

3차원 압출팽창에 대한 수치모사 연구

이성재 · 이승종

서울대학교 공과대학 화학공학과
(1990년 11월 2일 접수)

Numerical Prediction of Three-Dimensional Extrudate Swell

Seong Jae Lee and Seung Jong Lee

*Department of Chemical Engineering, College of Engineering,
Seoul National University, Seoul 151-742, Korea*

(Received November 2, 1990)

요 약

자유표면 유동을 수반하며 복잡한 구조를 지나는 유동문제를 수치모사할 수 있는 삼차원 유한요소법 코드를 개발하였다. 정사각관을 대상으로 하는 삼차원 압출팽창 문제를 등은 뉴턴 유동 뿐만 아니라 비뉴턴 유동 및 비등온 유동문제의 경우까지 다룰 수 있도록 확장하여 수치모사하였다. 삼차원 유한요소법 알고리즘에 pathline approach 방법과 사상방법을 적용시켜 등은 뉴턴 유체의 미동흐름에 대하여 압출팽창 문제를 푼 결과 팽창비가 대칭면에서 최대 21.0%, 관의 모서리 부분에서 최소 4.1%로 나타났다. 전단박화 현상이 있는 비뉴턴 유동의 경우 뉴턴 유동에 비해 팽창이 작게 일어났고, 비등온 유동의 경우 관벽 온도가 낮은 쪽이 높은 쪽에 비해 팽창이 크게 일어남을 알 수 있었다.

Abstract—A full three-dimensional finite element code has been developed to solve the flow problems through arbitrary geometries, which may include free surfaces. This code together with the pathline approach method and the mapping method has been used to simulate three-dimensional extrudate swell from a square die in the cases of isothermal Newtonian and non-Newtonian flows and nonisothermal Newtonian flow. Extrudate swell of isothermal Newtonian creeping case exhibits a maximum swell of 21.0% at the plane of symmetry and a minimum swell of 4.1% at the corner. In the case of non-Newtonian flow, shear thinning effects produce lower swell compared to Newtonian one and in the case of nonisothermal flow, lower temperature side of the die wall exhibits higher swell compared to higher temperature side of the die wall.

Keywords: Three-dimensional flows/Extrudate swell/Finite element method/Free surface/non-Newtonian/nonisothermal

1. 서 론

압출팽창(extrudate swell 또는 die swell)이란

유체가 주어진 다이(die)를 통하여 대기 중으로 압출될 때 그 단면적이 다이의 단면적보다 커지는 현상을 일컫는 말인데, 이 현상은 이를 수반하는

여러 가지 고분자 가공공정(film and pipe extrusion, wire coating, fiber spinning 등)에 있어서 제품의 치수결정, 결정성 분자 및 섬유상의 배향상태 등에 큰 영향을 미치게 되므로 대단히 중요하다.

압출팽창 현상에 대한 수치모사 연구는 유한요소법을 사용하여 1974년 Nickell 등[1]이 비압축성 뉴턴 유체의 미동흐름(incompressible Newtonian creeping flow)에 대하여 발표한 이래로 계속되어 왔는데, 이차원 압출팽창에 대한 연구가 대부분이다. Reddy와 Tanner[2]에 의해 관성 및 표면장력 효과가 고려되었고, Tanner 등[3]에 의해 비뉴턴 유체에 대한 압출팽창이 연구되었으며, 그 후로는 탄성효과를 고려한 연구가 이차원 압출팽창의 경우 주된 관심사였다[4-8]. 비등온 문제를 다룬 압출팽창에 대한 연구는 Phuoc와 Tanner[9], 그 밖의 여러 문헌[10-12]에서, 그리고 점탄성 유체의 비등온 압출팽창에 대한 연구는 Sugeng 등[13], McClelland와 Finlayson[14]에서 찾아볼 수 있다.

삼차원 압출팽창 현상에 대한 수치모사 연구는 최근까지 별로 이루어지지 않았는데 그 이유는 이 유동문제를 삼차원적으로 풀기에는 문제가 너무 크고 복잡하며, 자유표면을 결정해주는 방법과 자유표면을 구한 다음 내부의 좌표들을 조절해주는 적절한 방법이 없었기 때문이다. 이 분야에서 삼차원 유동문제를 처음으로 다룬 것은 Bush와 Phan-Thien[15]이었고, Tran-Cong과 Phan-Thien[16-18]에 의해 발전되었는데, 이들은 모두 경계요소법(boundary element method)을 사용하였으며 이것은 삼차원 유동문제를 이차원화시켜 문제의 크기를 줄여줌으로써 해를 얻는 시간을 줄여 주는 장점을 가지고 있다. 그러나 와류(vortex)와 같은 유동을 포함한 경우까지를 모두 고려해 주기 위해서는 유한요소법을 이용하여 삼차원 유동방정식 전체를 풀어줄 수 밖에 없게 되는데, 이렇게 유한요소법을 이용하여 삼차원 압출팽창 문제를 다룬 것은 Karagiannis 등[19, 20]과 Shiojima와 Shimazaki[21]에서 찾아볼 수 있다. Karagiannis 등은 뉴턴 유체를 대상으로 등온 및 비등온 문제를 kinematic condition을 부과시켜 자유표면을 추적하였으며, spine 방법을 사용하여 내부의 좌표를 결정하였고, Shiojima와 Shimazaki는 압력항을 penalty법으로 처리한 유한요소법을 사용하여 등온 Maxwell 유체의 유동에 대한

압출팽창 문제를 다루었다.

