

## 三次元 境界要素法에 의한 薄肉直交軸 齒車의 應力 解析

張 志 演\*

Stress Analysis of the Thin Intersected Axe Gear  
By 3-DM Boundary Element Method

J.Y. Jang

### Abstract

It is impossible to directly analyse stress distribution on thin bevel Gear. On this Paper, the author propose a method to analyse the stress of thin bevel gear using boundary element method and develop a computer program.

The propriety of this program is verified by comparing the numerical calculating results with theoretical results.

### 1. 서 론

최근 기계장치 각부의 경량화에 대한 요구가 증대하여, 기계요소로서의 치차장치에 대해서도 치차본체의 무게를 얇게한 박형형상의 설계법에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 그러나 이것들에 관한 종래의 연구는 평치차 등 평행축치차를 대상으로 하고 있는 형편이며, 베벨치차 등의 직교축치차에 관한 연구는 거의 발표되고 있지않다. 그 이유로서는, 직교축치차는 치형이 대단히 복잡하고, 이높이 및 이뿔개가 치폭방향으로 복잡하게 변화하고 있기 때문에 박육시키기 이전의 후육형상의 직교축치

차의 경우 조차도 치근응력분포 및 동력전달선상의 하중분포의 해석이 지극히 곤란하여 그 해석이 경험적, 실험적 데이터에 의존하고 있는 실정으로 후육형상 직교축치차의 강도설계에 관한 계통적 연구는 최근에야 비로소 시작되고 있기 때문이다<sup>1)~7)</sup>.

따라서, 그 사용목적상 경량이어야 하며, 높은 신뢰성이 요구되는 헬리콥터나 하바그랏트, 및 자동차용 차동치차 등에 이용되는 박육형상 직교축치차의 설계에 있어서도, 현재는 경험적 지식이나 데이터에 의존하고 있을 따름이며 박육직교축치차의 최적형상의 설계법에 대해서는 평행축치차의 경우처럼 명백하고 간편한 설계 지침이 아직 얻어지지 못한 형편이다.

\* 正會員, 韓國海洋大學

이 연구에서는, 이 박육형상 직교축치차의 설계 및 제작시 가장 중요하며 신뢰성에 관계 있는 부하가 걸렸을 경우의 치근응력분포와 림(Rim)부의 변형 및 발생응력을 해석하기 위한 전산프로그램을 개발하여 직교축치차의 박육화의 평가방식을 이하의 방법으로 확립하고자 한다.

이 연구에 있어서의 수치해석의 과정은

(1) 림부의 두께가 각각 다른 박육스트레이트 베벨기어(Straight Bevel Gear)의 모델에 대해, 치근의 최악응력점에 있어서의 응력분포를 수치해석법에 의해 구하는 과정.

(2) 치근응력을, 후육중실치차의 치근응력과, 림부를 박판의 문제로써 치환한 경우의 표면응력으로 나누어 생각하여, 이 두 응력의 합을 과정(1)의 해석치와 비교하므로써 평가식을 유도하는 과정.

의 두 과정이다.

과정 (1)에서의 수치해석방법으로서는 3차원 경계요소법을 이용하며 이 수법에 영역분할법, 주밍(Zooming)법 등을 부가하여 계산과정의 간략화 및 계산시간의 절감을 도모하고 있다. 또한 과정(2)에 있어서의 중실치차의 응력해석 방법으로 일반적인 인정을 받고있는 會田 등의 평치차의 평가식을 이용하며, 림부의 응력은 재료역학의 박판의 문제로써 해석하고자 한다.

또한, 상술한 수치해석에 의한 응력분포의 해석결과를 실험모델에 의한 실측결과와 비교, 검토하여 3차원 경계요소법에 의한 전산프로그램의 타당성과 유효성을 입증하고자 한다.

