

Cubic Spline Method에 의한 Munsell Value Function의 해석

정홍수* · 김공주 · 임진모 · 박병기 · 이종문

전북대학교 공과대학 섬유공학과

*KOTITI

(1990. 5. 4 접수)

The Analysis of Munsell Value Function by Cubic Spline Method

Hong-Soo Jeong*, Gong-Ju Kim, Jin-Mo Im, Pyong-Ki Park and John M. Rhee

Department of Textile Engineering Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk 560-756, Korea

* KOTITI, Seoul, Korea

(Received May 4, 1990)

Abstract— In this paper, a new method by Cubic Spline to analyze Munsell Value Function is proposed. The values calculated by this method are compared with ones by Judd's Polynomial and Cube Root Functions, etc. For performing these computation algorithms have been developed.

1. 서 론

색 현상은, 반사, 투과, 굴절되어 나오는 광(Light)과 관련한 우리 눈의 감각과 관계되는 것이기 때문에, 인간의 감각상태, 광의 종류, 대상 물질의 환경 조건에 따라서 달라지는 복잡한 현상이다. 그래서 지금까지 나온 20여개의 색공간(Color Space) 중 그 어느 것도 인간의 감각량을 똑같이 표현할 수 없었던 것은 사실이다. 모든 자연현상이 다 그렇듯 인간의 모든 개체가 다르고, 대상 물질 및 광에 관련된 너무 많은 요소(Factor)가 색지각 현상에 작용하기 때문에 이의 과학적 표현을 위해서는 단순화 및 Normalization의 과정을 거치지 않으면 안되었던 것 같다.^{1,2)}

그 동안 Color Space에 관한 연구는 CIE의 3속성 Y, x, y로 표현되는 CIE Chromaticity Diagram과 감각량과의 사이의 차를 감소시키려는 방향으로 진행되어 왔다. Y값과 감각량과 관련된 3속성 중 V_1 와의 관계는 1760년 Bouguer를 선두로 많은 학자들에 의해서 논의되어 왔고 지금도, 1976년 CIE 1976 L*a*b*의 추천 등, 많은 이론들이 속출하고 있는 실정에 있다.^{3,16)}

이와 같은 식들을 그 형태별로 구분해 보면 "JND (Just Noticeable Difference) Method"에 의한 것

"Value Step Method"에 의한 것, Polynomial에 의한 것으로 구분할 수 있는데, JND Method에서는, JND를 단위 감각량으로 나타내어 Integration 함으로써 자극량과의 관계를 나타낸 것으로 관측자가 백색에서 흑색으로 배열된 명암의 열에서, 중간 회색을 $V_2 - V_m = V_m - V_1$ (V_2 와 V_1 사이의 중간 회색을 V_m 이라 할때)의 형식으로 골라낸다고 가정하여 Logarithm으로 나타내고 있고 Value Step Method에서는 관측자가 $V_2 : V_m = V_m : V_1$ 으로 중간회색을 골라낸다는 가정에 "Exponential"의 형으로 표현하고 있다.

1976년 CIE가^{13,17)} CIE 1976 L*a*b*를 추천하면서 Cube Root식이 나왔지만, 지금까지 대부분의 식들이 그렇듯, 이 식도 Munsell-Sloan-Godlove의¹¹⁾ Data에서 출발한 Judd의 Polynomial의 값들에 그 근본을 두고 있었던 것 같다.¹⁸⁾

그래서 McLaren 등¹⁸⁾은 CIE LAB이 Law Stimulus Ratios에서 HueAngle의 비정상성이 있다는 이유로 Judd의 Polynomial을 다시 Meter법으로만 고쳐서 사용하는 것이 좋다고, 1980년 그의 보문에서 추천한 바 있다. 그러나 Judd 등¹¹⁾이 1943년 Polynomial을 만들 때, Munsell-Sloan-Godlove¹¹⁾의 충분하지 못한 Data Point들을 이용하여 "Physical Spline"에 의해서 곡선을 그린 후, Interpolation 및 Extrapolation으로

Data Point들을 확장하고, 이들 Point들로부터 Trial and Error Method에 의해서 5차의 Polynomial을 유도했기 때문에,³⁾ 만일 Munsell-Sloan-Godlove의 실험값보다 더 정확한 실험이 실시되어 그 Data Point들을 지나는 Physical Spline Curve를 그린다면, 그 당시와는 다른 Polynomial이 될 수도 있을 것이다. 지금도 Coates¹⁵⁾ 등에 의해서 실험값들이 나오고 있고 그에 따르는 식들이 Y와 V_r의 관계를 나타내기 위해서 만들어지고 있다.

이와 같이 여러 문제들을 감안할 때, 새로이 얻어지는 실험값들로부터, 수학식으로 고쳐짐으로써 생기는 오차를 줄일 수 있는 최선의 방법으로, 1960년대부터 연구가 활발히 진행되어 1970년대에 실용 단계로 되었던^{19,20)} 수학의 한 분야인 "Cubic Spline법"을 들 수 있다.

그래서 본 논문에서는 현대산업 사회에서 컴퓨터가 실용화되고 있는 점에 착안하여, 원래 주어진 실험값들을 통과하면서 실험값들에 의해서 Physical Spline으로 그린 곡선상의 어떤 임의의 값도 구할 수 있는 "Cubic Spline법"을 이용하여 CIE Y와 V_r와의 관계를 해석하는 Algorithm을 개발하고, 이를 Cube Root식, Logarithm 및 최근에 개발된 Coates 등의 식과 비교한 후, 이에 의해서 계산한 Data를 제시하려 한다.

2. Cubic Spline Theory 및 그에 의한 Munsell Value Function의 분석 방법

2.1 Cubic Spline Theory

보간 다항식은 임의의 구간 [a, b]내에 좌표점에 n개일 때 (n-1)차 이하의 다항식으로 표시된다. n의 값이 커짐에 따라 이 보간 다항식은 풀기도 어렵고 구간간의 양끝점 부근에서는 보간값과 참값의 오차가 너무 크게 나타나게 된다.