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 삼차원 압출팽창 문제를 다루는데, 등온 비압축성 뉴턴 유체 및 비뉴턴 유체의 미동흐름, 비등온 뉴턴 유체의 유동을 대상으로 하여 속도, 압력 및 온도장을 구하고 속도장으로부터 pathline approach 방법에 의해 자유표면을 추적한 다음, 사상(mapping) 방법에 의하여 내부의 좌표들을 결정하는 방법을 사용하여 압출팽창 현상을 살펴보고자 한다.

2. 지배방정식과 경계조건

삼차원 압출팽창에 대한 계(system)의 개략도는 Fig. 1에 나타나 있는데, 주 유동 방향을 삼차원 공간에서의 양의 x축 방향으로 하였다. 이 때 그 지배방정식은 정상 상태에서 다음과 같이 운동방정식, 연속방정식 및 에너지식(momentum, continuity and energy equation)으로 표시된다.

$$\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}} + \underline{f} \quad (1.a-1.c)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.d)$$

$$\rho C_p \underline{v} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T + \underline{\underline{\tau}}} : \nabla \underline{v} \quad (1.e)$$

본 연구에서 사용된 유변방정식(rheological constitutive equation)은 다음과 같으며,

$$\underline{\underline{\tau}}} = \eta(\dot{\underline{v}}, T) (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) \quad (2)$$

비뉴턴 유체의 유동에 사용되는 shear rate의 함수로 표시되는 점도식으로는 넓은 범위의 실험값에도 잘 적용되는 Carreau-Yasuda 점도모델을 사용하였고,

$$\eta = \eta_0 [1 + (\lambda \dot{\underline{v}})^a]^{(n-1)/a} \quad (3)$$

비등온 뉴턴 유체의 유동에 사용되는 온도의 함수로 표시되는 점도식으로는 다음의 Arrhenius형 점도모델을 사용하였다.

$$\eta = \eta_1 \exp[-b(T - T_1)] \quad (4)$$

다음, 계의 경계조건은 Fig. 1에 잘 나타나 있다. 입구부분(면 ABCD) 유동은 충분히 전개된 속도장과 온도장(fully developed velocity and temperature fields)을 부과시켰는데 이것은 입구부분의 y

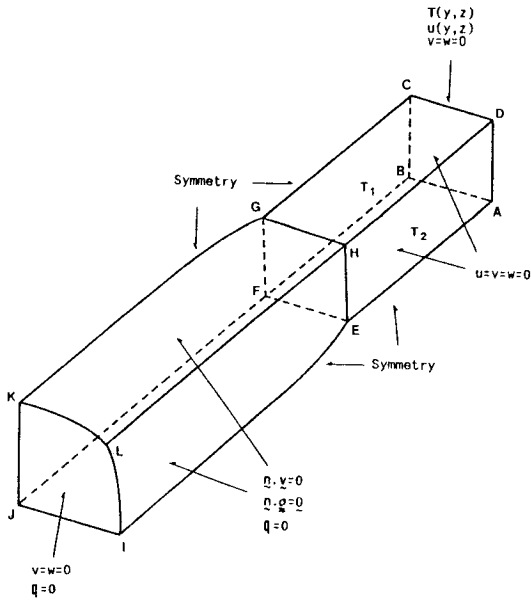


Fig. 1. Domain and the boundary conditions in the three-dimensional extrudate swell.

-z면에 대하여 다음 이차원 유동문제를 풀어줌으로써 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial y} (\eta \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\eta \frac{\partial u}{\partial z}) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (6)$$

출구를 지나 압출된 제일 끝부분(면 IJKL) 유동은 힘이 작용치 않는 경계조건(traction free boundary condition)으로 플러그 유동(plug flow)을 가정했으며, 열속(heat flux)이 없는 조건을 부과시켰다. 관벽(면 DHGC와 DHEA)에서는 no slip 경계조건을, 그리고 T₁, T₂로 지정한 온도를 부과시켰고 압출된 자유표면(면 HLKG와 HLIE)에서는 표면장력을 고려치 않은 조건과 열속이 없는 조건을 부과시켰다.

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (7)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{\gamma}} = 0 \quad (8)$$

$$\underline{n} \cdot \nabla T = 0 \quad (9)$$

그리고 문제의 크기를 줄이기 위해 면 BFJKGC와 AEIJFB를 대칭면으로 잡았다.

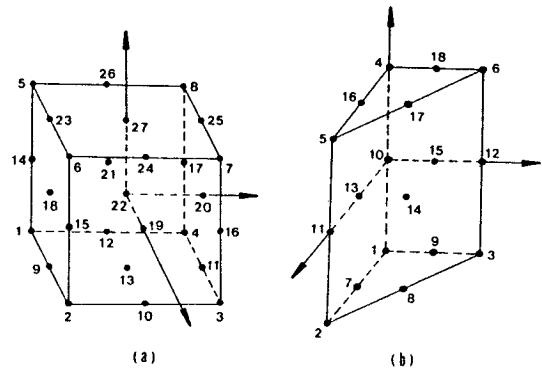


Fig. 2. Master three-dimensional elements.
(a) 27-node hexahedron
(b) 18-node triangular prism.

