

摩擦 接觸으로 인한 Fretting에 대한 研究

이대희*, 최동훈*, 윤갑영*, 임장근**

*한양대학교 공과대학 기계설계과

**한양대학교 공과대학 기계공학과

An Analysis of Fretting by the Frictional Contact

Lee Dae Hee*, Choi Dong Hoon*, Yoon Gab Young*, Lim Jang Keun**

*Han Yang Univ. Dept. of Design and Production Eng.

**Han Yang Univ. Dept. of Mechanical Eng.

Abstract – Most of machines and structures contain the elements which contact each other directly. When these elements subjected to vibration or repeated load, local relative movement occurs between the elements in contact which results in, a kind of wear.

In order to know the factors which govern fretting, we have to analyze the phenomenon of micro-slip which causes fretting by using a general and efficient method from a viewpoint of contact mechanics. Based on the results of analysis, it is necessary to propose the way of minimizing fretting which is one of the most significant surface failure.

In this report, a general and efficient algorithm is applied to analyze the contact problem of the bolted joint, which is one of the typical elements damaged by fretting, with ratios of plate thickness, the ratios of Young's moduli, the ratios of the plate thickness to bolt radius varied. Finally, the ways of minimizing fretting for the bolted joint are suggested.

NOMENCLATURE

a	: 圓形 接觸面의 半徑	q	: 剛體 變位 벡터
\tilde{a}	: 初期 間隔 벡터와 外力에 대한 彈性 變形 벡터의 합	\tilde{r}	: 接觸点까지의 半徑
A	: 剛體 變位를 위한 運動學的 變換 行列 (Kinematic transformation matrix)	R	: 剛體 變位의 自由度 数
B	: 影響 係數 行列	\tilde{s}	: 接觸力 또는 接線力 벡터
\tilde{e}	: $[1, 1, \dots, 1]^T$	s_k	: 임의 k 점에서의 接觸力 또는 接線力
E	: 彈性 係數	\tilde{t}	: 外力 벡터
f	: 摩擦 係數	T	: 接線 荷重
F	: 影響 係數 行列	\tilde{Y}	: slack 變數 벡터
H	: 外力에 대한 運動學的 變換 行列 (kinematic transformation matrix)	Y_{1k}, Y_{2k}	: 음이 아닌 變數
I, I_N, I_R	: 單位 行列(Identity matrix)	Z_j, Z_{2n+1}	: 任意 變數
K	: 剛性 行列	Z_N, Z_R, Z_L, Z_2	: 任意 變數 벡터
n, N	: 예상 接觸點의 数	β	: 接線 荷重 方向으로의 剛體 變位
P	: 垂直力 벡터	ε	: 變形後의 間隔 벡터
		ε_k	: 任意의 k 点에서의 變形後의 間隔
		ν	: 프와송 比

1. 序 論

대부분의 機械나 構造物은 직접 接觸하고 있는 要素들을 가지고 있다. 이 要素들에 미소 振動이나 반복 荷重이 작용할 때 매우 작은 振幅을 가진 상대적 미끄름 현상이 유발되며 이로 인해 마찰의 한 종류인 Fretting 마찰이 발생한다.

Fretting은 1927년 Tomlinson [1]이 用語를 정의하여 8×10^{-9} m 정도의 Microslip의 경우에도 Fretting이 일어난다는 것을 발견한 이래 Sakmann, Rightmire [2]와 Mason, White [3] 등이 Tomlinson의 結論을 뒷받침했으며 아주 작은 상대 운동하에서도 Fretting이 일어날 수 있다는 것을 제시했다. 그후 많은 研究者들에 의해서 Fretting이 일어날 수 있는 上限界가 있음이 발견되었고, 이 上限界를 지나면 이 과정은 機械的인 마찰로 바뀌는데 Ohmae, Tsukiezoe [4] 등이 이 上限界를 $300\mu\text{m}$ 로, Halliday [5]은 $250\mu\text{m}$ 로 제시했고 Ohmae [4], Uhlig [6], Whaterhouse [7] 등은 미끄름 크기와 Fretting 마찰을 사이에 線形 關係가 있음을 발견했다.

接觸 壓力에 대한 Fretting의 影響은 확실치 않으나 Mason [3], Bill [8], Toth [9], Feng [10] 등에 의하여荷重이 증가함에 따라 Fretting damage가 증가한다는 것이 발표되었다. 반면 垂直 荷重이 증가함에 따라서 맞물리는 表面사이의 摩擦力이 크게 되어 미끄름량이 작게 되고 그 結果 Fretting이 감소하게 된다는 것도 제시되었으며 이것은 Shaft와 collar 사이의 Fretting에 대해서 研究를 한 Budinski [11]에 의해서 증명되었다.

최근에는 Elloit [12] 등에 의하여 Bearing / Cartridge 接觸面의 상대 운동을 解析하여 接觸面 사이의 상대 운동은 대단히 복잡하고 振動 Spectrum의 어느 한 振動數도 지배적이지 못함을 보여주었다. 이 研究에서는 接觸面 사이의 상대 운동에 대한 定量的 解析이 시도되었으나 運動體가 弹性體인가 刚體인가에 대한 의문이 세기 되었고 또한 接觸 表面 주위에서 다른점에서의 상대 운동 성격에 대한 문제점이 야기되고 있다.

