

# Caustics 방법에 의한 Polycarbonate의 J-적분값 결정에 관한 기초적 연구

## A Fundamental Study of J-integral Using the Method of Caustics for Polycarbonate

이 역 섭\* 박 기 용\*\*  
O. S. Lee, K. Y. Park

### ABSTRACT

This study investigated a method for the determination of the J-integral for a tough glassy polymer such as polycarbonate plates by using the method of caustics. Comparing the values of J-integral determined by a numerical analysis and by the method of caustics, the method of caustics was found to be an effective experimental technique for the determination of the J-integral.

The ratio between two J-integrals determined by the method of caustics and by finite element method converged into 1 within the limit of low load. However, it was noticed that the greater the plastic zone at the crack tip was, the lower the J-integral obtained by the reflect method of caustics. This difference may be deduced from the damage at the crack tip such as craze appeared in the polycarbonate plate.

It was confirmed that the ratio of longitudinal diameter( $D_l$ ) to transverse diameter ( $D_t$ ) of caustics generally converged into 1 at the low load. The transition of the state of stress at the vicinity of a crack tip from plane strain to plane stress was deduced by noticing that the longitudinal diameter( $D_l$ ) grew faster than the transverse diameter( $D_t$ ) of caustics within the higher load range.

기	호	
$a$		Crack length
$D_l$		Longitudinal diameter of caustics
$D_t$		Transverse diameter of caustics
$d$		Thickness of specimen
$E$		Young's modulus
	$J$	J-Integral
	$M$	Magnification factor
	$n$	Hardening exponent
	$Z_i$	Distance between the specimen and focus
	$Z_o$	Distance between the specimen and screen
	$\epsilon_y$	Yielding strain
	$\sigma_y$	Yielding stress
	$\alpha$	Material constant

\* 정희원, 인하대학교 공대 기계공학과

\*\* 인하대학교 대학원

# 1. 서 론

지금까지 J-적분값 결정에 대하여 많은 실험적인 연구들이 행하여지고 있으나 아직 표준화(Standardization)할 정도의 완전한 체계가 이루어지지 않고 있는 실정이다. 본 연구에서는 종래의 방법과는 달리 실험적으로 보다 정확하고 간편하게 J-적분값을 결정하는 방법을 창출하는 기초를 마련하기 위하여 Optical Shadow 기술의 일종인 Caustics 방법을 J-적분값의 결정 및 해석에 응용하였다.

본 연구의 목적은 Caustics 방법으로 고인성 유리질 중합체인 Polycarbonate 판재의 균열 선단에 대한 J-적분값을 측정하고, Caustics 방법으로 측정한 J-적분값과 유한요소법으로 구한 J-적분값을 상호 비교하여 Caustics 방법의 유용성을 입증하는데 있다.

Caustics 방법으로는 반사형과 투과형의 두 가지 방법을 사용하였으며 이들 형상들을 상호 비교하고, 소성영역의 증가에 따른 Caustics의 모양과 크기의 변화하는 양상을 평가하고 J-적분값의 관계를 규명하였다.

# 2. 기본이론

두께 d인 Single Edge Notched Specimen (SEN 시편)에 균일분포 인장하중을 작용시키면 균열선단에서 두께의 변화가 발생하고, 이 부근에 Laser 광을 투과 혹은 반사시켰을 때 빛은 굴절하게 된다. 굴절된 빛을 시편에서  $Z_0$  만큼 떨어진 Screen 상에 나타나게 했을 때 균열선단의 변형에 의해서 굴절된 빛이 집중하므로 어두운 부분과 선명한 경계선이 나타나는데 이를 Caustics (Burning)라 한다. Fig. 1에 보인 바와 같이 단순하중으로 인해 변형된 시편의 표면방정식은 다음과 같다.

