

## Oldroyd B 유체의 평면 수축 유동에 관한 수치 해석적 연구

유정열 · 나 양

서울대학교 기계공학과  
(1989년 10월 7일 접수)

### A Numerical Study on the Planar Contraction Flow of Oldroyd B Fluids

Jung Yul Yoo and Yang Na

Department of Mechanical Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea

(Received October 7, 1989)

**Abstract**—This study analyzes the planar 4:1 contraction flow of viscoelastic fluids with retardation time using finite volume method. To consider separately the elasticity effect of the viscoelastic fluid without shear thinning effect, Oldroyd B liquid model is adopted for the numerical simulation. Instead of the stream function-vorticity formulation, SIMPLER algorithm with staggered grid system which incorporates primitive variable has been introduced in discretizing the momentum equations. An upwind corrected scheme has been used in discretizing the constitutive equations for the non-Newtonian part of the stress. The size of the corner vortex is shown to be slightly influenced by the Weissenberg number. However, as the Weissenberg number is increased, the changing of the vortex shape agrees qualitatively well with some experimental studies.

#### 1. 서 론

플라스틱 제품의 압출 및 사출 성형 공정의 die entry의 형상을 단순화시킨, 4:1 수축을 지나는 점탄성 유체의 수치 시뮬레이션은 많은 관심의 대상이 되고 있다. 평면 4:1 수축을 지나는 유동에 대하여는, UCM 유체, Oldroyd 유체, Phan Thien-Tanner 유체, Giesekus 유체 등 여러 모형을 이용한 유한차분법 [1-3], 유한요소법 [1, 4, 5]의 해석이 이루어졌으며, 축대칭 4:1 수축을 지나는 유동 경우도, 유한차분법 [6] 과, 유한요소법 [1, 5]을 이용한 해석이 이루어졌다. 그러나, 이와 같은 모든 수치 계산에서는, 실험값에 비해 현저히 낮은 Weissenberg 수에서 수렴이 파괴되는데, 이의 원인으로는 비현실적인, 또는 지나치게 단순화된 구성방정식의 선택, 지배방정식의 형식(타원형, 쌍곡선형, 혼합형)에 부적합한 차분방법 및 경계조건 등을 들 수 있으며, 이를 극복하기 위한 많은 연구가 다각적으로 이루어지고 있다. 특히 지배방정식의 형식 변화에 대한 연구는, 대부분의 실험들이 동일유체의 유량 변화

에 따른 현상의 관찰 및 측정을 취급함으로써, 점탄성 뿐 아니라 관성의 효과도 중요할 수 있다는 관점에 근거를 둔 것이다. 최근에 Joseph 등 [7] 및 Yoo 등 [8]은 순간적인 탄성을 가지는, 즉 지연시간을 가지지 않는 점탄성 유체 유동의 지배방정식에 관성항을 포함시킬 때, 미분방정식의 형식이 변화하므로 수치 시뮬레이션에서도 이를 반영할 것을 제안하였다. 이에 따라 Song 과 Yoo [2] 및 Choi 등 [3]은 형식 종속차분법이 역시 이런 종류의 점탄성 유동을 비교적 잘 서술할 수 있음을 보였다. 본 연구의 목적은 지연시간을 가지는 점탄성 유체의 유동을 서술하기 위하여서도 지배방정식에 관성항을 포함할 것을 제안하고, 이에 수정된 SIMPLER 알고리즘이 훌륭히 활용될 수 있음을 보이며, 특히 평면 4:1 수축 유동의 수치 시뮬레이션에 관한 연구를 하기 위한 것이다. 점탄성 유체 모형으로서는 넓은 범위의 전단율에 대하여 일정한 점성계수를 가지며, 법선응력이 전단율의 제곱에 비례하는 Boger 유체 [9]에 대한 이론적인 유체로서 많은 연구의 대상이 되고 있는 Oldroyd B 유체를 택하고자 한다.

## 2. 문제의 서술

### 2.1. 지배방정식

비압축성 점탄성 유체의 연속방정식 및 운동량방정식은 다음과 같다 :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau}. \tag{2}$$

여기서,  $\rho$  는 밀도,  $t$  는 시간,  $\underline{u}$  는 속도 벡터,  $P$  는 Cauchy 응력텐서의 indeterminate part 이고  $\underline{\tau}$  는 determinate part 이다. 특히 Oldroyd B 유체의 응력텐서는 다음과 같이 나뉘어질 수 있는데,

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_2, \tag{3}$$

즉,  $\underline{\tau}_1$  은 비뉴우톤 효과를 나타내며,  $\underline{\tau}_2$  는 뉴우톤 효과를 나타낸다고 가정하여,

$$\underline{\tau}_1 + \lambda_1 \underline{\nabla} \underline{\tau}_1 = 2\eta_1 \underline{D}, \tag{4}$$

$$\underline{\tau}_2 = 2\eta_2 \underline{D}. \tag{5}$$

의 형태로 쓸 수 있다. 여기서,  $\underline{\nabla}$  는 upper convected derivative 를 나타내며,  $\lambda_1$  은 완화시간(relaxation time),  $\eta_1$  은 고분자 용액의 점성계수,  $\eta_2$  는 뉴우톤 유체인 용매의 점성계수이다. 이 유체의 영 전단점성계수는  $\eta = \eta_1 + \eta_2$  로 정의되고, 지연시간은  $\lambda_2 = \eta_2 \lambda_1 / (\eta_1 + \eta_2)$  로 정의된다. 이와 같은 분해는, Crochet 와 Keunings[10] 등에 의하여 수치해석시 수렴을 향상시키는 것으로 보고되고 있다. 식 (3)을 식 (2)에 대입하여 다음과 같은 새로운 형태의 운동량방정식을 얻는다 :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau}_1 + \eta_2 \nabla^2 \underline{u}. \tag{6}$$

이제 식 (1), (4), (6)을 2차원 정상상태 평면 유동에 적용하고,  $u, v$  는 각각  $x, y$  방향의 속도를 나타내며  $\sigma, \tau, \gamma$  는  $\underline{\tau}_1$  의  $xx, xy, yy$  성분을 나타낸다고 하자. 다음과 같이 정의되는 무차원 파라미터를 도입함으로써 이 식들을 무차원화시킬 수 있다 :

$$(x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{L},$$

$$(u^*, v^*) = \frac{(u, v)}{U},$$

$$(\sigma^*, \tau^*, \gamma^*, P^*) = \frac{(\sigma, \tau, \gamma, P)}{\frac{\eta U}{L}},$$

$$R = \frac{\rho UL}{\eta},$$

$$W_1 = \frac{\lambda_1 U}{L},$$

$$\epsilon = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$W = W_1 (1 - \epsilon),$$