이렇게 구성한 경계조건들을 지닌 elliptic 형태의 편미분방정식(식 1)이 구성되면 Galerkin 유한요소법을 사용하여 식을 풀게 된다. 두 가지 형태의 삼차원 요소를 사용했는데 Fig. 2는 27 질점을 가진 육면체 요소와 18 질점을 가진 프리즘 요소를 보여준다. 두 요소 모두 속도와 온도에 대해서는 삼차원 2차 형상함수(quadratic or triquadratic shape function)를, 압력에 대해서는 삼차원 1차(linear or trilinear) 형상함수를 isoparametric mapping으로 사용했고, 육면체 요소는 27 적분점(integration, point)을, 프리즘 요소는 21 적분점을 사용했다.

3. 삼차원 유동의 유한요소법 알고리즘

각 요소내에서 속도, 압력 및 온도는 다음과 같이 근사적으로 표시하였다.

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^M u_j \Psi_j(x, y, z) \quad (10.a)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^M v_j \Psi_j(x, y, z) \quad (10.b)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{j=1}^M w_j \Psi_j(x, y, z) \quad (10.c)$$

$$p(x, y, z) = \sum_{j=1}^N p_j \phi_j(x, y, z) \quad (10.d)$$

$$T(x, y, z) = \sum_{j=1}^M T_j \Psi_j(x, y, z) \quad (10.e)$$

여기서 u_i, v_j, w_k, p_i, T_j 는 질점(node)에서의 속도, 압력, 온도값이고 ϕ_i, Ψ_j 는 각각 1차, 2차 형상함수이며, 육면체 요소를 대상으로 할 때 $M=27, N=8$ 이며 프리즘 요소를 대상으로 할 때 $M=18, N=6$ 이다.

식 (1)에 가중잔류 방법(method of weighted residual)을 적용하고 divergence 정리를 이용하면 다음의 식이 구성된다[22].

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{i,x} ; -p + 2\eta u_{,xx} \rangle + \langle \Psi_{i,y} ; \eta(u_{,y} + v_{,x}) \rangle \\ &+ \langle \Psi_{i,z} ; \eta(u_{,z} + w_{,x}) \rangle + \rho \langle \Psi_i ; uu_{,x} + vv_{,y} \\ &+ ww_{,z} \rangle = \langle \Psi_i ; f_x \rangle + \langle \Psi_i ; t_x \rangle \end{aligned} \quad (11.a)$$

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{i,x} ; \eta(u_{,y} + v_{,x}) \rangle + \langle \Psi_{i,y} ; -p + 2\eta v_{,yy} \rangle \\ &+ \langle \Psi_{i,z} ; \eta(v_{,z} + w_{,y}) \rangle + \rho \langle \Psi_i ; uv_{,x} + vv_{,y} \\ &+ ww_{,z} \rangle = \langle \Psi_i ; f_y \rangle + \langle \Psi_i ; t_y \rangle \end{aligned} \quad (11.b)$$

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{i,x} ; \eta(u_{,z} + w_{,x}) \rangle + \langle \Psi_{i,y} ; \eta(v_{,z} - w_{,y}) \rangle \\ &+ \langle \Psi_{i,z} ; -p + 2\eta w_{,zz} \rangle + \rho \langle \Psi_i ; uw_{,x} + vw_{,y} \\ &+ ww_{,z} \rangle = \langle \Psi_i ; f_z \rangle + \langle \Psi_i ; t_z \rangle \end{aligned} \quad (11.c)$$

$$\langle \phi_i ; u_{,x} + v_{,y} + w_{,z} \rangle = 0 \quad (11.d)$$

$$\begin{aligned} &\rho C_p \langle \Psi_i ; uT_{,x} + vT_{,y} + wT_{,z} \rangle + \langle \Psi_{i,x} ; kT_{,x} \rangle \\ &+ \langle \Psi_{i,y} ; kT_{,y} \rangle + \langle \Psi_{i,z} ; kT_{,z} \rangle \\ &- \langle \Psi_i ; 2\eta \{ (u_{,x})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,z})^2 \} \rangle \\ &- \langle \Psi_i ; \eta \{ (u_{,y})^2 + (u_{,z})^2 + (v_{,x})^2 + (v_{,z})^2 \\ &+ (w_{,x})^2 + (w_{,y})^2 + 2(u_{,y}v_{,x} + u_{,z}w_{,x} \\ &+ v_{,z}w_{,y}) \} \rangle = k \langle \Psi_i ; T_m \rangle \end{aligned} \quad (11.e)$$

이 때 $\langle ; \rangle$ 는 체적에 대한 적분을 의미하고 $\langle ; \rangle$ 는 boundary를 따른 면적에 대한 적분을 의미한다. 식 (11)에 식 (10)을 대입하여 u, v, w, p, T 에 대한 항으로 정리하면 다음과 같은 비선형 대수방정식(nonlinear algebraic system)이 구성된다.

$$\begin{aligned} &A_{ij}u_j + D_{ij}v_j + E_{ij}w_j + IX_{ijk}u_ju_k + IY_{ijk}v_ju_k \\ &+ IZ_{ijk}w_ju_k - PX_{ij}p_j = X_i \end{aligned} \quad (12.a)$$

$$\begin{aligned} &D_{ji}u_j + B_{ij}v_j + F_{ij}w_j + IX_{ijk}u_jv_k + IY_{ijk}v_jv_k \\ &+ IZ_{ijk}w_jv_k - PY_{ij}p_j = Y_i \end{aligned} \quad (12.b)$$

$$\begin{aligned} &E_{ji}u_j + F_{ij}v_j + C_{ij}w_j + IX_{ijk}u_jw_k + IY_{ijk}v_jw_k \\ &+ IZ_{ijk}w_jw_k - PZ_{ij}p_j = Z_i \end{aligned} \quad (12.c)$$

$$-PX_{ji}u_j - PY_{ji}v_j - PZ_{ji}w_j = 0 \quad (12.d)$$

$$\begin{aligned} &H_{ij}T_j + GX_{ijk}u_jT_k + GY_{ijk}v_jT_k + GZ_{ijk}w_jT_k + AI_{ijk}u_ju_k \\ &+ AJ_{ijk}v_jv_k + AK_{ijk}w_jw_k + BI_{ijk}u_jv_k + BJ_{ijk}u_jw_k \\ &+ BK_{ijk}v_jw_k = Q_i \end{aligned} \quad (12.e)$$