이와 같이 임의의 구간을 하나의 함수 f(x)로 나타내지 않고 주어진 구간 a ≤ x ≤ b를 분할, 그 양끝점을 포함할 미소 구간, a = x₁ < x₂ < ... < x_{n-1} < x_n = b로 나누어 이들 미소 구간을 각각의 다항식 함수 g(x)로 만들 때 이러한 함수 g(x)를 Spline 함수라 한다. 이러한 Spline 함수들에 의해 주어진 구간 [a, b]를 보간했을 때는 하나의 함수 f(x)에 의한 보간 때보다 오차는 줄어들게 된다.^{19,22)}

가장 간단한 연속부분 다항식 근사법은 부분 1차 함수인데 이 경우에 그래프의 형태는 개략적으로 보여줄 수 있지만 주어진 점에서 함수가 연속이 아니다. 그러나 자연과학 현상에서 일어나는 함수의 형태는 거의가 모두 연속이기 때문에 이 1차함수를 소구간 보간 함수로 이용하기는 불편하고 주어진 구간 a ≤ x ≤ b의 어느 곳에서도 연속인 함수를 사용하는 것이 요구되어 진다.²²⁾

임의의 구간 [a, b]가 a = x₁ < x₂ < x₃ < ... < x_n = b 와 같이 (n-1)개의 소구간으로 이루어졌을 때 차수가 k인 Spline 함수 S(x)는 다음 조건을 만족해야 한다.

조건[1]: S(x)는 i=1, 2...n에 대한 소구간[x_i, x_{i+1}]에서 k차 이하의 다항식으로 표시되어야 한다.

조건[2]: S(x), S'(x), S''(x)..... S^(k-1)(x) 등의 도함수들은 구간 [a, b]에서 연속이어야 한다.

위의 조건을 만족하는 최소의 차수는 3차인데 이렇게 모든 소구간[x_i, x_{i+1}]에서 3차 다항식으로 표시되어 앞의 조건을 만족하는 함수를 3차 Spline 함수 (Cubic Spline Function)라고 한다.

점(x_i, y_i)와 점(x_{i+1}, y_{i+1})로 주어진 i번째의 소구간에 대한 3차식은,

$$S(x) = y = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (1)$$

단 x_i < x < x_{i+1}

이 된다. 그런데 이 함수 S(x)는 소구간의 양끝점(x_i, y_i)와 (x_{i+1}, y_{i+1})을 통과해야 하므로,

$$y_i = S(x_i) = d_i \quad (2)$$

$$y_{i+1} = S(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i$$

이고 h_i = x_{i+1} - x_i라고 하면

$$y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (3)$$

이 된다.

Spline 함수의 조건에 식 (1)을 미분하면

$$S^1(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \quad (4)$$

$$S^{11}(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i \quad (5)$$

가 된다.

S_i를 점(x_i, y_i)에서의 2차 도함수라 하고 S_{i+1}을 점(x_{i+1}, y_{i+1})에서의 2차 도함수라면

$$S_i + 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i = 2b_i$$

$$S_i + 1 = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i$$

가 되어

$$b_i = S_i / 2 \tag{6}$$

$$a_i = (S_{i+1} - S_i) / 6h_i \tag{7}$$

가 된다. 식 (2), (6), (7)를 식 (3)에 대입하면,

$$y_{i+1} = \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \right) h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

이고 뒷 식을 c_i 에 대하여 정리하면

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i^2 S_{i+1}}{6}$$

이 된다. $x = x_i$ 이면 식 (4)은

$$y^1 = S^1(x_i) = c_i \tag{8}$$

이고 x_i 에서 x_i 로의 기울기인

$$y^1 = 3a_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + 2b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + c_{i+1} \tag{9}$$

$$= 3a_{i+1}h_{i+1}^2 + 2b_{i+1}h_{i+1} + c_{i+1}$$

식 (8)과 (9)를 같게 하여 a, b, c, d 대신에 S_i 와 y_i 등의 관계식을 표현하면,

$$y_i^1 = c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i^2 S_{i+1}}{6}$$

$$= 3 \left(\frac{S_i - S_{i+1}}{6h_{i+1}} \right) h_{i+1}^2 + 2 \left(\frac{S_{i+1}}{2} \right) h_{i+1}$$

$$+ \frac{y_i - y_{i+1}}{h_{i+1}} h_{i+1} S_i - \frac{2h_i (S_{i+1} + h_i S_i)}{6}$$

가 되는데 뒷 식을 간단하게 정리하면 다음식 (10)과 같이 된다.

$$h_{i+1} S_{i+1} + (2h_{i+1} + 2h_i) S_i + h_i S_{i-1} \tag{10}$$

$$= 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$

식 (10)을 구간 i 내의 모든 소구간 (즉 $i=2$ 에서 $n-1$ 까지)에 대해서 수행하면 n 개의 주어진 점에서 $(n-2)$ 개의 S_i 값을 얻을 수 있다. 양끝점을 지나는 Spline 함수는 알 수가 없기 때문에 어느 정도 임의로 택해야 하는데 자주 사용되는 조건에는 다음과 같은 세 가지 조건이 있다.

제 1조건 : $S_1 = S_n = 0$; 끝점에서의 함수형을 1차 함수로 가정하는 경우

제 2조건 : $S_1 = S_2, S_n = S_{n-1}$; 끝점에서의 함수형을 2차 함수로 가정하는 경우

제 3조건 : S_i 은 S_2 와 S_3 의 선형 보간법으로, 그리고 S_n 은 S_{n-1} 과 S_{n-2} 의 선형 보간법으로 구하는 경우
이중 세번째 방법에서 S_i 은

$$\frac{S_2 - S_1}{h_1} = \frac{S_3 - S_2}{h_2}$$

에서,

$$S_1 = \frac{(h_1 + h_2)S_2 - h_1 S_3}{h_2} \tag{11}$$

로 구할 수 있으며 S_n 은,

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{h_{n-2}}$$

에서,

$$S_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1})S_{n-1} - h_{n-1}S_{n-2}}{h_{n-2}} \tag{12}$$

에서 구할 수 있다.