Furey [13] 등은 Bearing / Cartridge 接觸面의 Fretting을 지배하는 주요 因子들을 조사하기 위한 방법으로 有限 要素法을 이용하여 接觸 壓力, 變形 및 상대 變位를 解析하였으나 그의 모델은 接觸 特性을 제대로 고려치 않고 있다.

Fretting을 지배하는 주요 因子를 알기 위해서는 이를 유발하는 Micro-Slip 현상을 接觸 力學的 관점에서 일반적이며 效率的인 方法으로 解析하여야 하며, 이를

통하여 接觸 부품들의 表面 損傷의 주요 원인인 Fretting을 最小化할 수 있는 方法을 제시할 필요가 있다.

本 研究에서는 직접 接觸하고 있는 機械 부품들의 損傷의 중요한 원인중의 하나인 Fretting을 유발하는 복합 荷重하에서 Micro-slip 현상을 解析하기 위하여 垂直 荷重만이 작용하는 多物體 接觸 問題를 解析할 수 있는 算法[14]과 摩擦을 고려한 垂直 荷重과 接線荷重이 동시에 작용하는 경우에서의 接觸 問題를 解析할 수 있는 算法[15]을 이용하여 실제적인 보울트 체결부의 解析된 要素인 圓板의 두께비의 변화, 圓板의 弹性 係數비의 변화, 圓板의 두께와 보울트 구멍의 비에 따른 Micro-slip 현상을 解析하여 Fretting을 最小화할 수 있는 方法을 제시하였다.

2. 보울트 체결부의 接觸 問題 解析

본 研究에서 보울트 체결부의 接觸 問題 解析을 위해 가정된 사항은 다음과 같다.

- 1) 變形은 線形 弹性論을 따른다.
- 2) 매끄러운 表面사이의 接觸이다.

2-1. 垂直 荷重만이 작용하는 보울트 체결부의 接觸 問題 解析

2-1-1. 解析 理論

보울트 체결부의 接觸 壓力を 구하는데 있어 보울트 체결부는 보울트, 圓板, 너트 등 3개 이상의 要素가 接觸하고 있는 多物體 接觸이므로 多物體 接觸 問題로의 解析이 필요하다.

多物體 接觸 問題는 平衡 方程式, 適合 方程式, 接觸 條件 등을 사용하여 식(1)과 같은 最適化 問題로 数式化 될 수 있다[14].

$$\text{minimize} \sum_{j=1}^{N+R} Z_j \quad (1-1)$$

subject to

$$-Bs - Aq + I_N \varepsilon + I_N Z_N = a \quad (1-2)$$

$$A^T s + I_R Z_R = -H^T t \quad (1-3)$$

$$\text{either } s_k = 0 \text{ or } \varepsilon_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1-4)$$

$$s_k \geq 0, \quad \varepsilon_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1-5)$$

$$Z_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, N+R \quad (1-6)$$

위의 最適化 問題에서 (1-4)식을 제외한 모든 條件式과 目的 函数가 線形이며 (1-4) 식은 線形 計劃法의 entry rule 을 수정하여 효율적으로 풀 수 있다.

2-1-2 解析結果

問題 解析에 사용된 보울트, 圓板 및 너트의 모델을 Fig. 1에 圖示하였으며 각 要素의 物性值와 차원을 Table 1에 나타내었다.

Fig. 2는 보울트, 2개의 圆板 및 너트와 接觸하고 있는 多物體 接觸 問題를 解析하기 위한 有限要素 모델을 圖示한 것이며 有限要素로는 축 대칭 荷重이 작용하므로 축 대칭 要素를 사용하였다.

本研究에서 제시한 多物體 接觸 解析法에 의한 보울트와 圆板사이의 接觸 壓力 分布를 두 物體 接觸으로 해석한 Maruyama의 解析結果와 比較한 것이 Fig. 3이다. 解析에 사용된 보울트와 圆板의 弹性 係數는 206 GPa, 泊瓦率 비는 0.3으로 하였고 垂直 荷重은 1 KN 으로 하였다. 여기서 荷重은 보울트의 축 중심으로부터 接觸点까지의 半徑을 나타내며 종종은 接觸点에서의 接觸 壓力과 보울트와 圆板에 작용하는 平均 接觸 壓力과의 비이다. Fig. 3에서 볼 수 있는 바와 같이 보울트와 圆板이 接觸하는 인쪽 부근에서 多物體 接觸 解析法에 의한結果가 다소 작게 나타나고 있으며 전체적인 경향은 일치하고 있다.