$$M = (RW)^{1/2} = \frac{U}{\sqrt{\eta / (\lambda_1 \rho (1 - \epsilon))}}.$$

$$E = \frac{W}{R} = \frac{\eta \lambda_1}{\rho L^2} (1 - \epsilon).$$

여기서,  $L$  과  $U$  는 각각 특성길이와 특성속도를 나타내며, 본 연구에서는 수축 하류의 좁은 채널의 깊이 및 평균속도로 정의한다. 편의상 무차원 변수의 상첨자\*를 생략하고, 각 성분별로 표시하면 다음과 같은 무차원 지배방정식을 얻는다 :

$$u_x + v_y = 0, \tag{7}$$

$$(Ruu - \epsilon u_x)_x + (Rvu - \epsilon u_y)_y = -P_x + \sigma_x + \tau_y, \tag{8}$$

$$(Ruv - \epsilon v_x)_x + (Rvv - \epsilon v_y)_y = -P_y + \tau_x + \gamma_y, \tag{9}$$

$$(1 - 2W_1 u_x) \sigma + W_1 (u \sigma_x + v \sigma_y) = 2(1 - \epsilon) u_x + 2W_1 u_y \tau, \tag{10}$$

$$\tau + W_1 (u \tau_x + v \tau_y) = W_1 v_x \sigma + W_1 u_y \gamma + (1 - \epsilon) v_x + (1 - \epsilon) u_y, \tag{11}$$

$$(1 - 2W_1 v_y) \gamma + W_1 (u \gamma_x + v \gamma_y) = 2(1 - \epsilon) v_y + 2W_1 v_x \tau. \tag{12}$$

### 2.2. 경계조건

통상적인 방법을 따라서 Fig.1 과 같은 계산 영역을 사용한다.

#### 2.2.1. 입구 및 출구에서의 경계조건

4:1 수축을 지나는 유동에 있어서 수축으로부터 충분히 먼 입구, 출구의 유동을 각각 Poiseuille 유동으로 근사할 수 있다. 따라서 다음과 같은 조건을 부여할 수 있다.

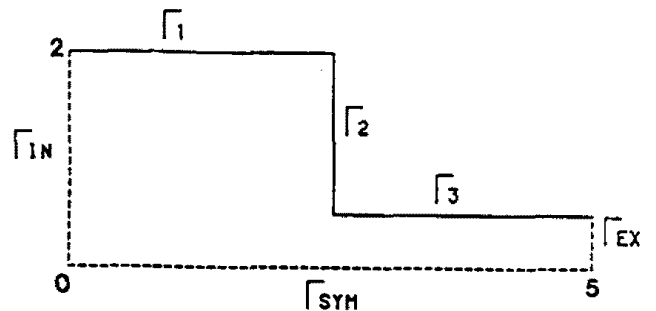


Fig. 1. Computational domain and boundaries.

(1) 입구의 경우

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{8} \left(1 - \frac{y^2}{4}\right), \\ v &= 0, \\ \sigma &= \frac{9}{128} W_1 (1 - \epsilon) y^2, \\ \tau &= -\frac{3}{16} (1 - \epsilon) y, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

(2) 출구의 경우

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} (1 - 4y^2), \\ v &= 0, \\ \sigma &= 288 W_1 (1 - \epsilon) y^2, \\ \tau &= -12 (1 - \epsilon) y, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

출구에서는 식 (14)로 주어지는 조건을 줄 수도 있으나, 대신에 모든 변수에 대해 Neumann 조건을 주었다.

### 2.2.2. 고체 벽에서의 조건

(1) x 방향에 평행한 고체벽 ( $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_3$ )

벽면에서는 점착(no-slip)조건에 의하여  $u=v=0$ 이며,  $u_x=0, v_x=0$ 이므로 식 (10)-(12)의 구성방정식들로부터

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \\ \tau &= (1 - \epsilon) u_y, \\ \sigma &= 2W_1 (1 - \epsilon) u_y^2. \end{aligned} \quad (15)$$

(2) y 방향에 평행한 고체벽 ( $\Gamma_2$ )

점착(no-slip)조건에 의하여  $u=v=0$ 이며,  $u_y=0, v_y=0$ 이므로, 위에서와 마찬가지로 하여

$$\begin{aligned} \sigma &= 0, \\ \tau &= (1 - \epsilon) v_x, \\ \gamma &= 2W_1 (1 - \epsilon) v_x^2. \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.2.3. 대칭면에서의 경계조건

대칭면에서는  $\tau=u_y=v=0$ 이므로, 식 (10)과 (12)의 구성방정식은 다음과 같은 비선형 상미분방정식으로 된다:

$$(1 - 2W_1 u_x) \sigma + W_1 u \sigma_x = 2(1 - \epsilon) u_x. \quad (17)$$

$$(1 - 2W_1 v_y) \gamma + W_1 v \gamma_y = 2(1 - \epsilon) v_y. \quad (18)$$

## 3. 수치해석

식 (8)과 (9)에서 Newton 응력부분은 확산항으로 취급되어 대류항과 함께 보존형으로 나타나는 것을 알 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 비균일 격자계상에서 SIMPLER algorithm[11]을 포함하는 유한체적법을 적용할 수 있다.

### 3.1. 운동량방정식

2장에서 언급한 바와 같이, 본 논문에서는 식 (6)과 같은 형태의 운동량방정식을 사용하며, 이에 대한 유한 차분은 뉴우튼 유체에 대하여 사용되던 방법[12]을 사용하기로 한다. 단지, 본 연구에서는 운동량 방정식의 대류-확산항을 이산화(discretizing)시키는데, 약간 수정된 hybrid scheme을 사용하였다. 원래의 hybrid scheme은 cell Peclet 수를 고려하여, 차분식의 계수가 항상 양수가 되도록 하는 방법인데, Peclet 수가 기준값보다 큰 경우 확산항을 무시한다. 그러나, 그와 같이 하면 지연시간을 가지는 점탄성 유체의 경우에는 확산항에 포함된 지연시간의 효과가 완전히 무시될 수도 있다. 그러므로, 이 수정된 hybrid scheme에서는, 확산항은 통상적인 방법대로 중심 차분하고, 관성항에 대해서는 중심 차분 및 상류 차분한 후, cell Peclet 수가 기준값보다 크면 상류 차분식을 택하고, 작으면 중심 차분식을 택하도록 함으로써 차분식의 계수에 지연시간의 효과가 항상 포함되면서도 그 값이 항상 양수가 되도록 한다.

### 3.2. 압력방정식 및 압력보정방정식

압력방정식 및 압력 보정방정식은 참고문헌[11]과 같은 방법으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 두 방정식이 source 항에 점탄성 응력 성분을 포함하게 되어, 결국 입력장이 속도와 응력 성분으로 표시된다.

### 3.3. 구성방정식

식 (4)의 구성방정식은 쌍곡선형인데, 타원형, 포물선형방정식에 비해 유한 차분근사해법은 잘 정립되어 있지 않다. Davies 등[1]과 Song과 Yoo[2]는 1차 정확도를 가지는 상류차분으로 구성방정식을 차분하여 해의 안정성을 기하였다.