$S_1 = 0, S_n = 0$ 인 제 1조건을 사용한 방법은 곡선을 그 끝점에서 너무 완만하게 즉, 직선에 가깝게 만드는 결점이 있고 제 3조건을 사용한 방법은 끝점 구간에서 너무 큰 곡률을 주는 결점이 있다.

식 (10)에서 짐차 i 에 2에서 $n-1$ 까지 代入하여 생긴 식을 행렬로 표현하면,

$$\begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} (y_3 - y_2) / h_2 - (y_2 - y_1) / h_1 \\ (y_4 - y_3) / h_3 - (y_3 - y_2) / h_2 \\ \vdots \\ (y_n - y_{n-1}) / h_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2}) / h_{n-2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

이 된다. 식 (13)은 S_n 으로 n 개의 미지수가 있다. 그런데 계수 행렬은 그 크기가 $(n-2) \times (n-2)$ 인 정방 행렬로 표현되어 있으므로 식 (13)은 S_1 과 S_n 을 제외한 모든 소구간의 2차 도함수 값을 구할 수 있다.

양쪽 끝점을 포함하고 있는 소구간에 대한 S_i 과 S_n 을 위에서 나타낸 세 가지 가정 조건으로 결정하면 S벡터를 모두 구하게 된다. 특히 이 행렬의 특징은 폭이 3인 띠타칭 행렬인 점이며 S_2 에서 S_{n-1} 까지 구하는 것은 식 (13)을 Gauss-Jordan해법으로 쉽게 구할 수가 있다.

각 소구간에 대한 S_i 의 값이 구해지면 다음 식 (31)로 a, b, c, d를 구할 수 있게 되어 3차 Spline 함수를 만들 수 있으므로 Spline 함수를 보간 공간식으로 이용할 수 있다.

이를 정리하면 i 번째 소구간의 계수들은,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{S_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \\ d_i &= y_i \end{aligned} \quad \dots\dots (14)$$

가 된다.

2.2 Cubic Spline Theory에 의한 Munsell Value Function의 분석 방법 및 Computer Program

Judd의 식에 의하여 구해진 값들을 Cubic Spline Method의 좌표점으로 이용하여 그 중간값들을 구한 다음 Judd 식의 값들과의 오차를 비교하고 그 타당성을 알아보려고 한다.

Judd의 식에 의해 구해진 값을 좌표점으로 이용하는 데에는 다음과 같은 조건을 설정하였다.

1) 좌표점으로 이용한 Data 수는 30개를 넘지 않는 범위에서 선정하여 사용하였다.

2) 좌표점으로 CIE Y를 같은 간격으로 했을 때와 Munsell Value를 같은 간격으로 했을 때 그리고 불규칙으로 했을 때 등으로 설정했다.

3) Cubic Spline Function을 만들 때 필요한 초기 좌표점과 마지막 좌표점의 2차 미분값은 2.1에서 가정한 세 가지 임의의 조건을 써서 비교한 다음 가장 좋은 조건을 선정했다.

이렇게 하여 구해진 값을 Judd의 5차식과 비교하여 그 오차가 어느 정도 발생하는 지를 알아보고 Judd의 식과 다른 식을 비교하였을 때 오차와는 어떤 관계가 있는지를 알아보았다.

Computer Program을 만드는 데 있어서는 그 기종은 HP-1000을 사용하였고 언어는 FORTRAN어를 이용하였다.

먼저 Judd의 5차식을 Newton-Rophson Method에 의해서 CIE Y와 Munsell Value와의 관계를 구했으며 이 구해진 값들 중에서 Cubic Spline Method의 좌표값으로 선정했다.

수치 해석법에 의한 Cubic Spline Function을 만들기 위하여 우선 2차 도함수 S_i 의 값을 구함에 있어 $i=2, 3, \dots, n-2, n-1$ 까지의 값은 Gauss-Jordan

해법으로 구해으며, $i=1$ 과 n 에서 2차도함수 값은 2.1에서 가정한 세 가지 조건을 써서 구하였다.

2차 도함수값이 다 구해진 다음 각 소구간에서의 Cubic Spline Function의 계수값들은 식 (14)를 사용하여 구하였다.

4. 결과 및 고찰

Judd의 5차식에서 Munsell Value Function을 구하기 위한 Flow Chart는 Fig. 1 및 2와 같다.

Judd의 식에서 구한 값을 Cubic Spline Function의 좌표점으로 이용한 Flow Chart는 Fig. 3 및 4와 같다.

Table 1은 Judd의 식에서 계산된 값들인데 Table 2에서 4까지의 좌표점들을 나타내고 있다. Table 1에서 보여주는 바와 같이 Munsell Value보다는 CIE Y 값을 같은 간격에 가깝도록 해서 좌표점을 설정한 경우이다.

Table 2는 좌표점을 8개 설정했을 때 그 중간값들에서 Judd의 식과의 오차를 나타내고 있는데 초기 구간 부근에서 특히 큰 오차를 나타내고 있음을 보여주고 있다.

Table 3은 Table 2에서 보다 그 중간값들을 하나씩 더 좌표점으로 증가시킨 경우인데 Table 2에서 보다는 그 오차가 현저하게 줄어들었지만 초기 구간에서는 큰 오차를 발생시키고 있다.

Table 4는 Table 3에 중간값을 더 설정한 경우인데 역시 초기 구간에서 큰 오차가 있음을 알 수 있다.

이상의 Table 2에서 4까지에서 나타난 결과에서 살펴보면 어느 것이나 초기 구간에서 큰 오차를 발생시키며 다음 구간으로 갈수록 그 오차의 크기는 줄어들며 좌표점의 수가 증가할 수록 각 구간에서의 오차 크기도 줄어드는 것을 알 수 있다.