$$X_3 = -f(x_1, x_2) \tag{1}$$

$f$  : 변형된 시편의 표면함수  
 $x_i$  : 시편상의 좌표

이렇게 변형된 시편표면의 표면방정식에 대

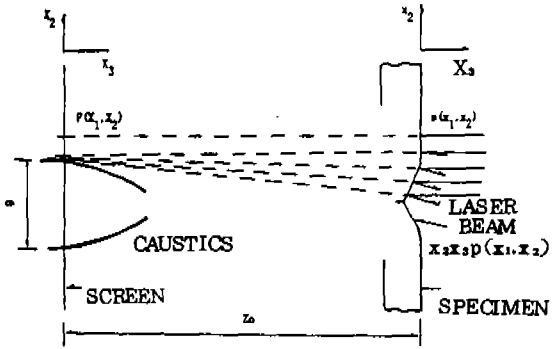


Fig. 1 Specimen and Optical Set Up

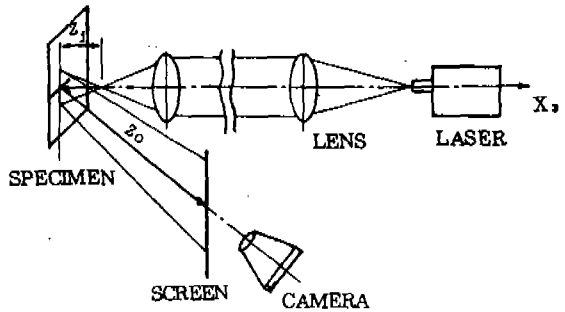


Fig. 2 Schematic Diagram of Caustics Measurement

응되는 Screen 상의 Caustics 방정식은 그림 2를 참조하여 다음과 같이 표시된다.

$$X_i = M x_i \pm 2 Z_0 \partial f / \partial x_i \tag{2}$$

여기에서

$Z_0$  : 시편에서 Screen까지의 거리

$M$  : 확대비  $[ = (Z_0 \pm Z_i) / Z_i ]$

$+$  : 촛점이 시편앞에 놓일 경우

$-$  : 촛점이 시편뒤에 놓일 경우

$M = 1$  : 평행광

$X_i$  : Screen 상의 좌표(Caustics)

$Z_i$  : 시편에서 촛점까지의 거리

이 되며,<sup>1)</sup> 식(2)는 Caustics의 기본식이 된다.

응력이 단순 증가함수이고, 소규모 항복이라는 가정하에서 변형경화재료의 변형은 Ramberg-Osgood에 의하여 다음과 같이 정의된다.<sup>2)</sup>

$$\epsilon / \epsilon_y = \sigma / \sigma_y + \alpha (\sigma / \sigma_y)^n \tag{3}$$

여기서  $\epsilon_y, \sigma_y$ 는 각각 항복변형율, 항복응력이며,  $n$ 은 경화지수값이고  $\alpha$ 는 재료의 특성상수이다.

Ramberg-Osgood의 변형이론식에 따르는 탄소성 재료의 균열선단에서의 응력집중의 해석은 Rice에 의하여 최초로 수식화된 J-적분식을 사용하는 것이 좋다. 금속이나 Polymer재료의 균열선단에서 비선형거동을 하는 소성영역을 동반하는 파괴현상을 평가하는데에 중요한 역할을 하는 Rice의 J-적분은 경로 독립성이고, 다음과 같이 정의된다.<sup>3)</sup>

$$J = \int_{\Gamma} [W dy - T \partial u / \partial x ds] \quad (4)$$

여기서

$W$  : Strain Energy Density

$T$  : 적분경로를 따라 바깥쪽을 향하는 Traction Vector

$u$  : 변위 Vector

$ds$  : 적분경로의 미소길이

식(3)과 식(4)를 식(2)에 적용시키고 균열선단에서의 변형조건과 소성변형이 비압축성이라는 가정하에서 전개한 이론들을 함께 사용하여<sup>2,3)</sup> 간단히 정리하면 다음과 같은 탄소성 재료에 대한 Caustics 방정식을 얻을 수 있다.<sup>4)</sup>

$$X_1 = A \frac{n+1}{3n+2} M \frac{2n+1}{3n+2} \left\{ F \frac{n+1}{3n+2} (\cos\theta + F^{-1} \left[ \frac{n}{n+1} \phi \cos\theta + \phi' \sin\theta \right]) \right\} \quad (5)$$

$$X_2 = A \frac{n+1}{3n+2} M \frac{2n+1}{3n+2} \left\{ F \frac{n+1}{3n+2} (\sin\theta + F^{-1} \left[ \frac{n}{n+1} \phi \sin\theta - \phi' \cos\theta \right]) \right\}$$