여기서,

$$\begin{aligned} &A_{ij} = 2\langle \eta \Psi_{i,x} ; \Psi_{j,x} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,y} ; \Psi_{j,y} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,z} \rangle \\ &B_{ij} = 2\langle \eta \Psi_{i,y} ; \Psi_{j,y} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,x} ; \Psi_{j,x} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,z} \rangle \\ &C_{ij} = 2\langle \eta \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,z} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,x} ; \Psi_{j,x} \rangle + \langle \eta \Psi_{i,y} ; \Psi_{j,y} \rangle \\ &D_{ij} = \langle \eta \Psi_{i,y} ; \Psi_{j,x} \rangle \\ &E_{ij} = \langle \eta \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,x} \rangle \quad F_{ij} = \langle \eta \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,y} \rangle \\ &PX_{ij} = \langle \Psi_{i,x} ; \phi_j \rangle \quad PY_{ij} = \langle \Psi_{i,y} ; \phi_j \rangle \quad PZ_{ij} = \langle \Psi_{i,z} ; \Psi_j \rangle \\ &IX_{ijk} = \langle \rho \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,x} \rangle \quad IY_{ijk} = \langle \rho \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,y} \rangle \\ &IZ_{ijk} = \langle \rho \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,z} \rangle \\ &H_{ij} = k \langle \Psi_{i,x} ; \Psi_{j,x} \rangle + k \langle \Psi_{i,y} ; \Psi_{j,y} \rangle + k \langle \Psi_{i,z} ; \Psi_{j,z} \rangle \\ &GX_{ijk} = \rho C_p \langle \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,x} \rangle \quad GY_{ijk} = \rho C_p \langle \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,y} \rangle \\ &GZ_{ijk} = \rho C_p \langle \Psi_i ; \Psi_j \Psi_{k,z} \rangle \\ &AI_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,x} \Psi_{k,x} \rangle - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,y} \Psi_{k,y} \rangle \\ &\quad - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,z} \Psi_{k,z} \rangle \\ &AJ_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,y} \Psi_{k,y} \rangle - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,x} \Psi_{k,x} \rangle \\ &\quad - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,z} \Psi_{k,z} \rangle \\ &AK_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,z} \Psi_{k,z} \rangle - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,x} \Psi_{k,x} \rangle \\ &\quad - \langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,y} \Psi_{k,y} \rangle \\ &BI_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,y} \Psi_{k,x} \rangle \\ &BJ_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,z} \Psi_{k,x} \rangle \\ &BK_{ijk} = -2\langle \Psi_i ; \eta \Psi_{j,z} \Psi_{k,y} \rangle \end{aligned}$$

비선형 항들 중에서 관성력이 포함된 항과 대류 열전달이 포함된 항은 Newton iteration 방법으로 처리하였고, shear rate의 함수로 표시되는 비뉴턴 점도항은 Picard iteration 방법에 의해 처리하도록 구성하였다.

구성된 삼차원 유한요소법 알고리즘의 적합성을 확인하기 위하여 등은 뉴턴 유체를 대상으로 Fig. 3에 나타난 세가지 경우에 대하여 시험해 보았다. Fig. 3에서 Couette 유동(Fig. 3(a))과 Poiseuille 유동(Fig. 3(b))은 해석적 해가 존재하는 경우인데, 두 경우 모두 정확히 해석해와 일치하였고, 사각관 속을 흐르는 유동(Fig. 3(c))은 입구부분에 부과하는 유동장(식 5)이 제대로 되었는지를 판별하는 것인데

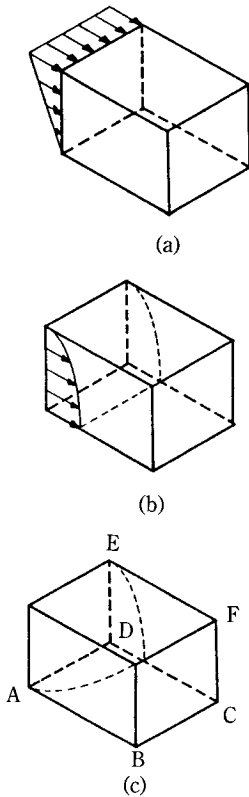


Fig. 3. Definition of the test problems.
 (a) Couette flow (b) Poiseuille flow
 (c) Flow in a square duct(at planes ABCD and CDEF, symmetry conditions are imposed).

내부와 출구부분 모두 충분히 전개된 유동장인 입구부분 유동과 일치하여 본 연구에서 구성한 삼차원 유한요소법 알고리즘이 제대로 되었음을 확인할 수 있었다.