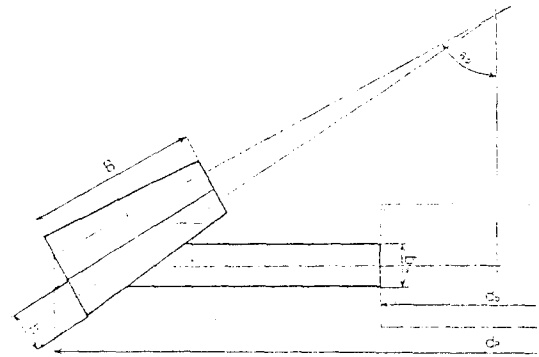
## 2. 치근응력 수치해석법의 개략

### 2.1 해석에 이용한 박육베벨치차의 제원과 해석조건

본 해석에서는 Fig.1과 같이, 림부 중앙에 원판상의 웨브가 있는 모델을 선택하였으며 웨브의 두께는 대단부의 모듈의 2배로 하였다. 림부는 이 높이의 변화에 비례하여 직선적으로

변화하는 형상을 채용하였다. Fig.1의 하부에 치면의 3차원구조의 데이터를 나타내었다. 또한, 본 연구에서는, 림두께는 3단계로 변화시켜 해석을 행하였다.

본 해석에는, Fig.2에 표시한 3종류의 하중 조건을 해석대상으로 고려하였으며, 하중은 수



Tooth profile	Involute
Module	5
Pressure angle	20°
Number of teeth	42

$\theta_p$	61°42'
B	40(mm)
$b_w$	10(mm)
$d_b$	60(mm)
$d_p$	211(mm)

Type	h
1	5(mm)
2	10(mm)
3	10(mm)

Fig. 1 Experiment Gear Model

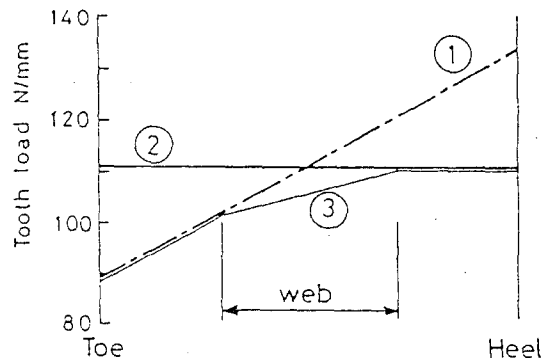


Fig. 2 3 Types of Load Condition

직으로 치선에 부하되고 있다. 해석대상물의 경계조건으로 인접한 치의 영향을 고려, 다섯개의 치의 림 및 웨브의 경계를 고정된 것으로 하였다.

2.2 3차원경계요소법에 의한 치면응력해석

3차원물체의 지배방정식을 변위에 관한 2개의 경계조건을 고려하여 가중치부가잔사 포시를 하면 최종적으로 다음의 적분방정식을 얻을 수 있다

$$\int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} u_k^* d\Omega = \int (p_k - p_k) u_k^* d\Gamma + \int (u_k - u_k) p_k^* d\Gamma \dots\dots\dots (1)$$

이 방정식의 기본해는 Kelvin의 해로 불리어지며 무한탄성공간내의 1점에 작용하는 단위집중력에 대응하는 변위 및 변위에 대응하는 표면력이다. 이 식을 경계면까지 확장하여 적용시키면 다음의 식과 같이 표시된다.

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \dots\dots\dots (2)$$

위 식에서  $c_i$ 는 표면의 형상에 의존하는 계수이다. 이 식에 유한요소법에서 일반화된 이산화수법을 행하면 최종적으로는 선형방정식을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 이산화에 이용한 요소는 7개의 절점을 가진 선형삼각형요소이다. 수치적분법으로서는 일반적인 적분점에서는 Gauss적분을, 소스점과 적분점이 일치하는 특이적분점에서는 Brebbi의 연구에 의한 특수계산법을 이용한다<sup>9)</sup>. 이와같은 과정을 지나 식(2)를 매트릭스 표시하면 다음과 같이 된다.

$$HU = GP \quad AX = B \dots\dots\dots (3)$$

경계요소법이 유한요소법에 대해 유리한 제일의 이점은 요소수의 감소에 있으나, 본연구와 같은 선형삼각형요소의 경우 상당한 요소의 수가 필요하며 더욱이 유한요소법의 경우 강성매트릭스가 밴드화되지만 경계요소법에서는 강

성매트릭스의 전요소가 유효치를 가지게 되어 그 장점을 효과적으로 살릴수 없게된다. 그 대책으로서 본연구에서는 영역분할에 의한 강성매트릭스의 밴드화를 도모하고자 한다. 간단한 예로서 전영역을 2개의 영역으로 분할하는 경우에 대해 고찰한다.

두 영역의 내부경계를  $T_1$ 로 하여 각 영역에 대해 정식화를 행한다.