여기서

$d$  : 시편의 두께

$E$  : 탄성계수

$A$  :  $\alpha \sigma_y Z_o d/E [JE/(\alpha \sigma_y^2 I_n)]^{n/(n+1)}$

$F$  :  $F(\phi, \phi', \phi'', \dots, n)$

$I_n$  : 경화지수에 지배되는 값  $\approx 2.8$  (평면응력)

$\phi$  : 하중 Mode와 경화지수에 지배되는 함수

$|\theta| < 180^\circ$

이다.

균열선단 부근에서 소성변형의 분포에 의하여 Caustics의 모양이 형성되며 그 크기는 소성변형장의 세기, 재료의 특성, 기하학적 형상, 광학상수 등의 영향에 의하여 결정된다. Caustics 종방향지름( $D_t$ )는  $2X_2^{max}$ 과 같으므로 J-적분값과 관련시켜서 정리하면 다음과 같다.

$$J = S_n \frac{\alpha \sigma_y^2}{E} \left( \frac{E}{\alpha \sigma_y Z_o d} \right)^{\frac{n+1}{n}} (D_t/M)^{\frac{3n+2}{n}} \quad (6)$$

여기서  $S_n$ 은 Numerical Factor로서 Rosakis에 의하여 상세히 정의되었으며  $n > 4$ 인 경우  $S_n \approx 7.4 \times 10^{-2}$ 이며 이것은  $n \rightarrow \infty$ 일때의 값과 동일하다.<sup>5)</sup> 식(6)은 평면응력 상태에서 균열선단 근방의 J-적분값과 Caustics의 지름과의 관계식이다.

### 3. 해석방법 및 절차

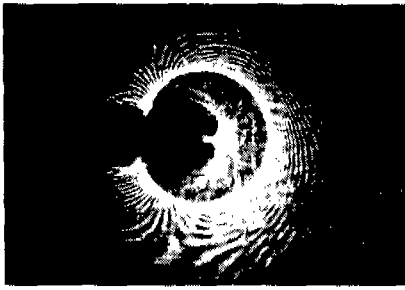
#### 3.1 Caustics에 의한 실험적 해석

본 실험에서는 광학적 이방성 재료이고, 고인성 유리질 중합체인 Polycarbonate 판재를 SEN시편으로 제작 실험하였으며, 기계실톱으로 Notch를 가공한 후 피로균열 대신 예리한 칼날로 충격을 주어 자연균열을 얻었다. J-적분값에 대한 두께의 영향을 고찰하기 위하여 각 시편의 두께는 1.7mm, 3.2mm, 4mm, 6mm로 변화를 주어 실험하였으며, 균열길이는 10mm, 15mm, 20mm, 24mm로서 각각의 두께에 대하여 Caustics의 직경을 측정하였다.

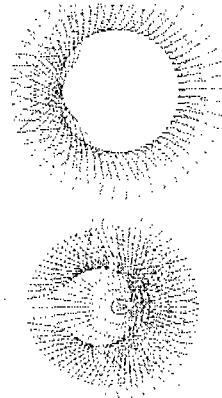
측정된 Caustics 직경  $D_t$ 와 실험장치의 파라메타들 및 재료의 성질들을 식(6)에 대입하여 J-적분값을 결정할 수 있다.

본 실험에서 사용한 Polycarbonate 판재의 응력-변형을 선도를 관찰하여  $n$ 값은 25로 결정하였고 이에 대응하는  $S_n$ 값은 0.0714이다.<sup>5)</sup>

Fig. 3은 실험으로 얻은 Caustics의 형상과 식(5)와  $n = 1, S_n = 0.0277$ 을 사용하여 이론적 모델링 해석으로 얻은 Caustics의 형상을 비교한 것이다.