4. 압출팽창의 자유표면 추적기법

유한 요소법으로 구성된 알고리즘을 본 압출팽창 문제에 적용시켜 풀면 먼저 속도장(u, v, w), 압력장(p) 및 온도장(T)을 얻게 된다. 여기서 얻은 속도장으로 자유표면을 구하는데 자유표면을 추적하는 방법으로는 일반적으로 널리 사용하는 pathline approach 방법을 사용하였다. Pathline approach 방법은 자유표면 위의 모든 pathline을 따라 가면서 다음 식을 푸는 것이다.

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz} \quad (13)$$

본 문제에서는 x 축 좌표를 고정시키고 y 축 좌표, z 축 좌표의 증분치를 계산해 줌으로써 자유표면의 새 좌표를 얻을 수 있는데 사용하는 u, v, w 는 바로 직전 계산 때 구한 값을 사용한다. 이 과정을 반복 수행시키면서 증분치의 변화량이 주어진 오차범위 이내에 들게되면 수렴된 것으로 본다.

$$\Delta y = \int \frac{v}{u} dx, \quad \Delta z = \int \frac{w}{u} dx \quad (14)$$

이 때 자유표면이 시작되는 관 출구부분에서는 no slip 조건 때문에 증분치를 정의할 수 없게 되는데 이 문제는 quadrature를 사용하면 해결할 수 있다. 여기서는 open ended quadrature를 사용했는데, 이 방법은 요소의 중앙점을 기준으로 왼쪽 반과 오른쪽 반을 나누어서 적분하는 것으로 중앙점을 양끝점의 평균값이 아니라 독립적으로 움직여 위치를 구할 수 있게 되어 자유표면 모양을 훨씬 자연스럽게 할 수 있다.

위의 방법에 의하면 자유표면을 매 회 구할 때마다 자유표면 위의 좌표값만 변하게 되므로 압출되어 나온 부분의 내부 좌표값도 적절히 조절해 줄 필요가 있게 된다. 이렇게 해주기 위해서는 우선 압출된 제일 끝부분(Fig.1의 면 IJKL)을 이차원 좌표변환 방법을 써서 면좌표를 결정해 주고, 대칭면에서도 적절히 경계면값을 조절해 면좌표를 결정해 주어야 한다. 그렇게 해서 계의 모든 경계면의 좌표값이 결정되면 이제 내부좌표값을 삼차원 좌표 변환 방법을 사용하여 구할 수 있다. 실제 메쉬(real mesh)에서 표준메쉬(standard mesh)로의 사상을 F 라고 한다면 그 역사상은 F^{-1} 이며, 비교적 단순한 기하학적 모양을 갖는 계에서는 Laplace형 일대일 사상을 사용하여 변환시킬 수 있다[23].

$$\Delta F^{-1} = 0 \quad (15)$$

여기에 가중간류 방법을 적용하고 Galerkin 공식화하여 x 성분만 써 보면 다음과 같다.

$$\int \Delta F^{-1} \Psi_i dV^p = 0 \quad (16)$$

$$\int x_i \left[\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \zeta^2} \right] \Psi_j dV^p = 0 \quad (17)$$

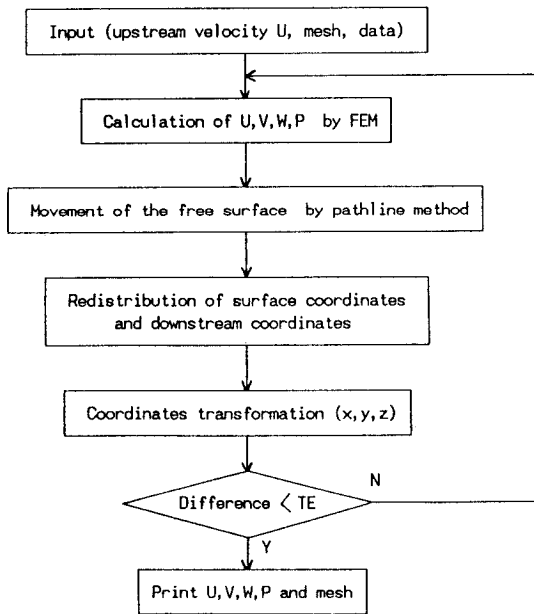


Fig. 4. Flowsheet of the numerical procedure for extrudate swell.

삼차원 압출팽창 문제를 풀기 위해, 유한요소 알고리즘의 해를 얻고 자유표면을 추적하여 좌표변환시키는 과정을 흐름도로 나타내면 Fig. 4와 같다.

5. 결과 및 검토

정사각관을 통하는 압출팽창 문제를 육면체 요소 160개를 사용하여 살펴보았는데, 그 기하학적 모양과 초기 메쉬는 Fig. 5와 같다. 정사각관을 단면으로 보았을 때 1/4에 해당하는 모양인데 폭과 높이는 각각 1 cm, 계 전체의 길이는 8 cm, 관의 길이는 3 cm이므로 주 유동방향인 x 방향으로 3 cm되는 부분이 관의 출구이다. 설정한 문제의 크기를 요소, 질점, 변수의 갯수 등에 대해 살펴보면 Table 1과 같다.