한편 Choi 등[3]은, 2차 정확도를 가지는 DCM (Deferred Correction Method)을 적용하여, 상류차분에 의한 결과[2]보다 더 넓은 범위의 Weissenberg 수에서 안정된 해를 얻었다. 본 논문에서도, 유동장 내부

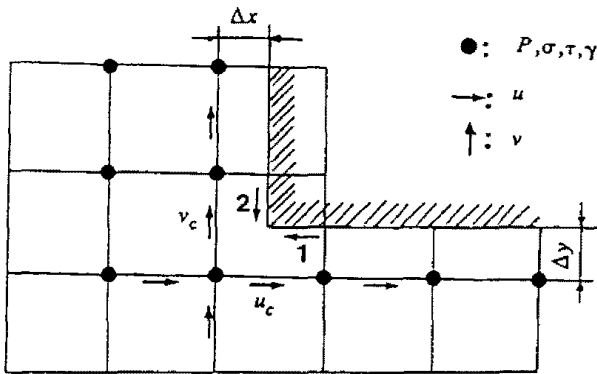


Fig. 2. Staggered grid near the re-entrant corner.

에 DCM을 적용하여 그 영향을 고찰하였으며, 여기서 필요한 인공 점성 (artificial viscosity)의 크기는 각 경우마다 적절한 값을 사용하였다.

3.4. 재돌입 모서리 (re-entrant corner)에서의 경계 조건

2차원 정상 유동에서 재돌입 모서리는, 유동 변수의 특이점 (singular point)이 된다. 따라서 모서리 부근에서는 차분식의 적용이 항상 문제된다. 본 논문에서는 staggered grid를 사용하였으므로, Song과 Yoo[2], Choi 등[3]의 대부분의 기존 연구에서 모서리에 부여하던 가상 응력을 생각할 필요가 없다. 즉, Fig. 2에서 보면 구성방정식을 푸는 경우, 모서리에서의 응력값이 필요없음을 알 수 있다. 반면 x방향 운동량방정식과 y방향 운동량방정식에서는, 모서리에서의 응력값이 경계 조건으로 필요하다. 모서리에서  $\tau$  값은, 그림에서 수평 화살표의 방향으로 가면서 구할 수도 있고, 또한 수직 화살표의 방향으로 가면서 구할 수도 있는데,  $\tau$  값의 결정에는 식 (11)에서 알 수 있듯이 속도구배  $u_y$ 와  $v_x$ 만이 필요하다. 그러나, 이들 값이 모서리에서 정확히 정의되지 않으므로, 이들을 구하는데 있어 가정이 필요하게 된다. Roache[13]는 모서리 부근에서 적용할 수 있는 속도구배에 관한 몇 가지 식을 제안하였는데, 본 연구에서는 그 중 한 가지를 이용하였다. 즉 모서리에서의 속도구배가, 화살표 1, 2방향에서 접근하여 올 때 반드시 연속적일 필요는 없으므로, x방향 운동량방정식에서 필요한  $\tau$  값은, 모서리에서  $u_y = (0 - u_c) / \Delta y$ 로 정의하여 구하였으며, y방향 운동량방정식에서 필요한  $\tau$  값은 모서리에서  $v_x = (0 - v_c) / \Delta x$ 로 하여 구하였다.

3.5. 대칭면에서의 응력 계산

대칭면에서는 앞서 언급한 바와 같이 두 개의 연결

비선형 상미분 방정식 (17)-(18)을 얻는다. 이 방정식은 해의 안정성을 위해 backward Euler 방법으로 차분하였다.

3.6. 격자계의 구성

평면 4:1 수축 유동을 해석함에 있어 die의 모서리 부분과 벽 근처에서 유동 변수의 변화가 크므로, 이 부분들을 조밀하게 분할한 비균일 격자계를 구성하였다. 계산에 사용된 엇갈린 격자계 (staggered grid)는 Fig. 3과 같다. 이 그림에서 까만 원으로 표시한 위치는 P,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ 를 계산하는 격자점으로서, 편의상 scalar 격자점이라고 부르기로 한다. 수평 화살표로 표시한 위치는 속도 u, 수직 화살표로 표시한 위치는 속도 v를 계산하는 격자점이다. 본 연구에서는 Fig. 4의 4가지 scalar 격자계를 사용하였다. 격자계 GRID0는 Davies 등[1] 및 Song과 Yoo[2]에서 사용된 균일 격자계와 동일하며 격자 간격은 0.125이고 격자선의 수는 42×18이다. 점탄성 유체 유동에서는 W수가 커짐에 따라 벽에서의 속도구배와 응력구배가 급격히 커지므로, GRID0는 벽에서의 속도 및 응력구배를 충분히 나타내기에 부족하다. 이런 이유로 비균일 격자계 GRID1 (52×26) 및 크기가 0.0625인 균일 격자계 GRID2 (82×34)를 구성하였다. 또한 입구조건과 출구조건을 고려하기 위해, 입구 및 출구를 2배로 늘린 GRID3 (74×26)을 구성하였다.

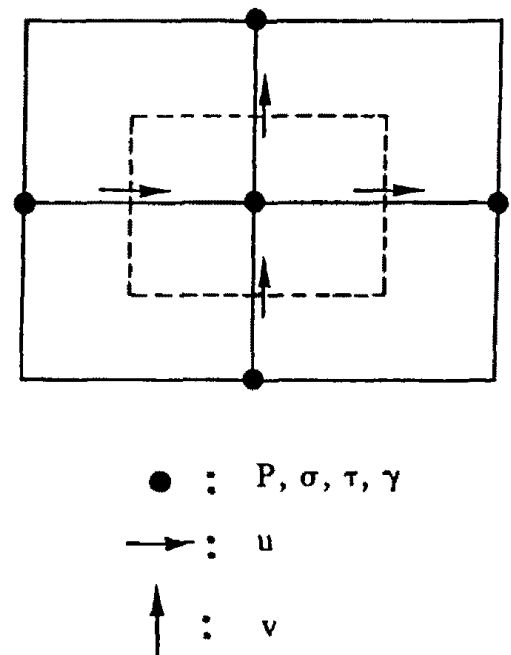
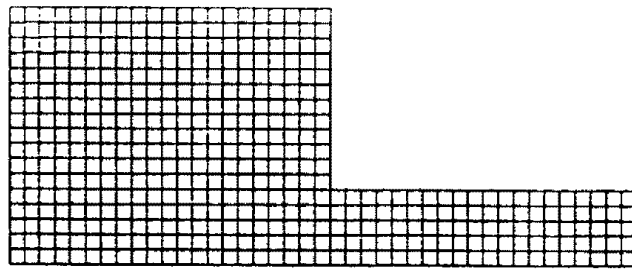
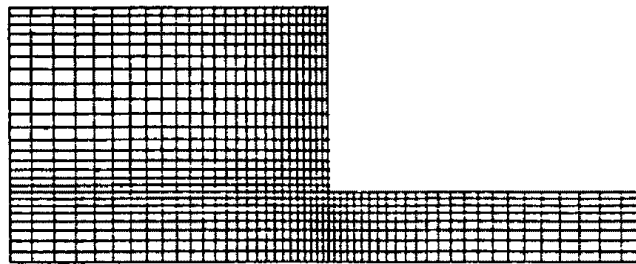


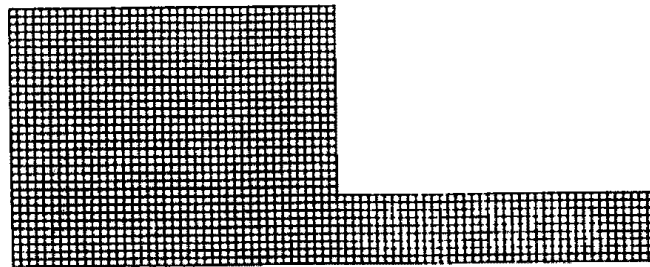
Fig. 3. Staggered grid in the flow domain.