Fig. 4, 5는 圆板의 두께를 변화시켰을 때의 보울트와 圆板사이, 圆板과 圆板사이의 接觸 壓力 分布를 圖示한 것이며 圆板 두께비의 변화에 따라 보울트와 圆板 사이의 接觸 壓力 分布는 거의 차이가 없으나 圆板과 圆板사이의 接觸 壓力 分布는 매우 큰 변화를 보임을 알 수 있다. 이 결과는 Yoshimine 등에 의한 $h_2/h_1=1$

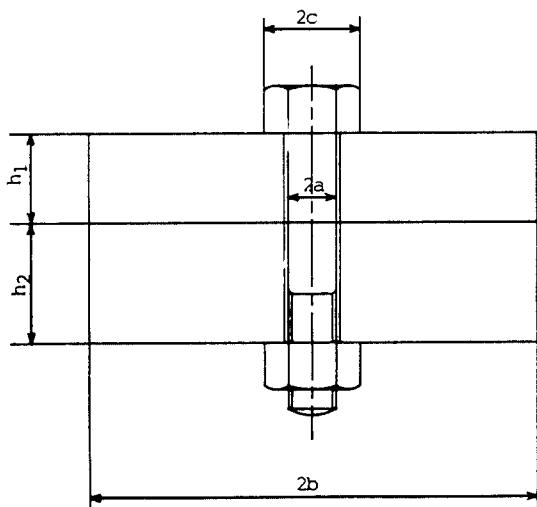


Fig. 1. Model of analysis for bolted joint

Table 1. Dimensions and material properties.

*bolt

	E	ν	a	c
bolt	206GPa	0.3	0.1 m	0.2 m

*Circular plates I and II

	E ₁	E ₂	ν_1	ν_2	h ₁	h ₂	b
No.1	206GPa	206GPa	0.3	0.3	0.3m	0.3m	0.5m
No.2	206GPa	206GPa	0.3	0.3	0.3m	0.09m	0.5m
No.3	206GPa	206GPa	0.3	0.3	0.3m	0.18m	0.5m
No.4	1236GPa	206GPa	0.3	0.3	0.3m	0.3m	0.5m
No.5	2472GPa	206GPa	0.3	0.3	0.3m	0.3m	0.5m
No.6	206GPa	206GPa	0.3	0.3	0.09m	0.09m	0.5m
No.7	206GPa	206GPa	0.3	0.3	0.18m	0.18m	0.5m

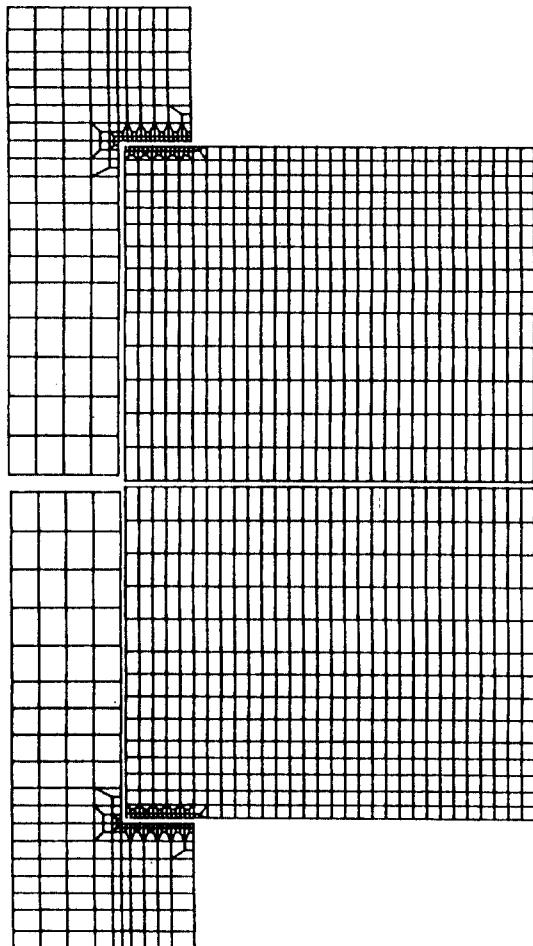


Fig. 2. Finite element model of bolted joint

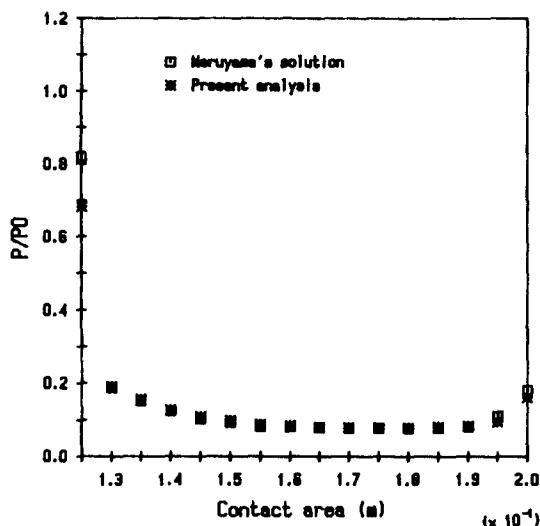


Fig. 3. Pressure distribution between bolt and circular plate

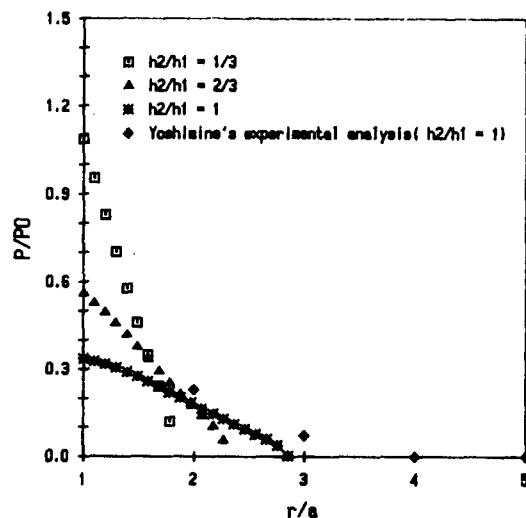


Fig. 5. Pressure distribution tow circular plates according to the plate thickness ratio
($E_2/E_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