등온 비뉴턴 유체의 유동의 경우에 사용한 물성치는 다음과 같으며,

$$\eta_0 = 1.4 \times 10^5 \text{ p}, n = 0.7, a = 1.25, \lambda = 1.6 \text{ s},$$

$$U_{max} = 100 \text{ cm/s}, \bar{U} = 47.7 \text{ cm/s}$$

비등온 뉴턴 유체의 유동의 경우에 사용한 물성

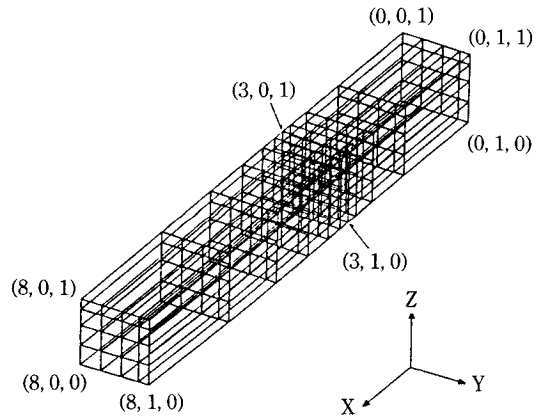


Fig. 5. Perspective view of a three-dimensional finite element mesh: initial mesh.

Table 1. Size of the problem

Case	Elements	Nodes	Unknowns	Frontal width
Isothermal	160	1,701	5,378	365
Nonisothermal	160	1,701	7,079	476

치는 다음과 같다.

$$\rho = 0.94 \text{ g/cm}^3, \eta_1 = 1.4 \times 10^5 \text{ p}, b = 0.021 \text{ K}^{-1},$$

$$C_p = 2.1 \times 10^7 \text{ erg/g} \cdot \text{K}, k = 1.5 \times 10^4 \text{ erg/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K},$$

$$T_1 = 190^\circ \text{C}, T_2 = 230^\circ \text{C}, U_{max} = 1.0 \text{ cm/s},$$

$$\bar{U} = 0.478 \text{ cm/s}$$

모든 계산은 IBM 3090으로 수행하였는데, 등온 뉴턴 유동의 경우 수행 매 회마다 대략 2500s 정도의 CPU 시간이 걸렸으며, 변한 좌표값과 직전 좌표값과의 차이의 제곱 평균의 제곱근(root mean square)을 0.001 이내의 오차 허용범위로 두었을 때는 4회, 0.0001 이내로 두었을 때는 8회 반복수행하여 수렴된 해를 얻었으며 비등온 뉴턴 유동의 경우에는 각각 11회, 15회 반복수행하여 수렴된 해를 얻었다. 등온 비뉴턴 유동의 경우는 power-law index n 값을 $n=1.0$ (뉴턴 유체)에서부터 점차로 낮추어가는 동시에 under relaxation 방법을 사용하여 최종적으로 수렴된 해를 얻었다. 삼차원 좌표값으로 그런 각 경우의 기하학적인 압출팽창 모양은 Fig. 6

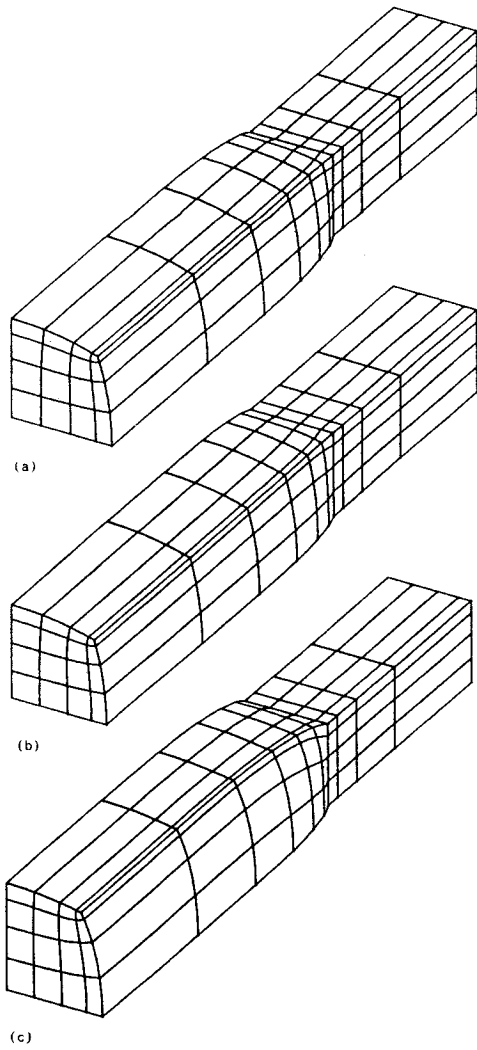
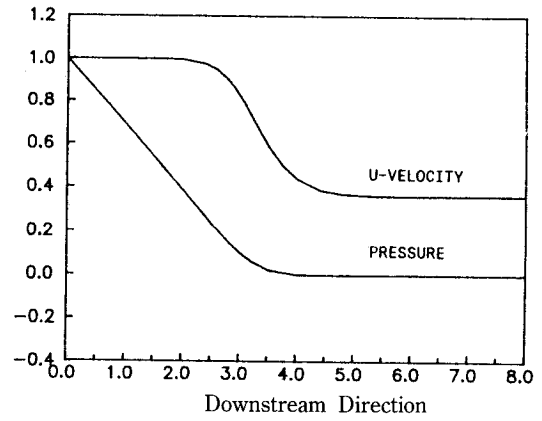
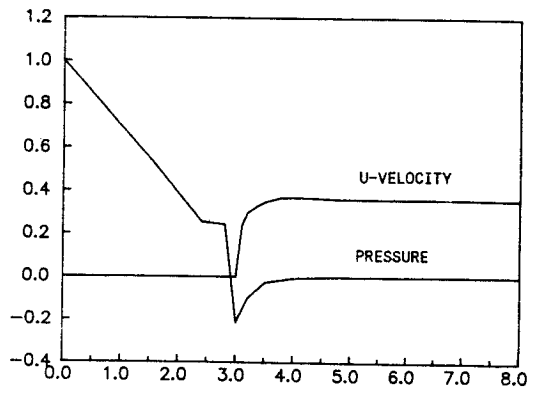