Table 5는 Table 6과 7의 좌표점을 나타내고 있는데 약간 임의적으로 CIE Y와 Munsell Value를 설정한 경우이다.

Table 6과 7은 그 중간 구간에서 오차가 크게 발생되고 있는데 Table 5에서 살펴보면 오차가 크게 나타난 구간은 그 간격이 다른 구간에 비해 넓음을 알 수 있다.

Table 8은 Table 9에서 13까지의 계산을 위한 Cubic Spline의 좌표점을 나타내고 있다.

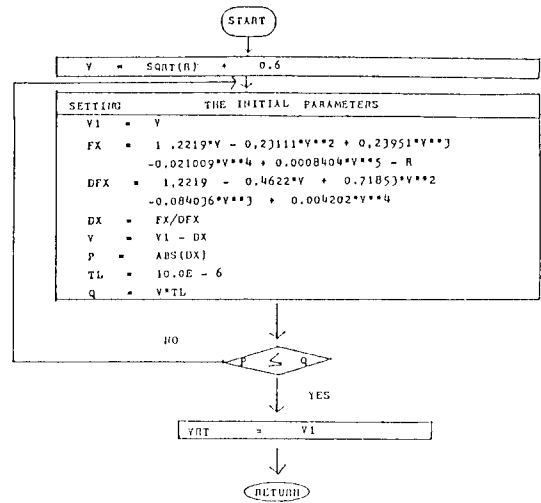
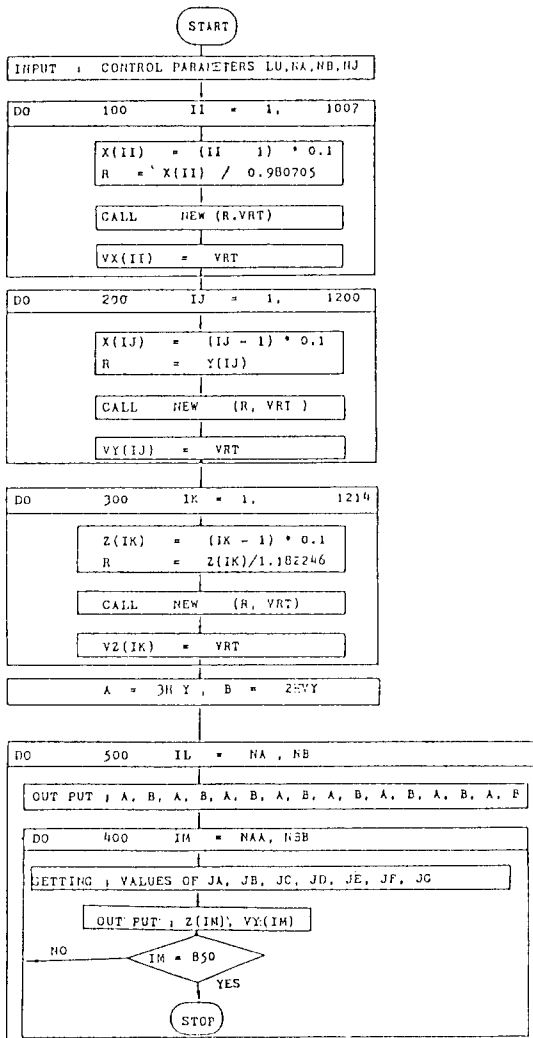


Fig. 2. Flowchart of subroutine New.

3조건 즉 S_n 을 선형 보간법으로 구했을 때 오차가 가장 작게 발생하였다. Table 10에서 보여주는 바와 같이 초기 구간과 마지막 구간을 제외하고는 오차가 소숫점 넷째 자리에서 발생하고 있다.

Table 11은 다른 구간에서는 Table 10에서와 같은 좌표점을 잡고 초기 구간과 마지막 구간만 좌표점을 하나씩 증가하여 적용한 경우인데 여기에서 보면 2.1의 세 가지 조건을 사용한 모든 방법이 모두 소숫점 넷째 자리에만 오차를 발생시키고 있기 때문에 이 값들은 Judd의 식에 의해서 구한 값과 거의 차이가 없다고 보아도 될 것이다.

Table 12와 13은 초기 구간과 마지막 구간에서의 좌표점을 더 확장하여 적용한 경우인데 Table 11의 경우와 거의 같은 값을 나타내고 있다.

이상의 Table 9에서 13까지를 비교 검토한 결과 초기 구간에서는 Data값이 작을수록 $S_1=0$ 로 가정한 방법이 Judd 식에서 구한 값과의 오차를 작게 발생 시킬 수 있고 마지막 구간에서는 선형 보간법으로 S_n 을 구한 방법이 오차를 작게 발생시킬 수 있다. 또 오차 발생을 작게 하기 위해서는 Munsell Value 구간을 같은 간격으로 그리고 초기 구간과 마지막 구간을 더 조밀하게 나누어줄이 좋을 수 있다.

Table 14는 초기 구간에서는 $S_1=0$ 로 가정하고 S_n 은 선형 보간법으로 가정하여 Table 8에서 보여

Table 9는 Judd의 5차식에서 계산된 임의의 값 11개를 좌표점의 Data로 선정한 경우인데 표에서 나타난 바와 같이 CIE Y보다는 Munsell Value를 같은 간격에 가깝도록 선정한 것을 보여주고 있다. Cubic Spline Method에 의해 구한 Munsell Value는 각 구간에서 Judd의 5차식의 값과 절대 오차가 소숫점 세째 자리에 나타나고 있음을 보여주고 있다. 특히 초기 구간에서는 $S_1=0$ 로 했을 때 그리고 마지막 구간에서는 S_n 을 선형 보간법에 의해서 구했을 때 제일 오차가 작게 나타나고 있음을 알 수 있다.