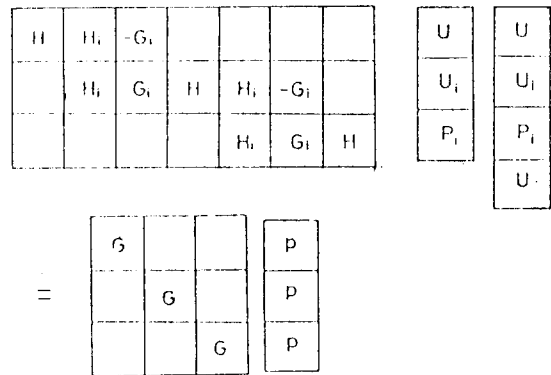
영역 (1)의 경우 다음식이 성립한다.

$$[H^1 \ H^1] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^1 \end{Bmatrix} = [G^1 \ G^1] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^1 \end{Bmatrix} \dots (4)$$

위 식에서,  $P^1$ 은 영역 (1)의 외부경계상에서의 변위 및 표면력이다. 또한 첨자 $i$ 는 내부경계  $T_1$ 에서의 각각의 값이다. 영역 (2)에 대해서도 위와 같은 식이 성립하게 된다. 적합조건식과 평형조건식은 다음과 같다.

$$U_i = U_i^1 = U_i^2 \\ P_i = P_i^1 = P_i^2 \dots\dots\dots (5)$$

윗식을 고려하여 영역 (1)에 대한 윗식들 및 영역 (2)에 대한 같은 형의 식을 치환하면 다음과 같은 방정식 표시가 된다.



위 식을 편의상 7개의 지역으로 넓혀 생각하면 강성매트릭스의 형은 Fig.3와 같이 밴드매트릭스로 되어 계산기의 용량을 절약할 수 있다.

이 수법은 재질이 다른 부분을 갖는 복합물체의 해석이나 모양이 기다란 물체의 해석에 특히 유용한 방법이다.

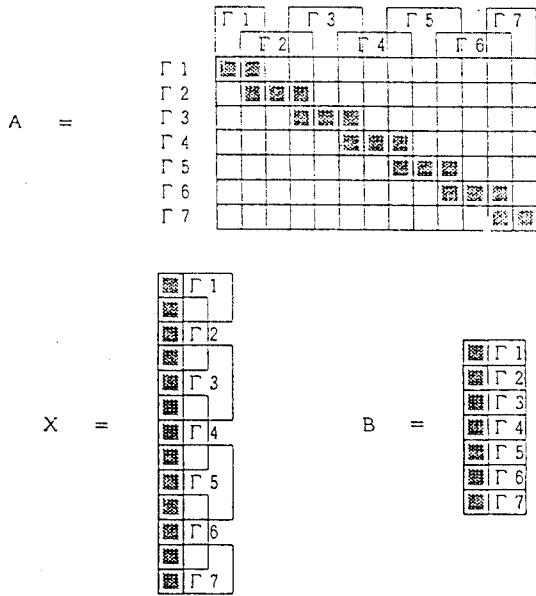


Fig. 3 Shape of Band Matrix

본 연구에서는 영역분할법에 부가하여 주밍법을 이용하여 보다 세밀한 요소의 분할을 행하고 있다. 세밀한 해석을 요하는 부분에 대해서는 처음의 해석에서 구한 경계조건을 이용하여 그 부분의 영역을 재분할 해석하는 수법으로서, 이 방법을 이용하므로써 특히 응력집중부만을 세밀하게 분할 해석하므로써 해석치의 정도와 계산코스트의 절감을 도모할 수 있다.

먼저, 본 해석은, 베벨치차의 표면을 삼각형 요소로 분할하는 것으로부터 시작된다. 모쪼, 압력각 및 치수에 의해 치차의 형상을 결정하고 이것을 기초로 하여 치차의 3차원 구조에 결정에 필요한 입력치를 입력시킴으로서 완전한 3차원 구조가 결정된다. 본 연구에 이용한 5중모델을 Fig. 4에 나타낸다.

이 모델의 1번과 5번의 치의 림 및 웨이브를 고정하고 Fig. 5와 같이 전체를 다섯 영역으로 하여 3개의 다른 하중조건을 부여한다.