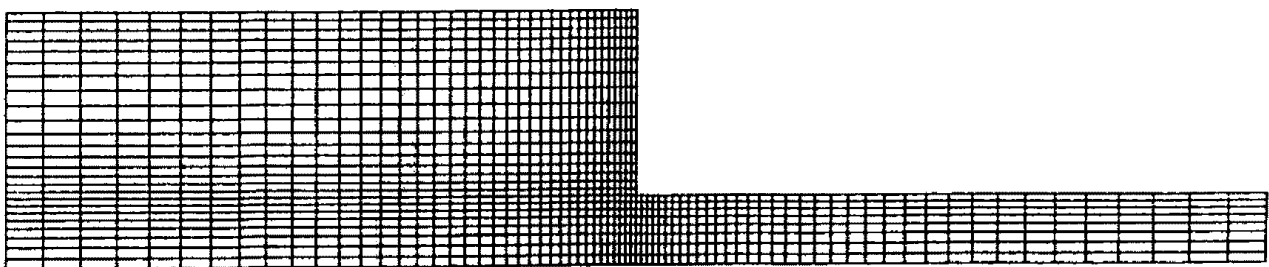
(a) GRID 0



(b) GRID 1



(c) GRID 2



(d) GRID 3

**Fig. 4.** Grid systems: (a) square grids of spacing  $h = 1/8$ ; (b) non-uniform grids; (c) square grids of spacing  $h = 1/16$ ; (d) non-uniform grids with extended inlet and outlet regions.

3.7. 비선형 연성 시스템의 수치해

이상의 지배방정식과 경계조건으로부터 얻어진 비선형 연립방정식들의 해는, 적절한 완화계수 (0.9-0.2)를 준 선순법 (line by line method)을 사용한 반복 계산을 통하여 구하여졌다. 해의 수렴 오차는 참고문헌[12]와 마찬가지로 방법으로 결정하였으며, 모든 변수에 대해  $10^{-6}$ 의 수렴오차를 택하였다.  $W=0$ 에서부터 계산을 수행하여,  $W$  수를 점차로 높여 가면서 작은  $W$  수에서의 계산 결과를 큰  $W$  수에 대한 계산의 초기치로 사용하였다. 계산에 사용한 컴퓨터 기종은 Cray Research Inc.의 Cray-2S이며, 계산 수행시간(CPU time)은 다음과 같다.

- (1) 격자계 GRID 0의 계산  
DCM 사용 안할 경우 : 11-26 초  
DCM 사용할 경우 : 15-60 초
- (2) 격자계 GRID 1의 계산  
DCM 사용 안할 경우 : 70-145 초  
DCM 사용할 경우 : 80-185 초
- (3) 격자계 GRID 3의 계산  
DCM 사용 안할 경우 : 160-240 초  
DCM 사용할 경우 : 200-370 초

4. 결과 및 검토

Oldroyd B 모델은 뉴우톤 유체의 점성계수 영향을 나타내는 지연시간을 가지는데, 이에 대한 제한조건 [14]은  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  뿐이므로  $\lambda_2$ 에 대한 선택은 위 조건 내에서 임의가 된다. 그러나, Oldroyd 8-constant 모델의 경우 [14]는  $1/9 \leq \lambda_2/\lambda_1 \leq 1$  이므로, 보통  $\epsilon = \lambda_2/\lambda_1$ 을 0.1-0.3의 범위에서 사용한다. 여기서  $\epsilon$ 은 무한 전단율에서의 점성계수와 영 전단율에서의 점성계수의 비를 나타내며, 실제 유체들은 대개 위 범위 안에 있다. 따라서 본 논문에서는  $\epsilon=0.2$ 를 택하여 계산하였으며,  $\epsilon=0.1$  또는  $\epsilon=0.3$ 인 경우에 대하여는 추후의 연구에서 취급하기로 한다.

Choi 등[3]은 구성방정식에 DCM을 적용함으로써

보다 개선된 결과를 얻었다. 본 논문에서도 이 방법에 의한 계산을 수행하였으며, Table 1에는  $R=0, W=0.16$ 일 때, 격자 크기와 구성방정식의 이산화 방법에 따라 유동변수들이 어떤 영향을 받는지를 표시하였다.

여기서 UPM은 유동장 전체에 걸쳐서 구성방정식을 상류 차분한 것이고, DCM은 유동장 내부에서는 DCM을 사용하고, 경계조건은 1차 정확도를 유지한 것이다. 가장 관심이 있는 모서리 와류의 크기를 살펴 보면, 세밀한 격자제를 사용하였을 때  $\psi_{max}$  값이 작아 지는데, 이는 Davies 등[1]과 Choi 등[3]의 분석과도 일치한다. 격자계 GRID0에서 차분방법을 달리하면  $\psi_{max}$  값이 변하고 있는 반면, GRID1과 GRID2에서는  $\psi_{max}$  값이 거의 달라지지 않는다. 또,  $\sigma_{exit}$  값 및  $\tau_{exit}$  값도 거의 변하지 않는다. 이는 격자계 GRID1에서 해가 거의 수렴된 것을 의미한다.  $W=0.16$ 일 때, 완전 확립된 출구 유동에 대한 엄밀한  $\sigma$  값은 벽에서 11.52이고, 중심면에서는 0이다. 그러나 출구에서의 값이 완전 확립된 유동의 조건을 정확하게는 만족하지 않음을 알 수 있다. 따라서, 입구 및 출구의 길이를 2배로 늘인 격자계 GRID3을 사용하여, 유동장내의 변화를 비교하였다. Fig. 5는 GRID1과 GRID3에서  $R=2.28, W=0.16$ 일 때의 계산 결과 중  $xx$ -성분의 법선 응력을 나타낸 것으로서, 유동장 내부의 변화가 거의 없음을 알 수 있으며, 다른 모든 유동변수의 경우에도 같은 결과를 얻었다. 이는 격자계 GRID1으로 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있음을 의미한다. 한편,  $R=0$ 에 대하여 격자 크기와 이산화 방법에 따른 계산의 수렴이 과 괴되는 한계 Weissenberg 수를 Table 2에 기술하였다. 계산 결과,  $W$  수가 증가할수록 진동이 발생하여 한계  $W$  수에 이르면 그 정도가 커지게 된다.