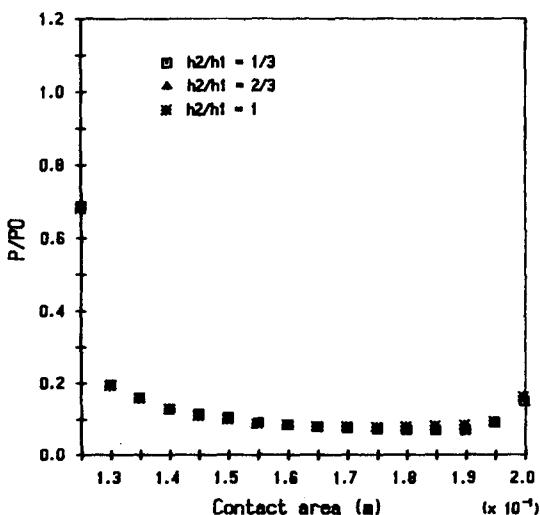


Fig. 4. Pressure distribution between bolt and circular plate according to the plate thickness ratio
($E_2/E_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

일때의 實驗 結果와 잘 일치하고 있다.

Fig. 6, 7은 圓板의 弹性係數를 變화시켰을 때의 보울트와 圓板, 圆板과 圆板사이의 接觸 壓力 分布를 圖示한 것이며 圆板의 弹性 係數比에 따라 보울트와 圆板사이의 接觸 壓力 分布는 매우 큰 변화를 보이나 圆板과 圆板의 接觸 壓力 分布에는 거의 영향을 미치지

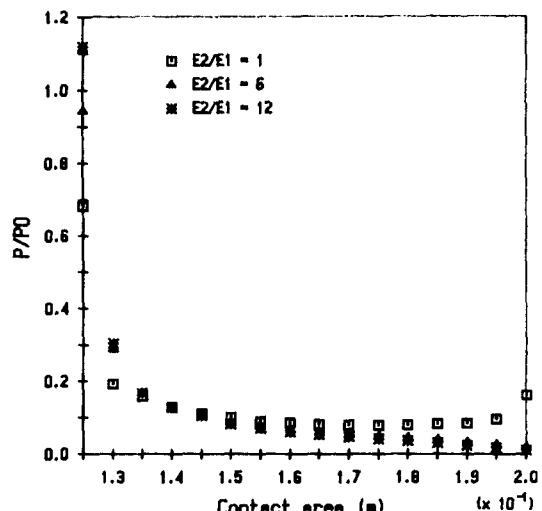


Fig. 6. Pressure distribution between bolt and circular plate according to the Young's moduli ratio
($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 3$)

않음을 알 수 있다. 이 결과는 Yoshimine 등에 의해 $E_2/E_1 = 1$ 일때의 實驗 結果와 잘 일치하고 있다.

Fig. 8, 9는 보울트 구멍과 圆板 두께의 비를 變화시켰을 때의 보울트와 圆板사이, 圆板과 圆板사이의 接觸 壓力 分布를 圖示한 것이며 보울트 구멍과 圆板 두께의

비에 따라 보울트와 圓板사이의 接觸 壓力 分布는 거의 차이가 없으며 圆板과 圆板사이의 접촉 壓力 分布는 매우 큰 변화를 보임을 알 수 있다. 이 結果는 Yoshimine 등에 의한 $h_1/a = 3$ 일때의 實驗 結果와 잘 일치하고 있다.

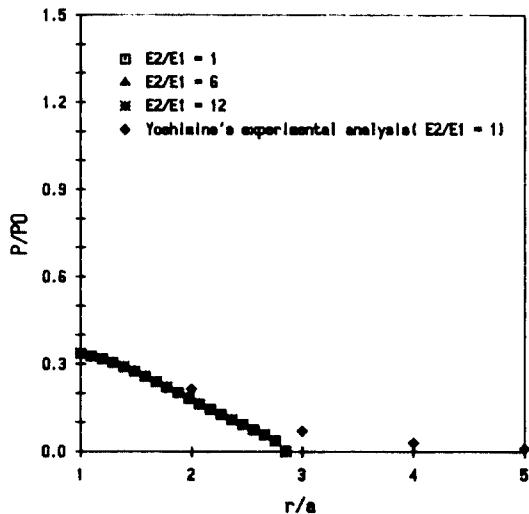


Fig. 7. Pressure distribution between two circular plates according to the Young's moduli ratio
($h_2/h_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