Experimental Caustics



Theoretical Caustics

Fig. 3 Comparison of Theoretical Caustics to Experimental Caustics  
(Load : 120 Kgf, Thickness : 3.2 mm, Crack Length : 10 mm)  
(Theoretic upper : outer caustics, lower : inner caustics)

3. 2 유한요소법에 의한 수치적 해석

본 연구에서 사용한 시험편은 형상 및 경계 조건이 대칭이므로 Fig. 4와 같이 모델의 1/2 부분만을 사용하여 해석하고, 이 부분을 161 개의 절점과 271 개의 요소로 분할하였으며, 평면응력 조건하에서, 항복조건은 Von Mises 의 이론을 적용시켰고, 소성이론은 전변형 이론을 사용하였다.<sup>6)</sup>

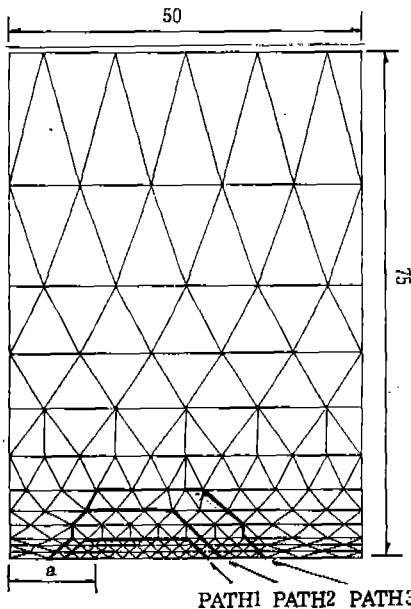


Fig. 4 Path of Integration for J-Integral  
(Dimension : mm)

4. 실험결과 및 고찰

Fig. 3 에서는 실험으로 얻은 Caustics 의 형상과 이론적 모델링 해석으로 generation 한 Caustics 의 형상이 유사함을 보임으로서 기본적으로 이론적 모델링 해석의 타당성을 입증

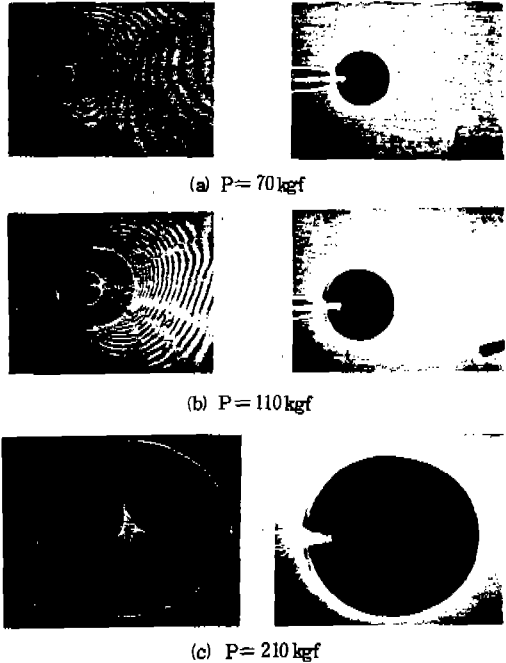


Fig. 5 Reflected and Transmitted Caustics Corresponding to Varying Loads  
(Thickness : 1.7 mm, Crack Length : 10 mm)

하였다.

Fig. 5는 하중증가에 따라서 반사형 및 투과형 Caustics 형상이 변화하는 양상을 나타낸 것이다. 탄성영역 [Fig. 5 (a, b)]과 소성영역 [Fig. 5 (c)]에서의 반사형 ( $D_{R_i}$ ) Caustics와 투과형 ( $D_{T_i}$ ) Caustics들의 종방향 지름의 비 ( $D_{T_i}/D_{R_i}$ )가 약 0.9로 나타났으며, 하중이 더 증가함에 따라 그 비도 점점 증가하여 반사형 Caustics의 종방향지름( $D_r$ )이 투과형의 종방향지름( $D_l$ )보다 약 1.11배 정도 크게된다.