Fig. 6. Perspective view of three-dimensional finite element meshes: final meshes.
 (a) isothermal Newtonian case
 (b) isothermal non-Newtonian case
 (c) non-isothermal Newtonian case

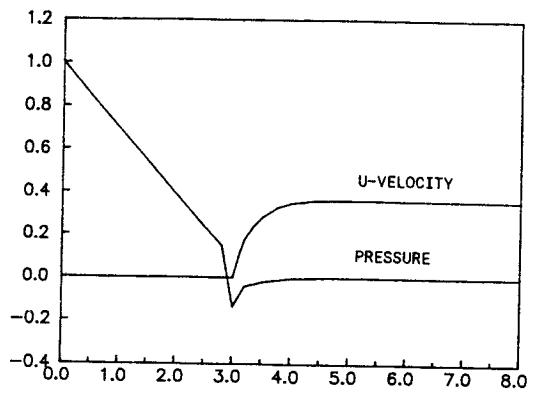
의 최종 메쉬에서 알 수 있는데, Fig. 6(a)는 등온 뉴턴 유동의 경우, Fig. 6(b)는 등온 비뉴턴 유동의 경우, Fig. 6(c)는 비등온 뉴턴 유동의 경우이다. Fig. 5와 비교해 보면 각 경우 얼마나 팽창이 일어났는지 확인할 수 있다. Fig. 7은 등온 뉴턴 유동의 압출팽창 결과를 주 유동방향의 속도성분과 압력분포를 중심선을 따라(Fig. 7(a)), 자유표면상의 대칭면의 중심을 따라(Fig. 7(b)), 모서리를 따라(Fig. 7(c)) 표준



(a)



(b)



(c)

Fig. 7. Normalized downstream velocity and pressure distribution for isothermal Newtonian extrudate swell from a square die.
 (a) along the centerline
 (b) along the center of the flat surface
 (c) along the corner points.

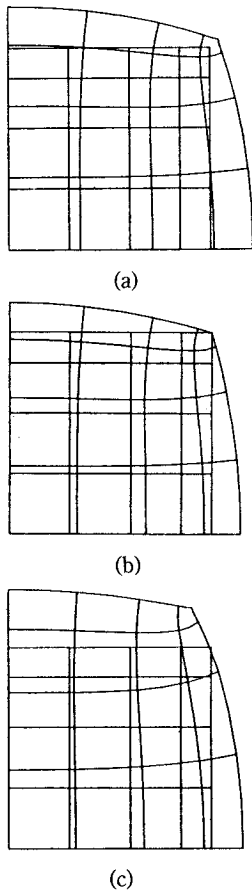


Fig. 8. Extrudate swell from a square die: superposed die shape and final shape of the extrudate.

- (a) isothermal Newtonian case
 (b) isothermal non-Newtonian case
 (c) non-isothermal Newtonian case

화시켜 그려 본 것이다. 이 때 압력분포에서 나타나는 불연속 현상은 관과 자유표면의 경계점인 관의 출구부분에서 발생하는 경계조건의 불연속성(singularity)에 원인이 있다 하겠다.

팽창 정도를 나타내는 축도인 팽창비(swell ratio)를 여기서는 다음과같이 정의하여 백분율로 표시하였다.

$$\text{팽창비} = (\text{자유표면의 너비} - \text{관의 너비}) / \text{관의 너비}$$

등온 유동의 경우 최대 팽창비는 대칭면을 따라서, 최소 팽창비는 모서리 부분을 따라서 일어났고, 비

Table 2. Swell ratio of the extrudate

Case	Swell ratio (max.)	Swell ratio (min.)
Isothermal Newtonian	21.0%	4.1%
Isothermal non-Newtonian	14.5%	0.0%
Non-isothermal Newtonian*	28.9%	16.2%

*In this case, 28.9% at the side of T_1 and 16.2% at the side of T_2 .

등온 유동의 경우는 $T_1(190^\circ\text{C})$ 을 부과한 관벽 쪽을 대칭면과 $T_2(230^\circ\text{C})$ 를 부과한 관벽 쪽을 따르는 따른 대칭면에서 팽창이 다르게 일어났는데, Fig. 8은 각 경우에 대하여 관의 출구모양과 최종적으로 압출팽창된 단면을 겹쳐 그린 것이고 각각의 최대, 최소 팽창비는 Table 2에 나타나 있다. 등온 비뉴턴 유체의 압출팽창된 단면(Fig. 8(b))은 등온 뉴턴 유체의 압출팽창된 단면(Fig. 8(a))에 비해 전체적으로 팽창 정도가 줄어든 모양인데 이것은 전단박화(shear thinning) 현상이 커질수록 팽창 정도가 줄어든다는 사실을 확인해주는 것이다. 비등온 뉴턴 유체의 압출팽창된 단면(Fig. 8(c))은 서로 다른 온도를 부과한 관벽조건 때문에 팽창 정도가 다르게 나타났는데, 관벽온도가 낮은 쪽으로 팽창이 크게, 관벽온도가 높은 쪽으로 팽창이 작게 일어나 등온 유동과는 달리 대각선 방향에 대하여 대칭이 아닌 모양을 지니 모서리 부분이 온도가 낮은 윗부분으로 치우쳐진 것이다.