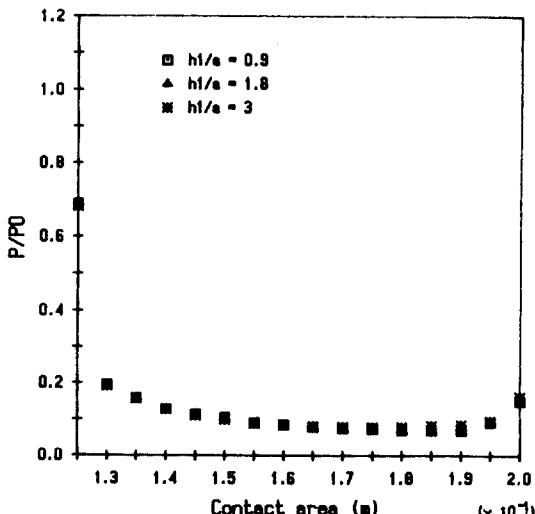


Fig. 8. Pressure distribution between bolt and circular plate according to the ratio of plate thickness and bolt radius
($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 1$)

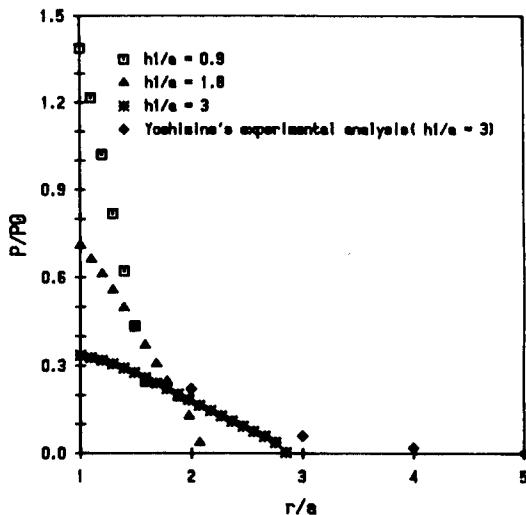


Fig. 9. Pressure distribution between two circular plates according to the ratio of plate thickness and bolt radius
($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 1$)

2-2. 垂直荷重과 接線荷重이 동시에 작용하는 보울트 체결부의 接觸問題 解釋

垂直荷重에 의하여 형성된 接觸領域에서의 摩擦로 인한 接線方向의 traction이 接觸領域의 크기와 형태, 그리고 接觸壓力分布에 미치는影響은 일반적으로 작으며, 특히 摩擦係數가 1보다 째 작은 경우에 그影響이 매우 작다.[16] 따라서 接線荷重이 작용하는 摩擦接觸問題를 해석하는데 있어 接觸壓力과 接線方向으로의 traction 상호간의影響을 무시할 수 있고 垂直荷重과 接線荷重에 의한 應力과 變形量들은 서로 독립적인 것으로 간주하여 解析하여 接觸壓力과 接線方向의 traction을 중첩함으로써 合力(resultant stress)를 구할 수 있다.

완전 미끄럼(gross sliding)을 일으키는 臨界荷重值보다 작은 接線荷重이 작용할 때 생기는 Micro-slip 현상을 解析하기 위한 摩擦接觸問題는 適合條件式, 接線力에 대한 條件, 摩擦接觸問題의 條件 등을 사용하여 다음과 같은 最適化問題로 나타낼 수 있다. [15]

$$\text{minimize } \sum_{j=1}^{2n+1} Z_j \quad (2-1)$$

subject to

$$-\underline{F}_S + \underline{IY}_1 - \beta e + \underline{IZ}_1 = 0 \quad (2-2)$$

$$\underline{I}_S + \underline{IY}_2 + \underline{IZ}_2 = fP \quad (2-3)$$

$$\underline{e}^T s + Z_{2n+1} = T \quad (2-4)$$

either $Y_{1k} = 0$ or $Y_{2k} = 0$

$$k=1, 2, \dots, n \quad (2-5)$$

$$s_k \geq 0, Y_{1k} \geq 0, Y_{2k} \geq 0, \beta \geq 0$$

$$k=1, 2, \dots, n \quad (2-6)$$

$$Z_k \geq 0 \quad k=1, 2, \dots, 2n+1 \quad (2-7)$$

위의 (2-2)式에서 나타난 影響 係數 行列(F)를 구하는데 있어 有限 要素法을 적용함은 解의 정확도는 항상 되지만 본 研究에서 解析되는 보울트 체결부의 摩擦 接觸 問題는 축대칭 荷重인 法線 荷重이외에 接線 荷重이 작용하므로 축대칭 要素를 사용하여 2차원 問題로 解析할 수 없고 3차원 問題로 解析해야 하기 때문에 影響 係數 計算시 막대한 計算 容量과 計算 時間이 요구되는 단점이 있다. 본 研究에서는 解의 정확도는 다소 떨어지지만 影響 係數 計算의 효율성을 감안하여 弹性論을 이용하여 影響 係數를 구하였고 그 式은 다음과 같다.

$k \neq j$ 일 때

$$F_{kj} = \frac{1}{\pi r_{kj}} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{x_{kj}^2}{\pi r_{kj}^3} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \quad (3)$$

$k = j$ 일 때

$$F_{kk} = \frac{1}{\sqrt{\pi A_k}} \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{E} \quad (4)$$

여기서

$$x_{kj} = x_k - x_j$$

$$y_{kj} = y_k - y_j$$

$$r_{kj} = (x_{kj}^2 + y_{kj}^2)^{1/2}$$

$$A_k = \text{요소 } k \text{의 면적}$$

摩擦 接觸 問題를 解析하기 위한 最適化 問題에서 (2-5)式을 제외한 모든 條件式과 目的 函数가 線形이며 (2-5)式은 線形 計劃法의 entry rule을 수정하여 처리할 수 있으므로 垂直 荷重과 接線 荷重이 동시에 작용하는 摩擦 接觸 問題는 수정된 線形 計劃法을 적용하여 효율적으로 解析할 수 있다.