Figs. 6~7은 소성영역 즉,  $P/d$ 가 약 30이 상인 경우에서의 반사형 Caustics 실험으로 결정한  $J$ -적분값과 유한요소법에 의한  $J$ -적분값을 나타낸 것으로서, 반사형 Caustics 실험에 의한  $J$ -적분값이 일반적으로 낮은 경향을 나타내고 있다. 탄성영역 ( $P/d < 30$ )에서는 Caustics 방법과 유한요소법에 의해서 결정한  $J$ -적분값이 일치함이 입증되었다. 그러나, 소성영역 ( $P/d > 30$ )에서는 두께가 얇아질수록 실험적으로 구한  $J$ -적분값과 유한요소법으로 구한  $J$ -적분값의 차이가 커지는데, 이는 Polycarbonate의 경우 두께가 얇을수록 소성영역이 증가하게 되면서 균열선단 근방에서 Craze가 많이 형성되어 미시적 균열이 성장하게 되고, 이로 인하여 재질이 손상되므로서  $J$ -적분값이 낮아지게 되는 것으로 추정된다. 유한요소법으로  $J$ -적분법을 결정할때에 이와 같은 현상을 모델링해야 하는 번거로움이 있는 Polycarbonate와 같은 재료에서는 Caus-

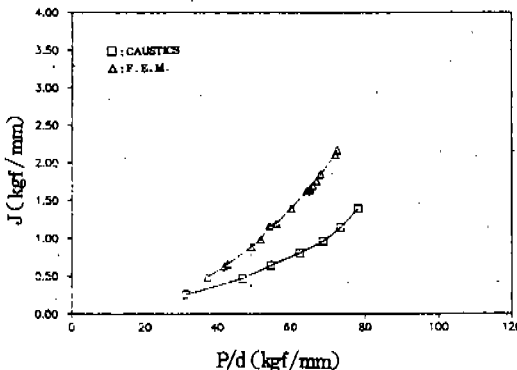


Fig. 6 J-Integral vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness :  $d = 3.2$  mm, Crack Length :  $a = 20$  mm)

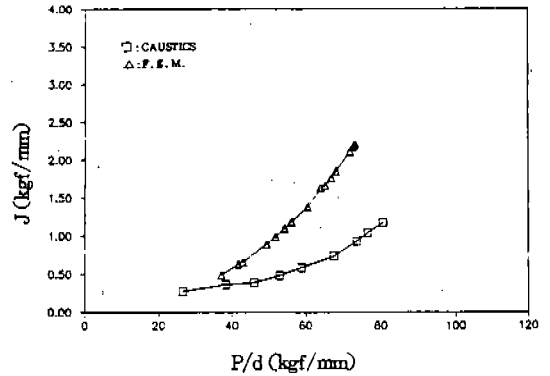


Fig. 7 J-Integral vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness :  $d = 1.7$  mm, Crack Length :  $a = 20$  mm)

tics 방법을 사용하여  $J$ -적분값을 결정하는 것이 더 유용할 것으로 생각된다.

Figs. 8~10은 반사형에 대한 Caustics의 종방향지름( $D_r$ )과 횡방향지름( $D_l$ )의 비를 하중과 두께에 대해서 나타낸 것이다. Fig. 5(B)에서 보인 Caustics 모양에서 나타난 바와 같이  $40 < \frac{P(\text{kgf})}{d(\text{mm})} < 60$ 에서는 그 비가 1에 수렴한다. 그러나 하중이 증가되면  $D_l$ 이  $D_r$ 보다 커지는 현상이 나타나는데 이것은 균열선단의 응력상태가 복합응력상태 (mixed mode)에서 완전한 평면응력 상태로 천이하기 때문이라 생각된다. 이것은 두께가 얇은 경우 ( $d = 1.7\text{mm}$ )의  $D_l/D_r$  증가율이 두께가 두꺼운 경우 ( $d = 6\text{mm}$ )의  $D_l/D_r$  증가율보다 큰 것으로 추정할 수 있다.