평면 4:1 수축을 지나는 유동의 실험을 수행한 Walters와 Webster[15]는 Boger 유체의 경우, 모서리 와류가 뉴우톤 유체에 비해 크게 발생되지 않는 것을 보고하였다. 그러나, 최근의 실험[16, 17]에 의하면 Boger 유체의 경우에도, 실험 유체에 따라 수축비에 따라 그리고 전단율에 따라 모두 다른 양상을 보이며,

Table 1. Effect of mesh sizes and discretization methods on constitutive equations.

	GRID 0		GRID 1		GRID 2	
	UPM	DCM	UPM	DCM	UPM	DCM
max	0.50199	0.50169	0.50077	0.50077	0.50077	0.50079
exit wall	10.80010	10.83180	11.39180	11.39110	11.34080	11.34060
exit sym.	0.00155	0.00189	-0.00091	0.00073	0.00097	0.00097
exit wall	-5.81600	-5.81830	-5.96651	-5.96636	-5.953166	-5.95310

**Table 2.** Limits of Weissenberg number depending on mesh sizes and discretization method.

	GRID 0		GRID 1		GRID 2D	
	UPM	DCM	UPM	DCM	UPM	DCM
$W_{lim.}$	0.4	0.48	0.456	0.408	0.22	0.40

White 등[18]은 이를 extensional behavior로 설명하고 있어, 일반적인 결론을 내리기는 어려운 실정이다. Fig. 6는  $R=0$ 에서  $W$  수가 증가됨에 따라 발생하는 유동장의 변화 중 유선(stream line)을 나타낸 것으로,  $W$  수의 증가에 따라 모서리 와류의 크기에 큰 변화가 없는 것이 보이며, 이는 Boger 유체의 일반적인 경향이다. Boger 등[17]의 관 입구 유동에 대한 실험결과와 비교하기 위하여, 각각 polyacrylamide-corn syrup 용액과 polyisobutylene-polybutene 유체를 사용한 실험결과를 나타낸 그의 Fig. 9와 10을 참조한다. 우선 polyacrylamide-corn syrup 용액을 이용한 실험에서는,  $W$  수가 낮을 때는 vortex cell의 경계가 오목하며,  $W$  수가 증가함에 따라 cell boundary가 평평해지고, 더욱 증가시키면 cell boundary가 볼록해지는 것과 입구 모서리에서 lip vortex가 생기는 것을 볼 수 있다. 한편 polyisobutylene-polybutene 유체를 이용한 실험은 탄성수가 비교적 큰 경우로서,  $W$  수가 증가함에 따라 입구 모서리로부터 독립적인 vortex가 형성되어 나오는 것이 보인다. 다시 Fig. 6에서 보면 cell boundary의 모양이 실험에서 나타난 바와 흡사하며,  $W=0.4$ 인 경우 lip vortex가 보이는데, Oldroyd B 유체를 사용한 Marchal과 Crochet[4]의 계산에서도 이런 경향이 보인다. 본 연구의 결과로  $W=0.4$ 인 경우, 해에 심한 진동이 있으므로 단정적으로 말할 수 없으나, 대체로 Boger 유체의 거동을 기술하고 있다고 말할 수 있다.

다음에는 Boger 유체를 사용한 Walters와 Rawlinson[19]의 조건과 같은  $R=2.28, 4.2$ 의 경우를 고찰하였다. 이 실험에서는  $W$  수가 충분히 큰 경우에도 모서리 와류의 크기가 증가하지 않았다. Fig. 7은  $R=2.28$ 일 때  $W$  수 변화에 따른 유동함수를 도시한 것인데,  $\psi_{max}$ 의 위치가 재돌입 모서리 방향으로 이동하고 있는 것을 알 수 있으며, lip vortex가 입구 모서리 근처에 생기는 것이 보인다. UCM 유체를 사용한 Davies 등[1]의 계산결과에서도  $W=0.2$ 일 때 lip vortex의 존재가 보인다. Fig. 8은  $R=4.2$ 의 결과로, lip vortex의 존재는 보이지 않는데, 이는 관성력의 영향이 커짐

에 따른 것으로 생각된다. 실험에 의한 모서리 와류의 크기를 수치해석적으로 설명하기 위해서는 물질 파라미터인 탄성수  $E$ 를 고정시키고, 무차원 속도  $M$ 을 증가시켜야 한다. 이와 같은 접근의 의미는 동일한 실험 유체에 대해 유량을 증가시켜 나가는데에 있다. 진단박화 유체 모델인 Giesekus 유체를 사용한 Choi 등[3]의 결과에서는, 탄성수  $E$ 를 고정시키고 무차원 속도  $M$ 을 변화시켰을 때, 모서리의 와류의 크기가 변하였으나, Boger 유체의 거동을 나타내는 Oldroyd B 유체는 별다른 변화를 보이지 않았다. Table 3은 계산결과를 도표로 나타낸 것인데,  $E$ 가 1보다 작은 경우  $M$ 의 증가에 따라  $\psi_{max}$ 가 감소하나,  $E$ 가 1보다 큰 경우는  $\psi_{max}$ 가 증가해 감을 알 수 있으며, 이와 같은 경향은 Choi 등[3]의 결과에서도 볼 수 있다.

앞서 언급한 바와 같이 점탄성 유체 유동에 관한 모든 종류의 수치해석에서는 한계 Weissenberg 수가 존재한다. Kravnik과 Schowalter[20]는 그들의 실험에서, 벽에서의 조도에 따라 no-slip 조건이 파괴되는 것을 보였으며, 이를 고려한 Yeh 등[21]의 계산에서는 slip 조건을 허용하였으나, 역시 한계 Weissenberg 수에서 수렴이 파괴되었다. Lawler 등[22]은 LDV로 측정 대칭 4:1 수축을 지나는 유동을 측정할 결과, 비교적 낮은 Weissenberg 수에서 3차원 비정상상태 유동이 발생됨을 관찰하고, 이것이 분지해의 존재로 인한 수치 계산의 수렴 파괴와 관련이 있는 것으로 지적하였다. 이와 같은, 다양한 기하형상과 유체 모형 및 수치 계산의 방법에도 불구하고, 점탄성 유체 유동의 수치 계산에는 한계값이 항상 존재하며, 이를 극복하기 위한 많은 노력이 기울여지고 있다. 본 연구는 이러한 노력의 일

**Table 3.** Effect of elasticity number on the size and strength of the corner vortex.

E	M	R	W	$\psi_{max}$
0.1	0.1	0.31623	0.031623	0.50056
	0.5	1.5811	0.15811	0.50029
0.25	0.1	0.2	0.05	0.50061
	0.5	1.0	0.25	0.50061
1.0	0.1	0.1	0.1	0.50068
	0.3	0.3	0.3	0.50051
3.0	0.05	0.02887	0.08660	0.50070
	0.1	0.05774	0.17321	0.50073
10.0	0.01	0.003162	0.03162	0.50068
	0.1	0.03162	0.3162	0.50120
	0.125	0.03953	0.3953	0.50219