2-2-2. 解析 結果

垂 直 荷重만이 작용하는 보울트 체결부의 接觸 問題에서 보울트와 圓板, 圓板과 圓板사이의 接觸 問題를 解析한 결과 圓板과 圓板사이의 接觸 壓力이 보울트와 圓板사이의 接觸 壓力보다 일반적으로 작기 때문에 圓

板과 圓板사이의 摩擦力이 보울트와 圓板사이의 接觸 壓力보다 작다. 따라서 圓板과 圓板사이에서 미끄름이 일어날 가능성이 크기 때문에 2-1. 장에서 구한 接觸 壓力이 圓板과 圓板사이에 작용할 때에 摩擦 接觸 問題를 解析하여 接線 方向으로의 traction 分布와 미끄름량을 구하였다. 이때에 接線 荷重은 70 N으로 하였다.

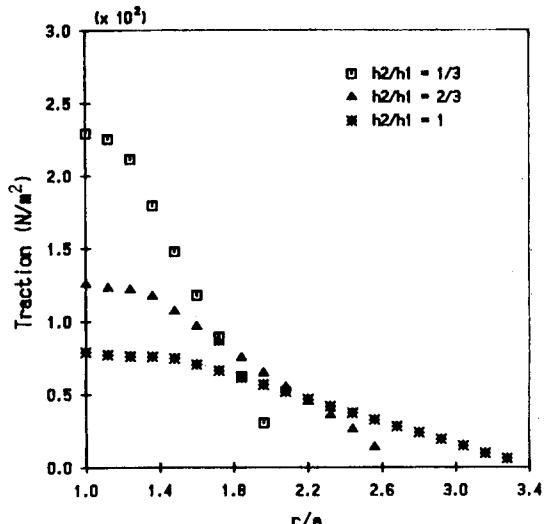


Fig. 10. Traction distribution between two circular plate according to the plate thickness ratio ($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 1$)

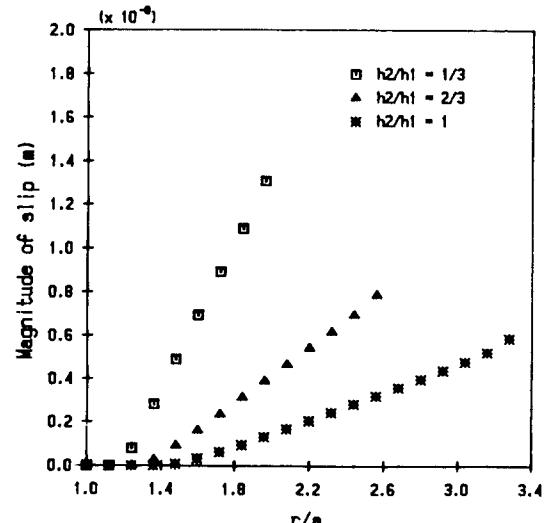


Fig. 11. Magnitude of slip on the contact area according to the plate thickness ratio ($E_2/E_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

Fig. 10, 11은 圓板의 두께 변화에 따른 traction 分布와 미끄럼량을 圖示한 것이고 圓板의 두께비가 커짐에 따라 接觸領域에서의 traction 分布가 작게 널리 分布하고 미끄럼량이 작아짐을 알 수 있다.

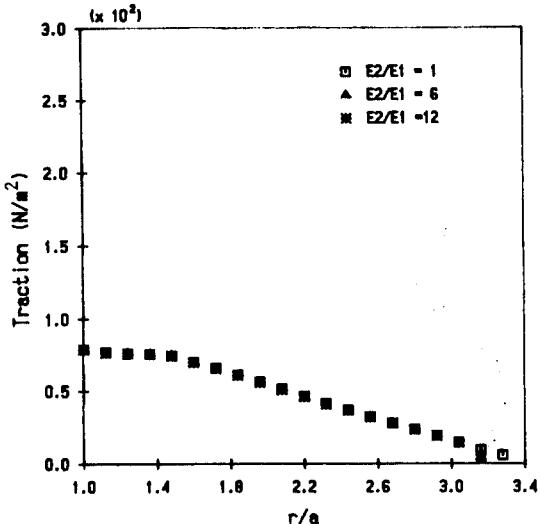


Fig. 12. Traction distribution between two circular plates according to the Young's moduli ratio
($h_2/h_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

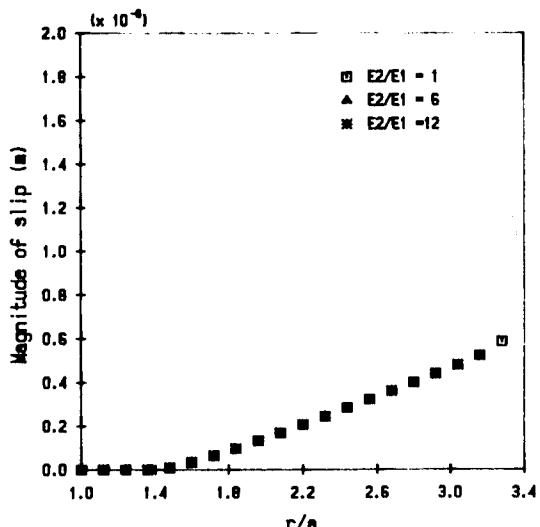


Fig. 13. Magnitude of slip on the contact area according to the Young's moduli ratio
($h_2/h_1 = 1$, $h_1/a = 3$)