두께가 얇은 Polycarbonate의 경우에 소성영역이 커질수록 Fig. 5의 [c]와 같이  $D_l$ 이  $D_r$ 보다 커지게 되므로, 이런 경우에는 소성구역의 모양이 Dugdale strip 소성구역과 유사하게 됨으로 Dugdale 모델로 해석하기에 적당한 재료임을 알 수 있다. 또한, 탄성영역에서는 종방향지름( $D_r$ )과 횡방향지름( $D_l$ )이 거의 같지만 소성영역에서는 횡방향지름( $D_l$ )이 더 길고 하중에 민감하게 변하게 되므로 횡방향지름( $D_l$ )의 영향에 대한 연구가 필요하리라 생각된다.

Fig. 11은 균열길이  $a = 10\text{mm}$ 를 갖는 여러 가지 두께의 시편이 인장하중  $P = 100\text{ kgf}$ 를 받을때 반사형 Caustics를 측정하여 결정한

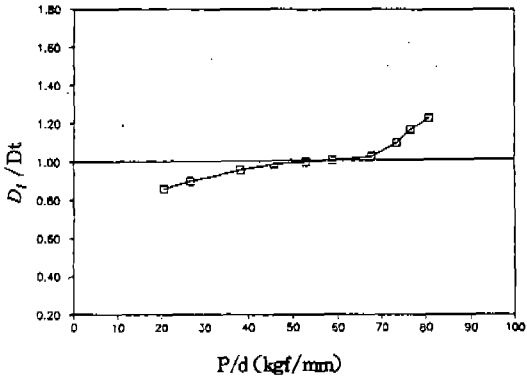


Fig. 8  $D_1/D_t$  of Caustics vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness:  $d = 1.7$  mm, Crack Length:  $a = 10$  mm)

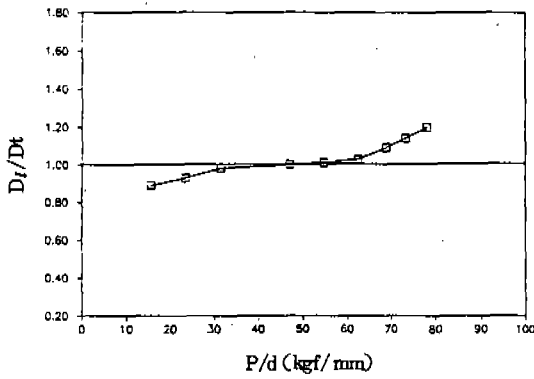


Fig. 9  $D_1/D_t$  of Caustics vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness:  $d = 3.2$  mm, Crack Length:  $a = 10$  mm)

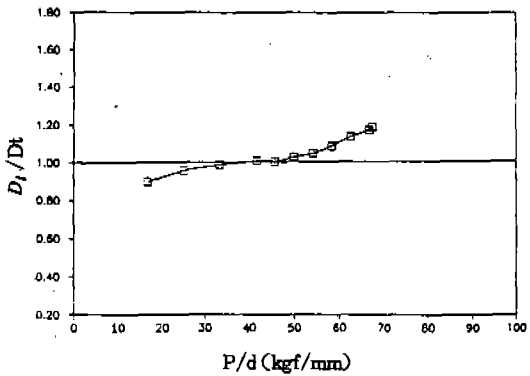


Fig. 10  $D_1/D_t$  of Caustics vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness:  $d = 6$  mm, Crack Length:  $a = 10$  mm)

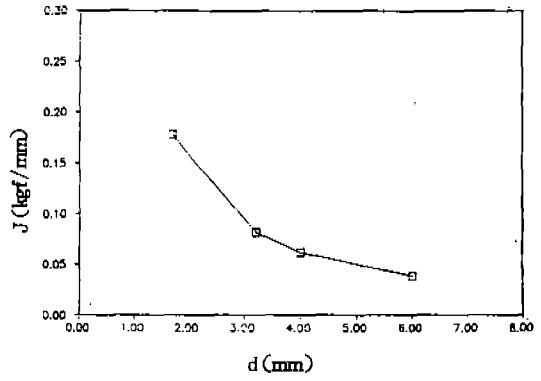


Fig. 11 J-Integral vs. Thickness (Load: 200 Kgf, Crack length:  $a = 10$  mm)