먼저 하중을 받고 있는 세번째의 치의 림부의 변위를 해석하고 이것을 이용하여 한개의 치에 대한 해석에 들어 간다. 이 단계에서의

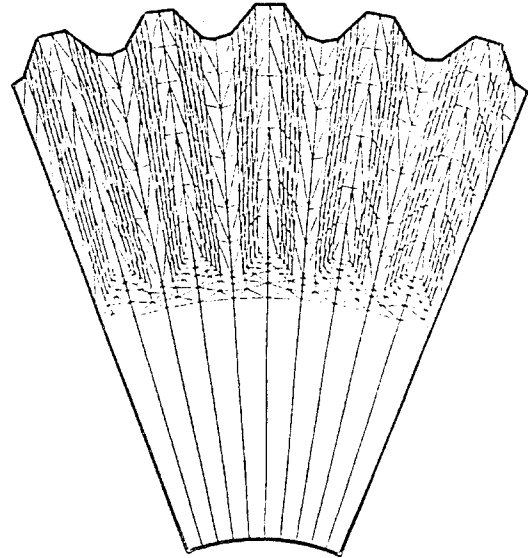


Fig. 4 5 Teeth Model

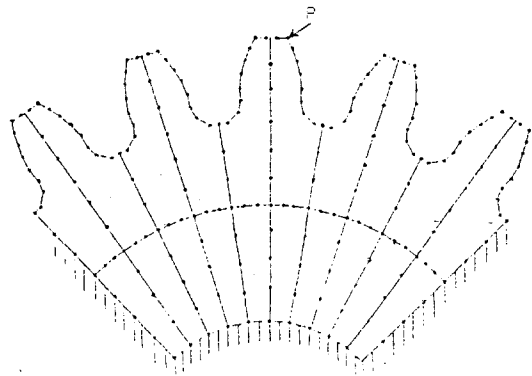
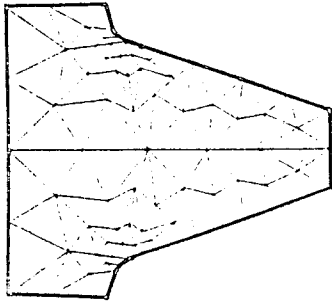


Fig. 5 Load Condition

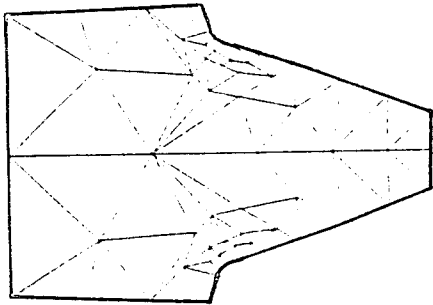
해석모델을 Fig. 6과 같이 한개의 치를 치폭방향으로 여섯영역으로 나눈 것으로 이것을 채용하여 영역분할법에 의한 해석을 행한다. 이때의 경계조건은 5치모델의 해석에서 구한 림부의 변위 및 필요한 하중으로 한다. 본 해석에서의 연립1차 방정식의 해법은, DISK I/O Gauss소거법을 사용하였으며 계산기 용량의 부족문제를 해결하기 위해 외부디스크를 이용하므로써 작은 계산기시스템에서도 해석이 가능하도록 하였다.

이상의 해석에서 구한 변위를 기초로 하여 이하의 방법에 의해 치근응력의 계산을 행하였다. 일반적인 응력과 변형율의 관계는 다음 식과 같다.

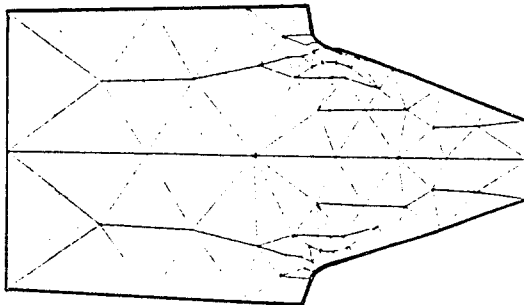
$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \dots \dots \dots (6)$$



(i)  $h/m=1$



(ii)  $h/m=2$



(iii)  $h/m=3$

Fig. 6 1 Teeth Model

여기에서,  $\{\sigma\}$ 와  $\{\varepsilon\}$ 은 여섯개의 요소를 가진 열매트릭스이며,  $\sigma_1$ 은 면에 수직인 응력을 나타내고 표면에 있어서의 값은 0이 된다.  $\varepsilon_2$  및  $\varepsilon_3$ 은 각각, 치폭방향 및 이높이 방향의 변형율을 나타내며 이 값들은 해석결과로부터 구해진다. 본 해석에 필요로 하는 응력은 치폭방향 및 이 높이방향의 응력으로서 뒷식에 의해  $\sigma_2, \sigma_3$ 를 구하게 된다.