Table 10은 Table 9에서 보다 그 중간값들을 하나씩 더 좌표점으로 증가시킨 경우인데, 초기 구간에서의 오차도 현저하게 줄어들었으며 특히 2.1의 세

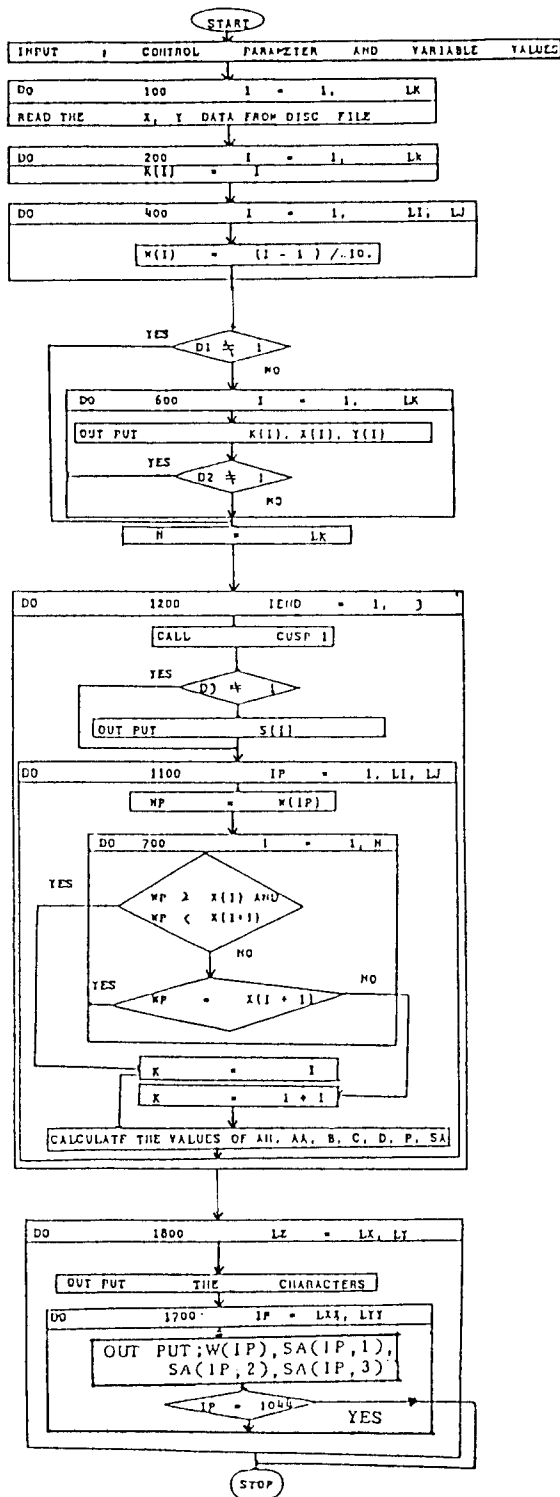


Fig. 3. Main routine flowchart of program H0008

Table 1. Munsell value data calculated by Judd's equation.

CIE Y	Munsell values		
	Table 2 Dara 8	Table 3 Data 14	Table 4 Data 27
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0000			2.3104
8.0000		3.3080	3.3080
12.000			3.9999
16.000	4.5537	4.5537	4.5537
20.000			5.0259
24.000		5.4429	5.4429
28.000			5.8194
32.000	6.1645	6.1645	6.1645
36.000			6.4844
40.000	6.7833	6.7833	6.7833
44.000			7.0644
48.000	7.3300	7.3300	7.3300
52.000			7.5819
56.000		7.8218	7.8218
60.000			8.0507
64.000	8.2697	8.2697	8.2697
68.000			8.4796
72.000		8.6811	8.6811
76.000			8.8749
80.000	9.0615	9.0615	9.0615
84.000			9.2414
88.000		9.4150	9.4150
92.000			9.5828
96.000	9.7449	9.7449	9.7449
100.00			9.9019
102.60	10.0012	10.0012	10.0012

Table 2. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 8 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.9938	0.8372	0.7350
2	0.1755	0.1282	0.0961
3	0.0470	0.0344	0.0257
4	0.0128	0.0094	0.0071
5	0.0035	0.0025	0.0019
6	0.0013	0.0006	0.0005
7	0.0008	0.0001	0.0002

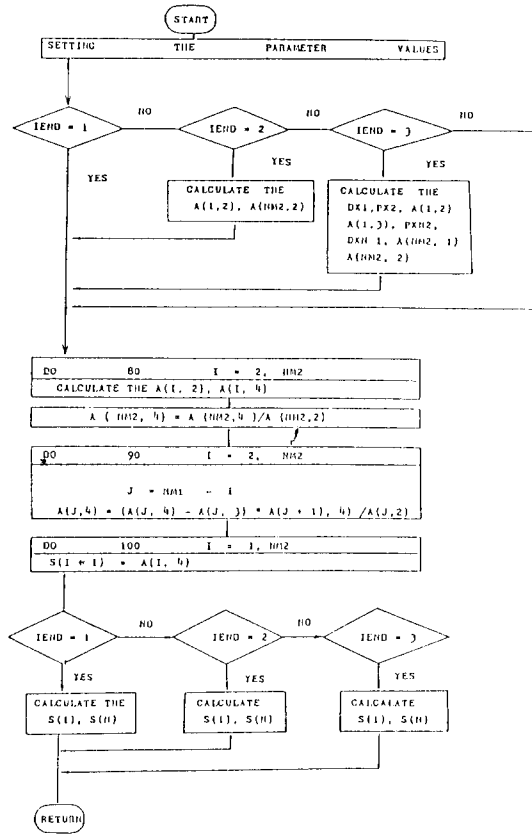


Fig. 4. Flowchart of subroutine Cusp1.