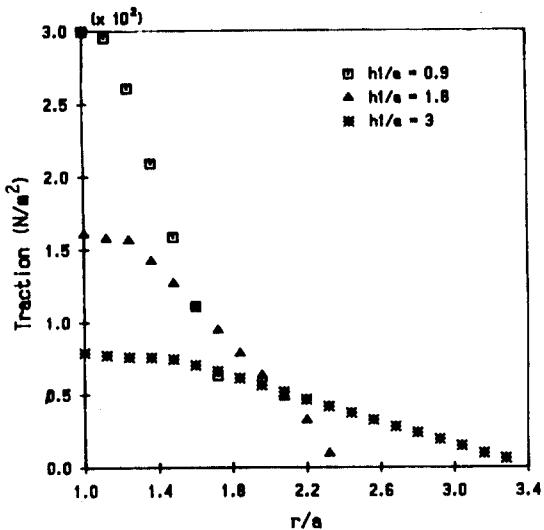


Fig. 14. Traction distribution between two circular plates according to the ratio of plate thickness and bolt radius
($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 1$)

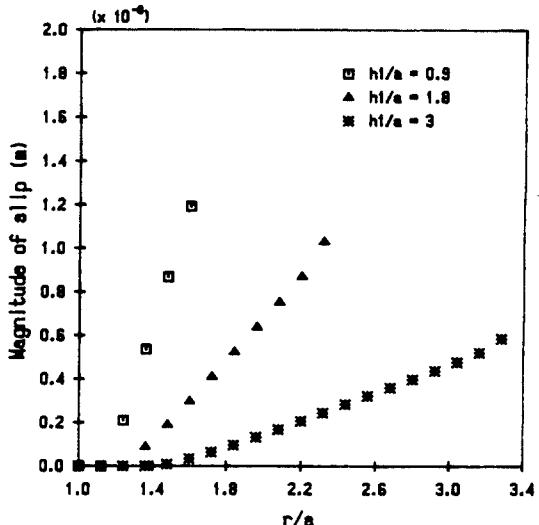


Fig. 15. Magnitude of slip on the contact area according to the ratio of plate thickness and bolt radius
($h_2/h_1 = 1$, $E_2/E_1 = 1$)

Fig. 12, 13은 圓板의 弹性係數比에 따른 traction 分布와 미끄럼량을 圖示한 것으로 圓板의 弹性係數比에 의한 接觸領域에서의 traction 分布와 미끄럼량에 거의影響을 미치지 않음을 알 수 있다.

Fig. 14, 15는 보울트 구멍의 半徑과 圓板의 두께의 비의 변화에 따른 traction 分布와 미끄름량을 図示한 것으로 보울트 구멍의 半徑과 圆板의 두께비가 커짐에 따라 接觸 領域에서의 traction 分布가 작게 널리 分布하고 미끄름량이 작아짐을 알 수 있다.

3. 보울트 체결부에서의 Fretting을最小化하기 위한 方法의 제시

보울트 체결부위가 다소 振動을 하거나 반복 荷重이 작용하면 보울트와 체결되는 要素사이, 체결된 要素들 사이에는 국부적인 상대 움직임이 발생한다. 이러한 국부적인 상대 움직임은 Micro-slip을 유발하게 되며 疲勞 破壞의 발생원인이 되는 Fretting 현상이 일어나게 되는데 이러한 Fretting은 $8 \times 10^{-9} \text{m}$ ($8 \times 10^{-1} \mu\text{m}$) 정도의 아주 작은 미끄름량에도 발생한다.

Fretting을最小化하기 위한 일반적인 原則은 Micro-slip을 일어나지 않게 하는 것이다. 그러나 接線荷重의 존재로 인하여 Micro-slip이 불가피하게 존재하는 경우에는 미끄름량의 크기와 Fretting 사이에는 線形關係[4], [6], [7]가 있으므로 미끄름량을 작게 하여야 한다. 그러므로 보울트 체결부에서 Fretting에 대한 정확한 解析을 하기 위하여는 接觸 領域에서의 미끄름량을 구하는 것이 필요하다.

本研究에서는 보울트 체결부의 Fretting 解析을 하기 위하여 垂直荷重만이 작용하는 多物體 接觸問題를 解析할 수 있는 算法을 이용하여 정확한 接觸壓力分布를 구하였으며 垂直荷重과 동시에 接觸荷重이 작용하는 摩擦接觸問題를 解析할 수 있는 算法을 이용하여 接觸 領域에서의 traction 分布와 미끄름량을 구하였다.