### 2.3 중실치차의 치근응력과 박판림의 굽힘응력의 합에 의한 치근응력의 계산법

치차의 굽힘강도의 계산식으로서는 Lewis의 식이 유명하지만 많은 연구자 등에 의해 개량되어 있으며, 특히 응력집중까지를 고려한 식으로서는 AGMA의 식 등이 있다. 그러나 베벨치차에 대한 응력계산식은 없으며, 따라서 여기서는 굽힘강도식으로서 會田의 식을 이용한다<sup>8)</sup>. 이식은 2차원 탄성이론과 사상함수를 이용하여, 각종의 곡률반경을 가진 필렛(Fillet)부의 응력계산식을 세우고, 부하의 인장축 및 압축축의 응력을 구하는 방법이다. 계산식에 필요한 기본정수는 Fig. 7에서 나타나고 있다.

각 정수는 다음 식과 같다.  
압축의 경우 :

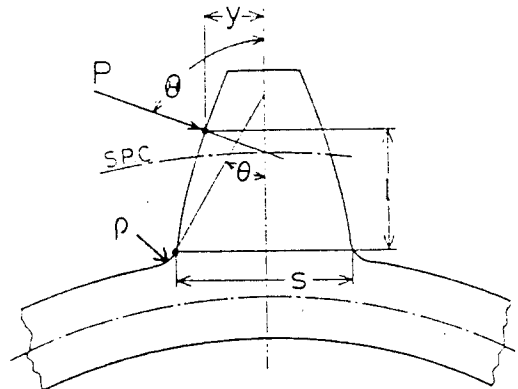


Fig. 7 Necessary Coefficient

$$l/s \geq 0.8$$

$$\sigma_{\phi_z} = -A \{ 0.66 \sigma_{nb1} + 0.40B + 1.40B + 1.40 \sigma_{nc1} - \sigma_{nb2} \} \dots \dots \dots (7)$$

$$0.2 \leq l/s < 0.8$$

$$\sigma_{\phi_z} = -A \{ 1.04 \sigma_{nb1} + 0.17B + 1.40 \sigma_{nb1} - \sigma_{nb2} \} \dots \dots \dots (8)$$

인장의 경우 :

$$\sigma_{\phi_z} = -A \{ 1.04 \sigma_{nb1} + 0.17B + 1.40 \sigma_{nc1} - \sigma_{nb2} \} \dots \dots \dots (9)$$

$$A = 1 + 0.08 S/\rho \quad B = \sigma_{nb1}^2 + 36 \tau_n^2 \dots (10)$$

로 주어지며 S는 위험단면의 폭으로, Dietrich의 위험단면각도  $\theta = 30^\circ$ 에서 Hofer작도방법에 의해 구한다. 계산식에서  $\sigma_1$ 은 굽힘하중에 의한 위험단면상의 공칭응력,  $\sigma_2$ 는 압축하중에 의한 공칭응력,  $\sigma_3$ 은 중심선과의 간격에 의한 굽힘응력  $\tau$ 는 전단응력을 나타내며, 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{nb1} = \frac{6P \sin \Theta \cdot 1}{S^2} \dots \dots \dots (11)$$

$$\sigma_{nc} = \left( 1 + \frac{6y}{S} \right) \frac{P \cos \Theta}{S} \dots \dots \dots (12)$$

$$\sigma_{nc1} = \frac{P \cos \Theta}{S} \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma_{nb2} = \frac{6P \cos \Theta \cdot y}{S^2} \dots \dots \dots (14)$$

$$\tau_n = \frac{P \sin \Theta}{S} \dots \dots \dots (15)$$

이하에서는, 림부의 변형에 의해 발생하는 응력에 관해 논하고자 한다. 치면의 부하점에 치면법선방향의 하중이 작용할 경우 림부의 중심에는 세 종류의 부하가 동시에 작용하고 있는 것으로 판단되며, 본 해석에서는 이 세 종류의 부하에 대해 각각 대응하는 응력을 해석한다

1) 림부의 모선 주위의 모멘트에 의한 응력은 림부의 부하선 주위의 모멘트를 M이라 할 경우 Fig. 8과 같이 부하가 반의 모멘트부하가 작용하고 있는 것으로 판단하여 림뚜게를 H라 할 경우, 이때의 응력은

