양호한 과도응답 성능을 갖는다.

4. 결 론

헬리콥터의 바람직한 비행위치를 제어하기 위하여 확률 LQG 제어방법과 LQG/LTR 제어방법을 적용하였다. 확률 LQG 제어방법은 랜덤

외란 및 센서잡음을 입력으로 생각하여 수학적
으로 표현되는 성능지수를 최적제어하는 방법
으로 주어진 확률신호에 대하여 분산값이 최소
가 되도록 Kalman 필터를 설계하여 필터계인행렬
H를 선정하였고, LQ 문제로부터 제어계인행렬
G를 선정하였다. 확률 LQG 방법에 의하여 설계
된 헬리콥터 제어시스템은 대역폭이 작고 오버
슈트가 커서 과도응답에 대한 안정성이 좋지
않고 정착시간도 길게되어 바람직한 성능을
얻을 수 없다. LQG/LTR 제어방법은 설계플랜트
모델에 포함되어 있는 자유적분요소만 남겨
놓고 모든 극점이 제거되도록 하여 바람직한
목표필터루프를 형성한 후, 루프전달회복을
수행하였으나 교차주파수보다 작은 곳에
비최소위상 영점이 존재하여 만족스러운
루프전달회복을 이룰 수가 없었다. 그렇
지만 LQG/LTR 방법에 의하여 설계된 헬리
콥터 제어시스템은 대역폭이 크고 오버슈트
가 대폭 감소하였으며 정착시간도 단축되어
양호한 성능을 얻을 수 있었다. 더욱 향상
된 성능을 얻기 위해서는 비최소위상플랜트
에 대한 루프전달회복 문제를 해결하고 측정
할 수 있는 변수와 제어입력의 갯수를 증가
시켜 헬리콥터 제어문제를 다변수 시스템
으로 확장하여 LQG/LTR 제어방법을 적용
해 볼 가치가 있다고 사료된다.

參 考 文 獻

1. Safonov, M.G., "Robustness and Stability Aspects of Stochastic Multivariable Feedback System Design," Ph. D. Thesis, Dept. of EECS, M. I. T., 1979.
2. Doyle, J.C., and Stein, G., "Multivariable Feedback Design; Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.26, 1981.
3. Athans, M., "A Tutorial on the LQG/LTR Method," Proc. ACC, 1986.
4. Athans, M., "The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 16, 1971.
5. Bryson, A.E., "Control Theory for Random Systems," Proc. 13th Intl. Cong. Theo. & Appl. Mech., Springer-Verlag, Berlin, 1973.
6. Bryson, A.E., and Ho, Y.C., "Applied Optimal Control," Hemisphere Pub. Cor., 1975.
7. Athans, M., "Lecture Notes on Multivariable Control Systems," M. I. T., 1986.
8. Kim, J.S., "Nonlinear Multivariable Control Using Statistical Linearization and Loop Transfer Recovery," Ph. D. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, M. I. T., 1987.
9. 김종화, 허남수, 이만형, "LQG/LTR 방법을 이용한 터렛 서보시스템의 강인한 제어기 설계", 한국정밀공학회지 제 6 권 2 호, 1989.
10. 최중락, 이장규, "LQG/LTR 방법을 이용한 강인한 서어보메커니즘의 제어기 설계", 한국자동제어학술회의 논문집, Vol.1, 1986
11. Rodriguez, A.A. and Athans, M., "Multivariable Control of a Twin Lift Helicopter System Using the LQG/LTR Design Methodology", Proc. ACC, 1986.

12. Martin, R., Valavani, L. and Athans, M, "Multivariable Control of a Submarine Using the LQG/LTR Design Methodology", Proc. ACC, 1986.
13. Pfeil, W.H., "Multivariable Control for the GE T700 Engine Using the LQG/LTR Design Methodology", S.M. Thesis, Dept. of Mech. Eng., M.I.T., 1984.