본 연구에서는 pathline 방법과 사상방법을 적용시킨 유한요소법(FEM)을 사용하여 수치모사했는데, 등온 뉴턴유동의 압출팽창에 있어서 경계요소법(BEM)을 사용하여 수치모사한 Tran-Cong 등[16]과 pathline 방법과 spine 방법을 적용시킨 유한요소법(FEM)을 사용한 Karagiannis 등[19]이 얻은 값들과 거의 일치하였으며, 요소 수를 늘어줌에 따라 팽창비가 약간 줄어들음을 관찰할 수 있었다.

6. 결 론

삼차원 유한요소법 알고리즘을 구성하여 삼차원 유동문제를 풀 수 있는 코드를 개발하였다. 몇 개의 해석해가 존재하는 문제를 풀어 봄으로써 이를 검

증하였는데, 정확히 해석해와 일치하여 이차원 코드로는 해결할 수 없는 임의의 구조를 지니는 삼차원 유동문제를 풀 수 있게 되었다. 정사각관을 흘러나가는 삼차원 압출팽창 문제를 pathline approach 방법과 사상방법을 사용하여 자유표면과 내부좌표를 구하고 최종 압출팽창된 모양을 살펴보았는데 등온 뉴턴 유동의 경우 팽창비는 최대 21.0%, 최소 4.1%였다. 전단박화 현상이 있는 비뉴턴 유체는 뉴턴 유체에 비해 팽창이 작게 일어남을, 비등온 유동의 경우에는 온도가 낮은 쪽이 높은 쪽에 비해 팽창이 크게 일어남을 알았다. 이와 같은 삼차원 유한요소법 알고리즘은 앞으로 원하는 단면적을 지니는 제품을 생산하기 위한 다이설계에 응용할 수 있을 것으로 기대된다.

감 사

본 연구는 1988년도 문교부 첨단공학(신소재 분야) 학술연구조성비에 의하여 이루어졌음을 밝히고 이에 감사합니다.

Nomenclature

a	: dimensionless parameter that describes the transition region between the zero-shear region and the power-law region
b	: temperature coefficient
C_p	: heat capacity of the fluid
F^{-1}	: three-dimensional coordinate transformation mapping that the standard mesh is mapped into the real domain
f	: body force per unit volume
k	: thermal conductivity of the fluid
n	: power-law index
\underline{n}	: outward unit normal vector
p	: pressure
q	: heat flux
T	: temperature
TE	: error tolerance
\bar{U}	: average velocity
V	: three-dimensional standard domain
\underline{y}	: velocity vector

x, y, z : global coordinates

Greek Letters

$\dot{\gamma}$: shear rate
η	: viscosity of the fluid
η_0	: zero-shear viscosity
λ	: time constant
ρ	: density of the fluid
$\underline{\underline{\sigma}}$: total stress tensor
$\underline{\underline{\tau}}$: extra stress tensor
Φ_i	: linear or trilinear shape function
Ψ_i	: quadratic or triquadratic shape function
ξ, η, ζ	: local standard coordinates

References

1. R.E. Nickell, R.I. Tanner and B. Caswell, *J. Fluid Mech.*, **65**, 189(1974).
2. K.R. Reddy and R.I. Tanner, *Comp. Fluids*, **6**, 83 (1978).
3. R.I. Tanner, R.E. Nickell and R.W. Bilger, *Comp. Mech. in Appl. Mech. Eng.*, **6**, 155(1975).
4. M.J. Crochet and R. Keunings, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **7**, 199(1980).
5. M.J. Crochet and R. Keunings, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **10**, 85(1982).
6. B. Caswell and M. Viriyayuthakorn, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **12**, 13(1983).
7. M.B. Bush, J.F. Millthorpe and R.I. Tanner, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **16**, 37(1984).
8. M.B. Bush, R.I. Tanner and N. Phan-Thien, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **18**, 143(1985).
9. H.B. Phuoc and R.I. Tanner, *J. Fluid Mech.*, **98**, 253(1980).
10. R.I. Tanner, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **6**, 289 (1980).
11. E. Ben-Sabar and B. Caswell, *J. Rheol.*, **25**, 537 (1981).
12. B.P. Huynh, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **13**, 1(1983).
13. F. Sugeng, N. Phan-Thien and R.I. Tanner, *J. Rheol.*, **31**, 37(1987).
14. M.A. McClelland and B.A. Finlayson, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **27**, 363(1988).
15. M.B. Bush and N. Phan-Thien, *J. Non-Newt. Fluid*

- Mech.*, **18**, 211(1985).
16. T. Tran-Cong and N. Phan-Thien, *Rheol. Acta*, **27**, 21(1988).
 17. T. Tran-Cong and N. Phan-Thien, *Rheol. Acta*, **27**, 639(1988).
 18. T. Tran-Cong and N. Phan-Thien, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **30**, 37(1988).
 19. A. Karagiannis, A.N. Hrymak and J. Vlachopoulos, *AIChE J.*, **34**, 2088(1988).
 20. A. Karagiannis, A.N. Hrymak and J. Vlachopoulos, *Rheol. Acta*, **28**, 121(1989).
 21. T. Shiojima and Y. Shimazaki, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **34**, 269(1990).
 22. M.J. Crochet, A.R. Davies and K. Walters, "Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow," Elsevier(1984).
 23. S.J. Lee, D.G. Suh and S.J. Lee, *Hwahak Konghak*, **27**, 496(1989).