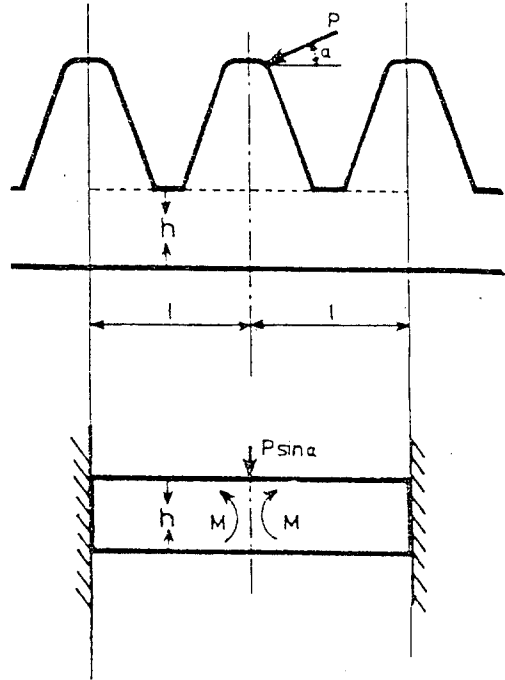


Fig. 8 Rim with Normal Load

$$\sigma_r \phi = \pm \frac{t \phi}{2} \cdot \frac{6}{h^2 \cdot 1.0} \dots \dots \dots (16)$$

2)  $P_2$ 를 원주방향 하중이라 하면, 림의 원주방향하중에 의한 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{r2} = \pm \frac{P_2}{2} \cdot \frac{1}{h \cdot 1.0} \dots \dots \dots (17)$$

3) 림의 법선방향하중이  $P \cos \alpha$ 이므로 이 하중이 Fig. 8과 같이 작용하고 있을 경우, 림의 법선방향하중에 의한 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{r3} = \frac{3Pl \cos \alpha}{2h^2}$$

$$l = \pi m \cdot \frac{2\pi \cos \theta_p}{z} \left( zm + \frac{h}{2} \right) \dots \dots \dots (18)$$

3. 齒根應力の 수치해석결과와 고찰

3차원경계요소법에 의한 응력의 수치해석을 위해 최종적으로 분할한 치단면 및 내부의 요소분할상태를 Fig. 9에 나타낸다. 치면상의 분할상태는 Fig. 6과 같다.