Table 3. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 14 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.5528	0.4338	0.3563
2	0.1155	0.0825	0.0607
3	0.0309	0.0221	0.0162
4	0.0084	0.0060	0.0044
5	0.0023	0.0016	0.0012
6	0.0006	0.0005	0.0004
7	0.0002	0.0001	0.0001
8	0.0001	0.0001	0.0001
9	0.0001	0.0001	0.0001
10	0.0001	0.0001	0.0001
11	0.0002	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0007	0.0001	0.0001

Table 4. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 27 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.2233	0.1463	0.0990
2	0.0622	0.0416	0.0289
3	0.0166	0.0111	0.0077
4	0.0045	0.0031	0.0022
5	0.0012	0.0008	0.0006
6	0.0004	0.0003	0.0002
7	0.0001	0.0001	0.0001
8	0.0001	0.0001	0.0002
9	0.0001	0.0001	0.0001
10	0.0001	0.0001	0.0001
11	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0001	0.0001	0.0001
22	0.0002	0.0002	0.0002
23	0.0001	0.0001	0.0001
24	0.0001	0.0001	0.0001
25	0.0001	0.0001	0.0001
26	0.0001	0.0001	0.0001

주는 좌표점을 11개에서 27개까지의 5차 방법 적용시킨 경우인데 Table 9에서 12까지의 경우보다는 그 오차들이 약간 줄어들 수 있으나, Table 13의 경우보다는 오히려 약간 늘어남을 알 수 있다. Table 15는 "Cube Root Rule"에 의한 값과 "Logarithm"을 이용한 식을 Judd의 5차식의 값과 비교한 Data의 일부이다. 이미 여러 학자들이 지적한 것과 같이 여러 모순된 문제점들이 오차 발생도 Cubic Spline Method에 의한 것보다 더 크게 일어나고 있음이 검토되었다.

Table 5. Munsell value data calculated by Judd's equation.

CIE Y	Munsell values	
	Data 16	Data 23
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.0830	0.0830
0.3	0.2546	0.2546
0.6		0.5156
1.0	0.8437	0.8437
1.5		1.1962
2.0	1.4887	1.4887
2.5		1.7359
3.5	2.1397	2.1397
5.0	2.6100	2.6100
8.0		3.3080
14.0		4.2895
16.0	4.5537	
30.0		5.9954
32.0	6.1645	
48.0	7.3300	7.3300
64.0	8.2697	
68.0		8.4796
80.0	9.0615	
90.0		9.4996
92.0		9.5828
95.0		9.7049
98.0	9.8240	9.8240
100.0		9.9019
101.0	9.9403	9.9403
102.0	9.9785	9.9785
102.60	10.001	10.001

5. 결 론

Munsell Value Function과 CIE Y와의 관계를 표현한 여러 식을 비교 검토하고 Judd의 5차식에 의하여 계산된 값을 가지고 Cubic Spline Function을 만들어 Munsell Value와 CIE Y와의 관계에 대한 값들을 구해 Judd의 5차식에 의한 값과 비교 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) Cubic Spline Method로 Judd의 5차식에서 구해진 값을 좌표점으로 이용할 때 Table 2에서 4, 6, 7, 그리고 Table 9에서 13까지에서 비교 검토한 결과

Table 6. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 16 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0001	0.0000	0.0001
3	0.0010	0.0011	0.0011
4	0.0004	0.0004	0.0004
5	0.0017	0.0017	0.0017
6	0.0013	0.0013	0.0013
7	0.0464	0.0464	0.0464
8	0.0200	0.0200	0.0200
9	0.0051	0.0051	0.0051
10	0.0013	0.0013	0.0013
11	0.0004	0.0004	0.0004
12	0.0002	0.0002	0.0002
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001

좌표점으로 이용할 수 있는 값이 많으면 많을 수록 Judd 식의 값과 접근했으며, 특히 CIE Y보다는 Munsell Value를 같은 간격으로 한 Data를 사용하고 Data수를 증가시켰을 때의 가장 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

2) CIE Y를 x축으로 하여 Munsell Value를 구할 때, 초기 점과 마지막 점에서 정해지는 2차 미분값에 의해서 Munsell Value는 큰 차이를 나타냈지만 좌표점을 많이 이용했을 때는 그 차이 역시 줄어들었다.

3) Judd의 5차식과 일치하는 초기 미분값과 마지막 점에서 미분값을 정해 주었을 경우 좌표점의 수를 어느 정도 이상 정해준다면 이 Cubic Spline Method에 의해서 Munsell Value와 CIE Y의 값들에 대한 중간값을 정확하게 얻을 수 있을 것이다.

4) Cubic Spline Method로 주어진 좌표점들을 이용하여 그 중간값들을 보간할 경우 그 좌표점에 대한 Physical Spline을 그려 Initial Point와 End Point에서 2차 미분값을 Trial and Error Method(시행 착오법)에 의해 정확하게 구한다면 주어진 구간을 하나의 함수에 의하여 표현한 때보다 그 중간값의 보간에서 참값에 가까운 값을 구할 수 있을 것이다. 즉, 주어진 좌표점들을 하나의 다항식의 합

Table 7. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 23 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0001	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0002	0.0001	0.0001
5	0.0001	0.0001	0.0001
6	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0002	0.0002	0.0002
9	0.0001	0.0001	0.0001
10	0.0009	0.0009	0.0009
11	0.0013	0.0013	0.0013
12	0.0080	0.0080	0.0080
13	0.0022	0.0022	0.0022
14	0.0009	0.0009	0.0009
15	0.0003	0.0003	0.0003
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0001	0.0001	0.0001
22	0.0001	0.0001	0.0001

Table 9. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 11 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0078	0.0248	0.0296
2	0.0022	0.0070	0.0095
3	0.0050	0.0103	0.0119
4	0.0011	0.0034	0.0042
5	0.0014	0.0026	0.0030
6	0.0003	0.0005	0.0007
7	0.0005	0.0006	0.0007
8	0.0002	0.0003	0.0001
9	0.0017	0.0004	0.0005
10	0.0079	0.0027	0.0018