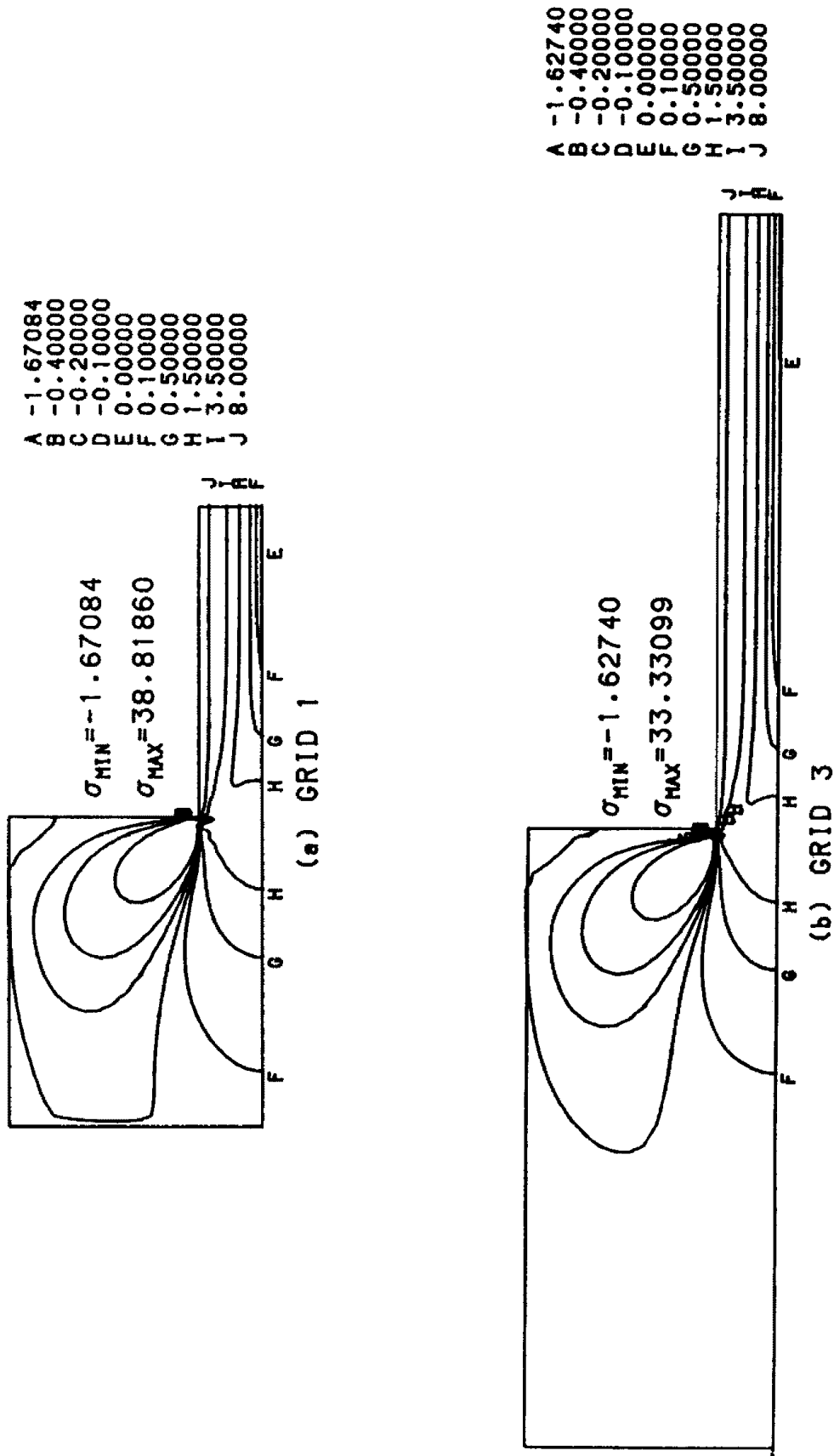


Fig. 5. Effect of inlet/outlet lengths on the flow variables, especially on the normal stress component  $\sigma$  for  $R = 2.28$  and  $W = 0.16$ .