2-2 장에서 구한 接線方向으로의 traction 分布와 미끄름량에서 볼 수 있는 바와 같이 미끄름이 일어나지 않는 領域에서는 接線方向으로의 traction이 摩擦力보다 작으며 미끄름이 일어나는 領域에서는 接線方向으로의 traction이 摩擦力과 같음을 알 수 있다. 그러므로 미끄름이 일어나지 않기 위해서는 摩擦力이 크게 되도록 하여야 하는데 接觸 領域에서의 摩擦力은 接觸壓力과 摩擦係數의 곱이므로 가능한 한 큰 接觸壓力이 고르게 分布하도록 하고 摩擦係數를 크게 하여야 한다. 그러나 동일한 荷重條件하에서는 Fretting이 미끄름량의 크기에 비례하기 때문에 接觸 領域을 크게 하므로써 接觸壓力을 고르게 분포시켜 接線方向으로의 traction

을 작게 하여 接觸 領域에서의 미끄름량을 작게하는 것 이 바람직하다.

이와 같은 결과를 종합해 보울트 체결부에서 체결력과 摩擦係數를 크게하고 동일한 荷重 조건 일때는 보울트와 圆板, 圆板과 圆板사이의 接觸 領域을 크게 하여 接觸壓力 distribution를 接觸 領域에 고르게 分布시킴으로써 미끄름량을 작게하는 것이 Fretting을最小化할 수 있는 方法으로 생각된다.

4. 結論

彈性 領域에서 摩擦을 무시한 垂直荷重만이 작용하는 경우에서의 多物體 接觸問題와 摩擦을 고려한 垂直荷重과 接線荷重이 작용하는 경우에서의 摩擦接觸問題를 解析할 수 있는 汎用 算法을 실제적인 보울트 체결부에 적용하여 각 接觸 領域에서의 接觸壓力 distribution를 구하고 이結果를 이용하여 체결된 要素에서 接觸 領域에서의 接線方向으로의 traction과 미끄름량을 구하였다. 구해진 接線方向으로의 traction과 미끄름량은 보울트 체결부의 Fretting 解析에 이용될 수 있으므로 이結果를 이용하여 보울트 체결부의 Fretting을最小化하기 위한 方法을 제시하였다.

보울트 체결부에서의 Fretting을最小化하기 위해서는 보울트 체결부에서 체결력과 摩擦係數를 크게 하므로써 摩擦力を 크게하고 동일한 荷重條件일때는 보울트와 圆板, 圆板과 圆板사이의 接觸 領域을 크게 하여 接觸壓力을 接觸 領域에 고르게 分布시킴으로써 미끄름량을 작게하는 것이 Fretting을最小化할 수 있는 方法으로 생각된다.

後記

이研究는 1987年 文教部 學術研究造成費의 지원하에 이루어졌으며, 關係者께 感謝드립니다.

REFERENCES

1. B.A. Tomlinson, "The Rusting of Steel Surfaces in Contact", Proceeding of the Royal Society, Series A., Vol.115, 1927pp.427-483.
2. B.W. Sakmann and B.G. Rightmire, "An Investigation of Fretting Corrosion Under Several Condition of Oxidation", NACA TN 1492, June 1948.

3. W.P. Mason and S.E. White, "New Techniques for Measuring Forces and Wear in Telephone Switching Apparatus", Bell System Technical Journal, Vol.31, 1952.
4. N.Ohmae and T.Tsukizoe, "The Effect of Slip Amplitude on Fretting", Wear, Vol.27, 1974.
5. R.B. Halliday, "Experimental Investigation of Some Processes Involved in Fretting Corrosion", Corrosion Prevention and Control, Vol.5, No.56, Jan., 1958.
6. H.H. Uhlig, et al., "Fundamental Investigation Fretting Corrosion", NACA TN3029, 1953.
7. R.G. Waterhouse, "Fretting Corrosion", Proceedings, Institute of Mechanical Engineers, Vol.169, 1955.
8. R.C. Bill, "Fretting Wear of Iron, Nickel and Titanium Under Varied Environmental Conditions", NASA TM 78972, 1978.
9. L.Toth, "The investigation of the Steady state of Steel Fretting", Wear, Vol.20, 1972, pp.277-278.
10. Feng, I-Meng and H.H. Uhlig, "Fretting Corrosion of Mild Steel in Air and Nitrogen", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.21, No.4, 1954, pp395-400.
11. K.Budinski, "Control Fretting Corrosion", Thin Solid Films, Vol. 64, 1979, p.359.
12. K.B Elliot, H.H. Mabie, M.J. Furey and L.D. Mitchell, "A Vibration Analysis of a Bearing/Cartridge Interface for a Fretting Corrosion Study", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol.105, No.4, October 1983, pp.518-525.
13. M.J. Furey, H.H. Mabie, R.J. Stover, "A Finite Investigation of a Bearing/Cartridge Interface for a Fretting Corrosion Study", ASME Journal of Tribology, Vol.107, April 1985, pp.157-164.
14. 이대희, 전범준, 최동훈, 임장근, 윤갑영, "수정된 선형 계획법을 이용한 다물체 탄성 접촉 문제 해석", 대한기계학회 논문집 제13권 제1호, 1989, pp.1-8.
15. 이대희, 최동훈, "마찰을 고려한 치차의 접촉 문제 해석", 대한기계학회 논문집 제13권 6호, 1989, pp.1118-1127.
16. K.L. Johnson, Contact Mechanics, Cambridge University Press, 1984.