Table 8. Munsell value data calculated by Judd's equation

CIE Y	Munsell values				
	Data 11	Data 21	Data 23	Data 24	data 27
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1			0.0830	0.0830	0.0830
0.2				0.1681	0.1681
0.4					0.3419
0.6		0.5156	0.5156	0.5156	0.5156
1.2	0.9927	0.9927	0.9927	0.9927	0.9927
2.0		1.4887	1.4887	1.4887	1.4887
3.1	1.9898	1.9898	1.9898	1.9898	1.9898
4.6		2.4959	2.4959	2.4959	2.4959
6.6	3.0103	3.0103	3.0103	3.0103	3.0103
9.0		3.4994	3.4994	3.4994	3.4994
12.0	3.9999	3.9999	3.9999	3.9999	3.9999
15.6		4.5026	4.5026	4.5026	4.5026
19.8	5.0038	5.0038	5.0038	5.0038	5.0038
24.6		5.5017	5.5017	5.5017	5.5017
30.1	6.0041	6.0041	6.0041	6.0041	6.0041
36.2		6.4998	6.4998	6.4998	6.4998
43.1	7.0026	7.0026	7.0026	7.0026	7.0026
50.7		7.5014	7.5014	7.5014	7.5014
59.1	8.0001	8.0001	8.0001	8.0001	8.0001
68.4		8.5001	8.5001	8.5001	8.5001
78.7	9.0016	9.0016	9.0016	9.0016	9.0016
90.0		9.4996	9.4996	9.4996	9.4996
94.9					9.7009
97.4					9.8004
100.0			9.9019	9.9019	9.9019
102.0	10.0012	10.0012	10.0012	10.0012	10.0012

수로 표현할 때 발생하는 Numerical Instability를 줄일 수 있기 때문에 어떤 임의의 값들만이 계산되어 있는 표를 가지고 있을 때, 그 좌표점들을 통과하는 하나의 다항식으로 함수를 만드는 수고없이 그 중간값들을 참값에 가깝게 보간할 수 있을 것이다.

5) Program 자체는 CIE X, Y, Z로 부터 V_L, V_1, V_2 를 구할 수 있도록 되어 있기 때문에 결과를 구하는 곳만 약간 수정하면 V_L, V_2 도 구할 수 있으며, 임의의 실험 값을 가지고 있을 때 적절히 변경하여 사용한다면 그 중간값을 구할 때에 많은 도움을 줄 수 있을 것이다.

Table 10. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 21 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0052	0.0064	0.0037
2	0.0022	0.0025	0.0018
3	0.0009	0.0010	0.0007
4	0.0001	0.0001	0.0001
5	0.0004	0.0004	0.0004
6	0.0002	0.0002	0.0002
7	0.0002	0.0002	0.0002
8	0.0002	0.0002	0.0002
9	0.0001	0.0001	0.0001
10	0.0001	0.0001	0.0001
11	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0002	0.0001	0.0001
19	0.0005	0.0002	0.0001
20	0.0044	0.0004	0.0001

Table 11. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 23 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0002	0.0001	0.0002
3	0.0008	0.0007	0.0007
4	0.0002	0.0003	0.0003
5	0.0003	0.0003	0.0003
6	0.0003	0.0003	0.0003
7	0.0003	0.0003	0.0003
8	0.0002	0.0002	0.0002
9	0.0002	0.0002	0.0002
10	0.0001	0.0001	0.0001
11	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0002	0.0002	0.0002
21	0.0003	0.0001	0.0001
22	0.0002	0.0001	0.0001

참고문헌

1. R.G. Kuehni, "Computer Colorant Formulation," Lexington Books (1975).
2. G. Wyszecki and W.S. Stiles, "Color Science," 2nd ed., John Wiley & Sons (1982).
3. S.M. Newhall, D. Nickerson and B. Judd, "Final Report of the O.S.A. Sub-committee on the spacing of the Munsell Colors," *J. Opt. Soc. Am.*, **33**, 7, 385-418 (1943).
4. A.E.O. Munsell, L.L. Sloan and I.H. Godlove, "Neutral Value Scales(I); Munsell Neutral Value Scale," *J. Opt. Soc. Am.*, **23**, 394-411 (1933).
5. E.Q. Adams and P.W. Cobb, "The Effect on Foveal Vision of Bright (and Dark) Surrounding, V," *J. Exper. Psychol.*, **5**, 39-45 (1922).
6. I.G. Priest, K.S. Gibson and H.J. McNicholas, "An Examination of the Munsell Color System. I. Spectral and total reflection and the Munsell Scale of Value," U.S. Natl. Bur. Standards Tech., Paper 167 (1920).
7. I.H. Godlove, "Natural Value Scales, II, a comparison of Results and Equations Describing Value Scales," *J. Opt. Soc. Am.*, **23**, 419-425 (1933).
8. C.E. Foss, D. Nickerson and W.C. Granville, "Analysis of the Ostwald Color System," *J. Opt. Soc. Am.*, **34**, 361-381 (1944).
9. M. Richeter, "The Official German Standard Color Chart," (Translated by D.B. Judd, G. Wyszecki) *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 223-226 (1955).
10. J.H. Ladd and J.E. Pinney, "Empirical Relationships with the Munsell Value Scale," *Proc. Inst. Radio Eng.*, **43**, 1237, (1955).
11. L.G. Glasser, A.H. McKinney, C.C. Reilly, P.D. Schnelle, *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 736-740 (1958).

Table 12. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 24 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0001	0.0001
4	0.0009	0.0008	0.0008
5	0.0003	0.0003	0.0003
6	0.0003	0.0003	0.0003
7	0.0003	0.0003	0.0003
8	0.0003	0.0003	0.0003
9	0.0002	0.0002	0.0002
10	0.0002	0.0002	0.0002
11	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0002	0.0002	0.0002
22	0.0003	0.0001	0.0001
23	0.0002	0.0001	0.0001

Table 13. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method using 27 data points.

Sections	Absolute errors		
	S(1)	S(2)	S(3)
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0001	0.0001	0.0001
5	0.0008	0.0008	0.0008
6	0.0002	0.0002	0.0002
7	0.0003	0.0003	0.0003
8	0.0003	0.0003	0.0003
9	0.0003	0.0003	0.0003
10	0.0002	0.0002	0.0002
11	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0001	0.0001	0.0001
21	0.0001	0.0001	0.0001
22	0.0002	0.0002	0.0002
23	0.0001	0.0001	0.0001
24	0.0001	0.0001	0.0001
25	0.0001	0.0001	0.0001
26	0.0001	0.0001	0.0001

12. G. Wtszecki, "Proposal For a New Color-Difference Formula," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1318 (1963).