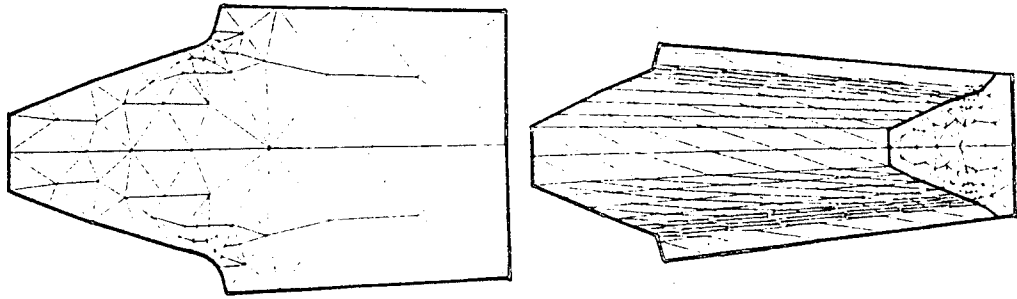


Fig. 9 Mesh Condition of Tooth

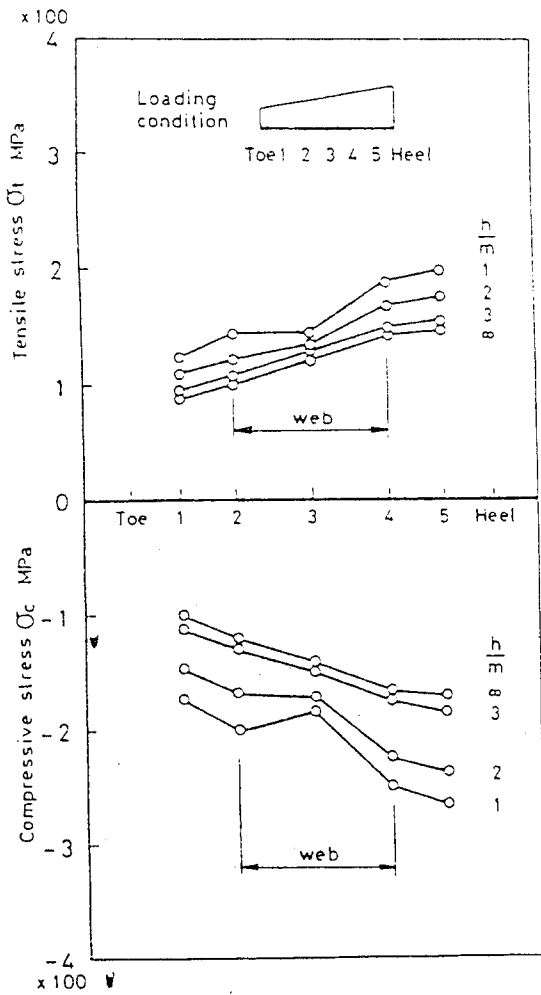


Fig. 10 Analysed Tooth Fillet Stress (Load Condition 1)

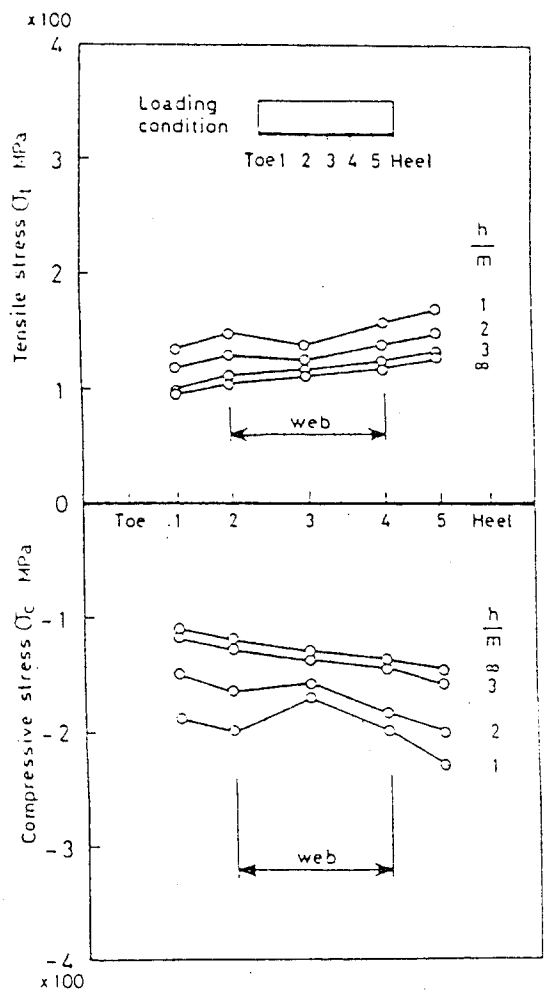


Fig. 11 Analysed Tooth Fillet Stress (Load Condition 2)

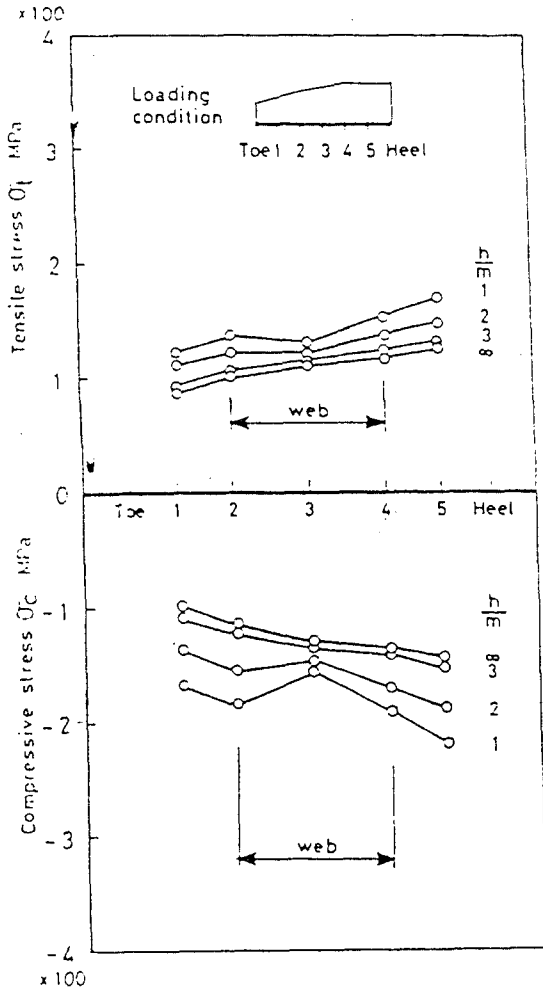


Fig. 12 Analysed Tooth Fillet Stress (Load Condition 3)