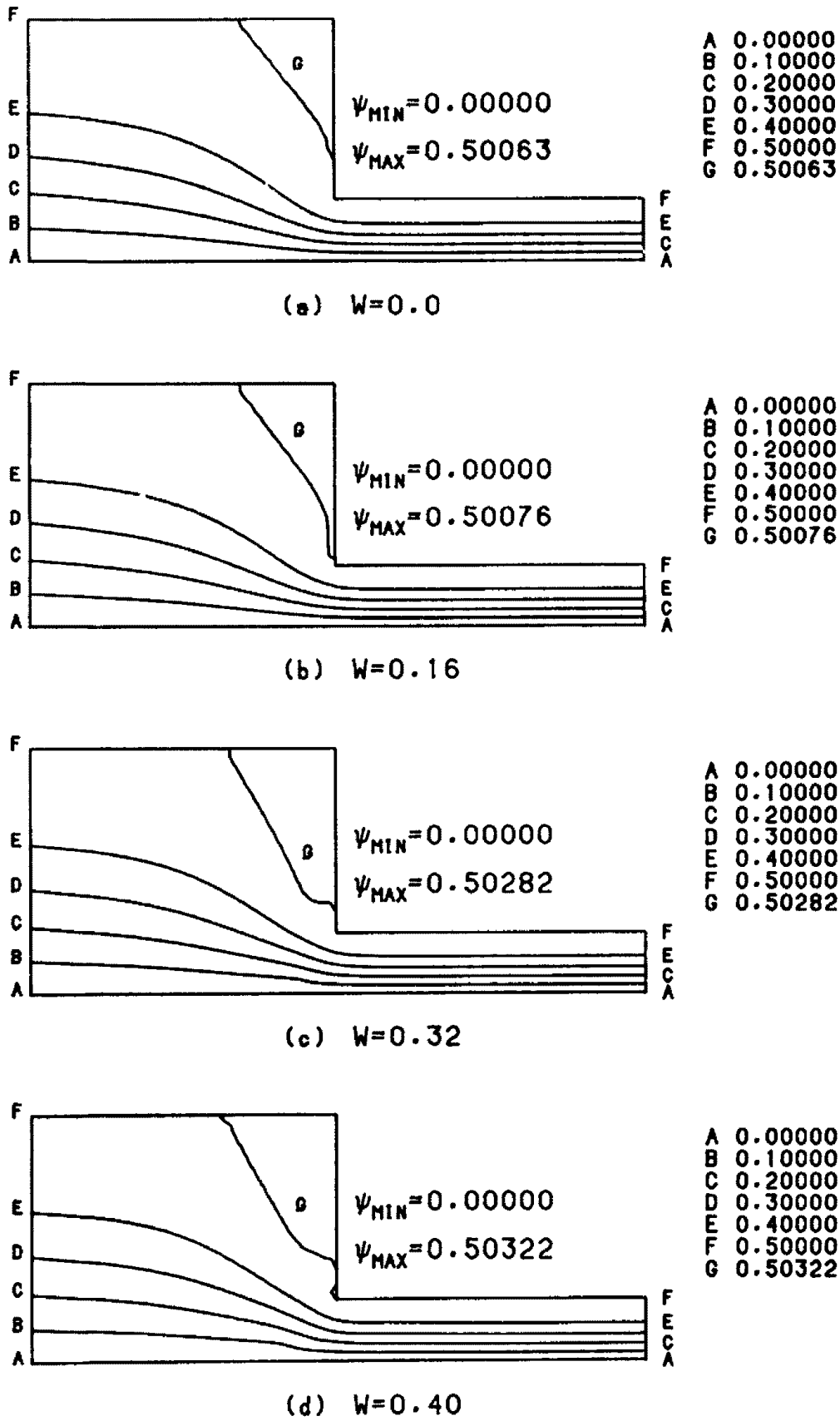


Fig. 6. Streamlines obtained for the creeping flow of Oldroyd B fluid for  $\lambda_2/\lambda_1=0.2$ : (a)  $W=0.0$ ; (b)  $W=0.16$ ; (c)  $W=0.32$ ; (d)  $W=0.40$ .

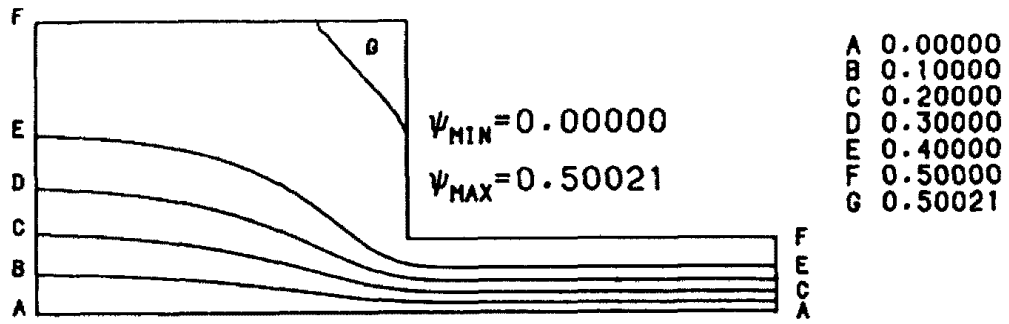
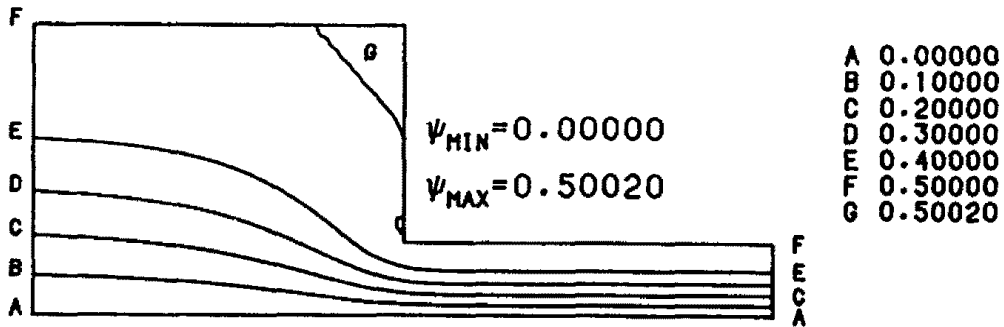
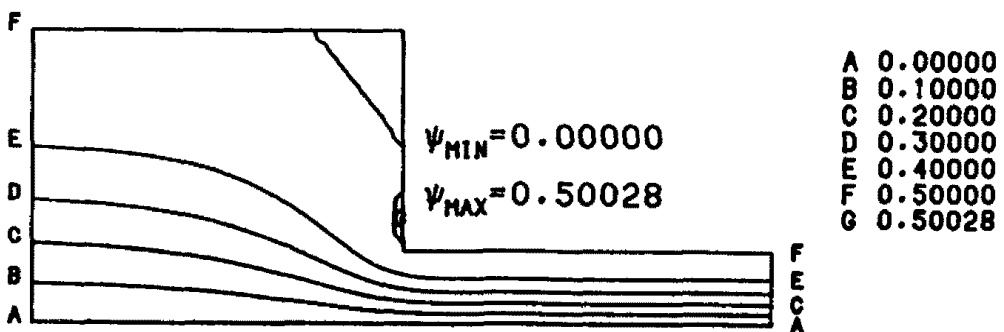
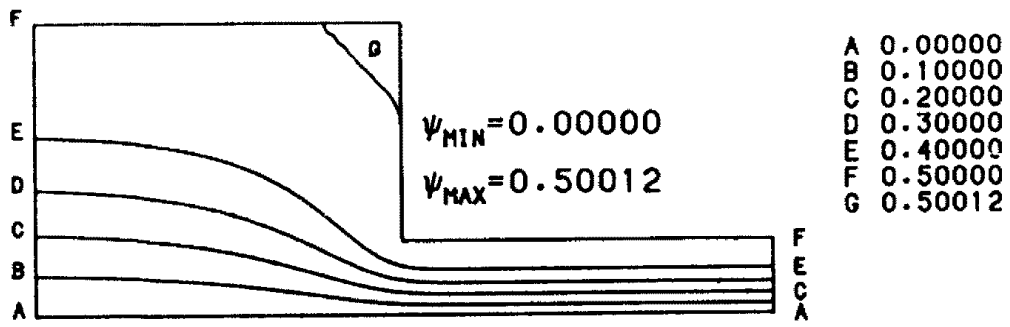
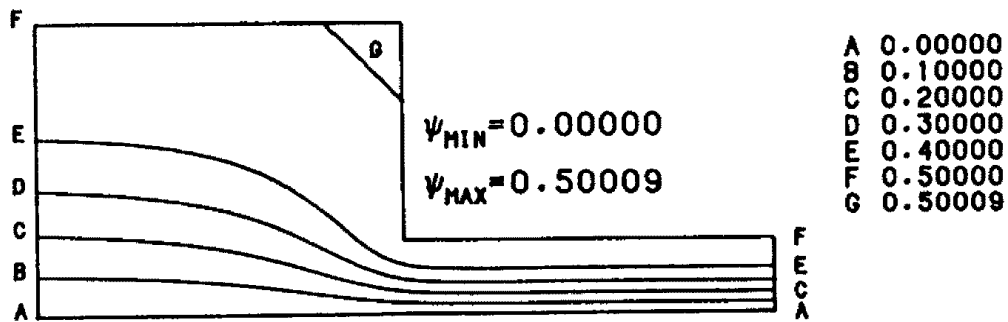
(a)  $W=0.0$ (b)  $W=0.16$ (c)  $W=0.28$ 