13. H. Pauli, "Proposed Extension of the CIE Recommendation on Uniform Color Terms," *J. Opt. Soc. Am.*, **66**, 866-867 (1976).

14. J.L. Saunderson and B.I. Milner, "Modified Chromatic Value Color Space," *J. Opt. Am.*, **36**, 36-42 (1946).

15. E. Coates, K.Y. Fong and B. Rigg, "Uniform lightness Scales," *J.S.D.C.*, **97**, 179-183 (1981).

16. D.W. Lee, Y.J. Shin, J.M. Rhee and Y.E. Kang, "The Analysis of Color Difference into Three Characteristics. (3)," *J. Kor. Soc. Text. Eng. Chem.*, **18**,(2), 29-37 (1981).

17. K. McLaren and B. Rigg, "The SDC Recommended Colour-Difference Formula; Change to CIE-LAB," *J.S.D.C.*, **92**, 337-338 (1976).

18. K. McLaren, "CIELAB Hue-Angle Anomalies at Low Tristimulus Ratios," *Color Res. Appl.*, **5**, 139-143 (1980).

19. F. Szidarovszky and S. Yakowitz, "Principles & Procedures of Numerical Analysis," Plenum Press (1978).

20. P. Henrici, "Essentials of Numerical Analysis with Pocket Calculator Demonstrations," John Wiley & Sons (1982).

21. A.H. Ahlberg, E.N. Nilson and J.L. Walsh, "The Theory of Splines and their Applications," Academic Press, 1-19 (1967)

22. E. Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematic."

Table 14. The absolute errors between data calculated by Judd's equation and ones by Cubic Spline method

$$(S_1=0, S_n = \frac{(h_{n-2} - h_{n-1})S_{n-1} - h_{n-1}S_{n-2}}{h_{n-2}})$$

Sections	Absolute errors				
	data1	Data 2	Data 3	Data 4	Data 5
1	0.0078	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0022	0.0022	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.0050	0.0009	0.0008	0.0001	0.0001
4	0.0011	0.0001	0.0002	0.0009	0.0001
5	0.0014	0.0004	0.0003	0.0003	0.0008
6	0.0003	0.0002	0.0003	0.0003	0.0002
7	0.0005	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
8	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
9	0.0017	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003
10	0.0071	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002

11	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
15	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
17	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
18	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
19	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001
20	0.0026	0.0002	0.0001	0.0001
21		0.0003	0.0002	0.0001
22		0.0001	0.0003	0.0002
23			0.0001	0.0001
24				0.0001
25				0.0001
26				0.0002

Table 15. Comprison of values of V_Y calculated by different approximations

CIE Y	V_Y					
	Judd	Glasser	Wyszecki	CIE L*u*v*	CIE 1976 Lab	Coates.
0.0	0.0	-1.8380	-1.7000	-1.6000	0.0000	0.0000
0.2	0.1681	-0.3590	-0.2385	-0.1508	0.0176	0.2908
0.4	0.3419	0.0254	0.1414	0.2259	0.0352	0.5479
0.6	0.5156	0.2950	0.4079	0.4901	0.0528	0.7793
0.8	0.6841	0.5097	0.6200	0.7005	0.0705	0.9896
1.0	0.8437	0.6910	0.7991	0.8781	0.8781	1.1824
1.5	1.1962	1.0570	1.1608	1.2367	1.2367	1.6039
2.0	1.4887	1.3483	1.4487	1.5222	1.5222	1.9603
3.0	1.9501	1.8094	1.9044	1.9741	1.9741	2.5413
5.0	2.6100	2.4865	2.5735	2.6375	2.6375	3.3914
10.0	3.6770	3.6106	3.6842	3.7389	3.7389	4.7104
30.0	5.9954	6.0202	6.0654	6.1001	6.1001	7.0400
50.0	7.4576	7.4789	7.5069	7.5294	7.5294	8.1765
70.0	8.5814	8.5847	8.5997	8.6130	8.6130	8.9351
90.0	9.4936	9.4955	9.4997	9.5054	9.5054	9.5053
95.0	9.7049	9.7016	9.7034	9.7074	9.7074	9.6283
98.0	9.8240	9.8218	9.8221	9.8252	9.8252	9.6990
100.0	9.9019	9.9006	9.9000	9.9024	9.9024	9.7451
100.50	9.9211	9.9201	9.9193	9.9215	9.9215	9.7564
101.00	9.9403	9.9396	9.9385	9.9406	9.9406	9.7677
101.50	9.9594	9.9590	9.9577	9.9596	9.9596	9.7790
102.00	9.9785	9.9783	9.9768	9.9785	9.9785	9.7902
102.60	10.0012	10.0014	9.9997	10.0012	10.0012	9.8035

- 5th ed., John Wiley & Sons, 781-785 (1983).
23. S.S. Stevens, "Decibels of Light and Sound," *Phys. Today*, **8**, 12-17, Oct. (1955).
 24. R.W.G. Hunt, "Light Energy and Brightness Sensation," *Nature*, **179**, 1026-1027 (1957).
 25. J. Raynal, "Conversion Equations to Munsell Value," *Color Res. Appl.*, **1**, 154 (1976).
 26. D. Nickerson, "Tables for Use in Computing Small Color Difference," *Amer. Dyestuff Rep.*, **39**, 541-546 (1950).
 27. F.W. Billmeyer Jr., "Table of Adams Chromatic Value Color Coordinates," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1317 (1963).
 28. J.M. Rhee and S.C. Cho, "The Analysis of Color and It's Application(I); The Conversion of X, Y and Z into V_X , V_Y and V_Z ," *Eng. Res.*, **14**, 243-246 (1983).