J-적분값을 나타낸 것으로 두께가 두꺼울수록 J-적분값이 비선형으로 감소한다. 이 현상은 탄성 응력확대계수( $K_I$ )와 두께에 대한 기존의 유형과 거의 유사하며, 두께가 약 6 mm 이하일 때에는 복합응력상태 (mixed mode) 이고 두께가 약 6 mm 이상일 때에는 평면변형 상태로 되어 J-적분값은 거의 일정하게 된다.

Fig. 12는 두께  $d = 1.7$  인 시편에 대해서(하중/두께)의 비가 변화함에 대응하는 J-적분값을 반사형 Caustics 방법을 이용하여 몇가지 균열길이에 대해 나타낸 것이다. 이론 SEN 시편에서는 J-적분값이 하중의 제곱에 비례되는 일반적인 양상이 나타나게 되나 균열길이가 시편폭(50 mm)의 반정도 되면 경계조건이 Caustics 형성에 영향을 미칠 가능성이 있으므로 Caustics 형성 이론식을 수정해야 될

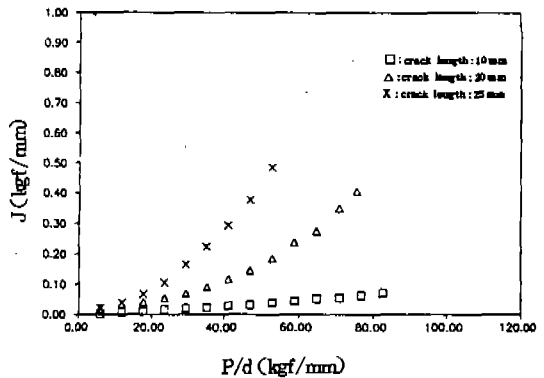


Fig. 12 J-Integral vs. Load Per Unit Thickness ( $P/d$ ) (Thickness:  $d = 1.7$  mm)

것으로 생각되나 이것은 본 논문의 범위를 벗어나며, 이 방면의 계속적인 연구가 필요할 것으로 사료된다.

## 5. 결 론

J-적분값을 직접적으로 결정할 수 있는 유일한 방법인 Caustics 방법을 고인성 유리질 중합체인 Polycarbonate SEN 시편에 적용시켜서, 반사형 Caustics와 투과형 Caustics의 차이점 및 시편두께, 하중의 크기 등의 J-적분값의 결정에 미치는 기초적인 영향들을 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Polycarbonate와 같은 연성이며, 고인성인 재료에 대해서 Caustics 방법에 의하여 J-적분값을 결정할 수 있음을 실험적으로 입증하였다.

2. 반사형 Caustics에 의한 J-적분값과 유한요소법에 의한 J-적분값은 하중이 작은 범위내에서는 대체로 유사하나, 하중이 증가하고 시편의 두께가 얇아질수록 Polycarbon-

ate의 균열선단에서 형성되는 Craze로 인하여 반사형 Caustics 방법으로 구한 J-적분값이 작아지게 되는 것을 확인하였다.

3. Caustics의 종방향지름( $D_t$ )과 횡방향지름( $D_l$ )의 비( $D_l/D_t$ )가 하중, P (kgf)와 두께, d (mm)의 비가  $40 < \frac{P}{d} < 60$  범위내에서 대체로 1에 수렴하고, 균열선단에서의 소성구역이 커지게 됨에 따라서 1 이상으로 커지게 된다.

4. 두께가 두꺼워지면 Caustics 방법에 의해서 결정된 J-적분값의 크기가 비선형적으로 감소하여 일정한 값으로 수렴함을 밝혔다.

5. Caustics 방법에 의한 J-적분값을 결정할때 J-적분값의 균열길이에 대한 의존성이 선형적이 아닌것을 밝혔다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구비(871-0910-004-2)로 수행되었으며 이에 감사드립니다.