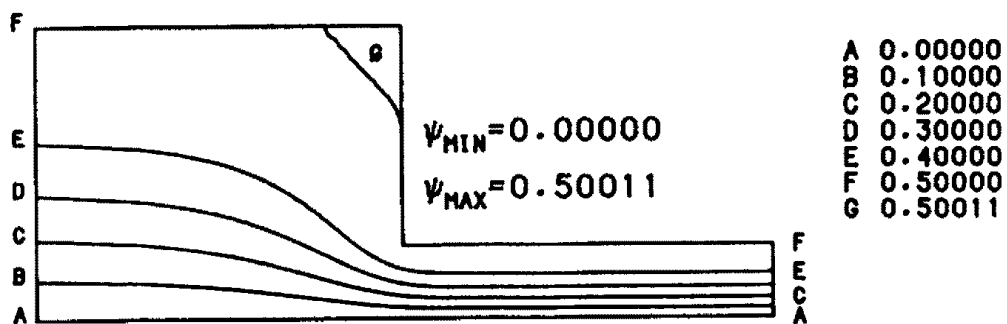
Fig. 7. Streamlines obtained for non-creeping flow of Oldroyd B fluid for  $\lambda_2/\lambda_1=0.2$  and  $R=2.28$ : (a)  $W=0.0$ ; (b)  $W=0.16$ ; (c)  $W=0.28$ .



(a)  $W=0.0$



(b)  $W=0.16$



(c)  $W=0.24$

Fig. 8. Streamlines obtained for non-creeping flow of Oldroyd B fluid for  $\lambda_2/\lambda_1=0.2$  and  $R=4.2$ : (a)  $W=0.$ ; (b)  $W=0.16$ ; (c)  $W=0.24$ .

환으로 이루어졌으며, 이와 같은 수치계산의 파괴원인을 정확히 규명하기 위해서는, 점탄성 유체 모형에 대한 분석과 수치계산 방법에 대한 지속적인 연구가 있어야 할 것이다.

### 5. 결 론

본 연구는, 넓은 범위의 전단율에서 일정한 점성계수를 가지는 Boger 유체를 대체로 서술할 수 있는, Oldroyd B 유체 모형의 4:1 수축 유동을 서술하기 위한 수치 시뮬레이션을 수행하였다. 속도 성분들에 대한 운동량방정식은 SIMPLER 알고리즘을 채택함으로써 이산화되었으며, 비뉴우톤 응력 성분들에 대한 구성방정식은 upwind corrected scheme 을 채택함으로써 이산화되었다. 지연시간을 가지는 점탄성 유체의 유동 시뮬레이션에 대하여는 SIMPLER 알고리즘이 잘 적용될 수 있음이 보여졌으며, 사용된 격자 크기와 이산화 방법에 따른 한계 Weissenberg 수에 관한 토의가 이루어졌다.

Weissenberg 수의 증가에 따라 모서리 와류의 크기는 별로 변화하지 않았으나, 와류 형상의 변화는 실험과 정성적으로 일치하는 결과를 얻었다. 점탄성 유체 유동에서 관성의 효과를 독립적으로 고찰하기 위하여는 고정된 탄성수  $\epsilon$ 에 대하여 무차원 속도  $M$ 을 변화시킬 것이 제안 및 토의되었다.

### NOMENCLATURE

#### Roman Letters

- $\underline{D}$  : rate of strain tensor,  $1/2 (\nabla u + \nabla u^T)$ .
- $L$  : characteristic length, depth of the narrow channel.
- $P$  : indeterminate part of the Cauchy stress tensor.
- $R$  : the Reynolds number,  $\rho UL / \eta$ .
- $U$  : characteristic velocity, average velocity in the narrow channel.
- $\underline{u}$  : velocity vector.
- $u, v$  : velocity components.
- $W$  : the Weissenberg number.  $\frac{\lambda_1 U}{L} (1 - \epsilon)$
- $x, y$  : rectangular Cartesian coordinates.

#### Greek Letters

- $\epsilon$  : ratio of retardation time to stress relax-

- ation time,  $\lambda_2 / \lambda_1$ .
- $\eta$  : zero-shear-rate viscosity,  $\eta_1 + \eta_2$ .
- $\eta_1$  : viscosity of polymer solution.
- $\eta_2$  : viscosity of Newtonian fluid.
- $\lambda_1$  : stress relaxation time.
- $\lambda_2$  : retardation time.
- $\rho$  : density.
- $\sigma, \gamma, \tau$  : xx, yy, xy components of  $\tau_1$ , respectively.
- $\underline{\tau}_1$  : non-Newtonian contribution to  $\underline{\tau}$ .
- $\underline{\tau}_2$  : Newtonian contribution to  $\underline{\tau}$ .
- $\psi$  : stream function.

### Superscript

- $T$  : transpose of matrix.
- $*$  : nondimensionalized quantity.

### Subscript

- : vector and tensor notations.
- $x, y$  : partial derivatives in x and y directions.

### REFERENCES

1. Davies, A.R., Lee, S.J., and Webster, M.F., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **16**, 117 (1984).
2. Song, J.H. and Yoo, J.Y., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **24**, 221 (1987).
3. Choi, H.C., Song, J.H., and Yoo, J.Y., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **29**, 347 (1988).
4. Marchal, J.M. and Crochet, M.J., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 187 (1986).
5. Keunings, R., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 209 (1986).
6. Song, J.H., Numerical Simulation of Viscoelastic Flows Considering change of Type of Governing Equations, Ph.D Thesis (in Korean), Seoul National University, 1986.
7. Joseph, D.D., Renary, M., and Saut, J.-C., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **87**, 213 (1985).
8. Yoo, J.Y., Abrens, M. and Joseph, D.D., *J. Fluid Mech.*, **153**, 203 (1985).
9. Boger, D.V., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **3**, 87 (1977).
10. Crochet, M.J. and Keunings, R., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **10**, 339 (1982).
11. Patanker, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1981.

12. Gosman, A.D. and Ideriah, F.J.K., *TEACH-2E: A General Computer Program for Two-Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows*, Imperial College, London, 1976.
13. Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, 1972.
14. Lagnado, R.R., Phan-Thien, N., and Leal, L.G., 1985, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **18**, 25, (1985).
15. Walters, K. and Webster, M.F., *Phil. Tran. R. Soc. London*, **A308**, 199 (1982).
16. Evans, R.E. and Walters, K., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 11 (1986).
17. Boger, D.V., Hur, D.U., and Binnington, R.J., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 31 (1986).
18. White, S.A., and Baird, D.G., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 93 (1986).
19. Walters, K. and Rawlinson, D.M., *Rheol. Acta*, **21**, 547 (1982).
20. Kraynik, A.M. and Schowalter, W.R., *J. Rheology*, **25**, 95 (1981).
21. Yeh, P.W., Kim-E., Armstrong, R.C., and Brown, R.A., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **16**, 173 (1984).
22. Lawler, J.V., Muller, S.J., Brown, R.A., and Armstrong, R.C., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **20**, 51 (1986).