림의 두께  $h$ 와 모출  $m$ 의 상대비  $h/m$ 의 값이 1, 2, 3의 세 경우의 각각에 대해 최악응력점 주위를 2회 국소재분할하여 계산을 행하였으며, 또한 하중조건으로서는 치폭방향으로 하중이 일정한 경우, 소단부에서 대단부로 선형으로 변화하는 경우, 및 소단부에서 중앙까지는 선형으로 그 이후는 일정한 세 경우의 하중조건을 부여하였다.

Fig. 10, 11, 12는 3차원 경계요소법의 해석에 의해 구한 변위의 값으로부터 최악응력점에

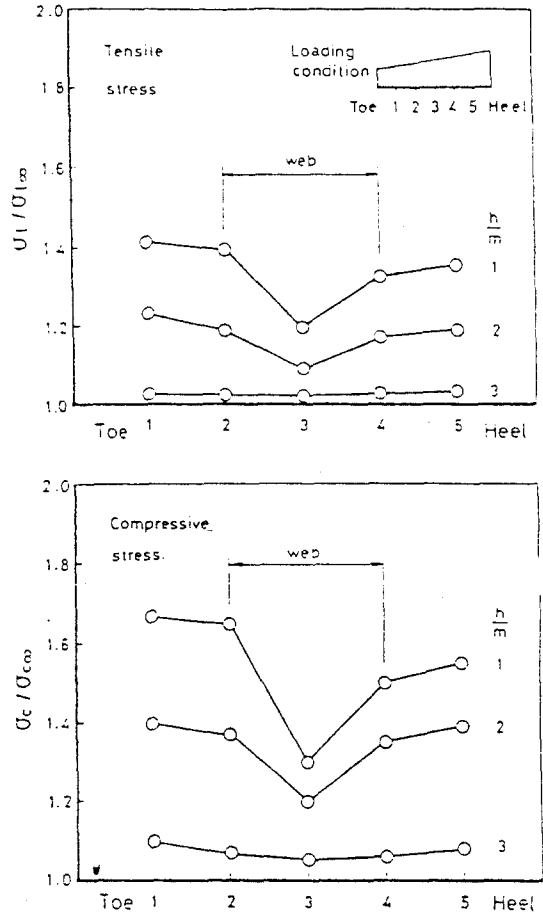


Fig. 13 Ratio of Stress (Load Cond.4)

있어서의 이높이 방향의 응력을 인장축 및 압축축의 각각의 경우에 대해 나타낸 해석결과이다.

그림에서  $h/m = \infty$ 는 림부를 고정한 모델의 경우이며, 박육화하기 전의 중실치차의 응력으로 판단할 수 있다. 이상의 그림으로부터 다음의 결과를 알 수 있다.

- 1) 박육화에 의해 응력을 증가한다.
- 2) 소단부로부터 대단부로 응력은 증가한다.
- 3) 웨브가 붙어 있는 중앙부의 응력은 작다.

1)의 결과는 림부의 굽힘응력이 증가함으로 발생하는 당연한 결과이며 이것이 박육화의 문제



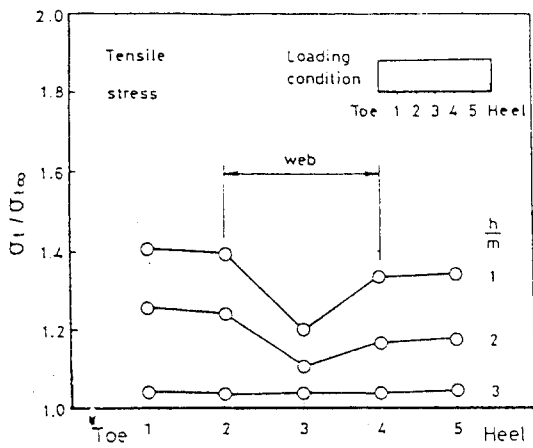


Fig. 14 Ratio of Stress (Load Cond.5)

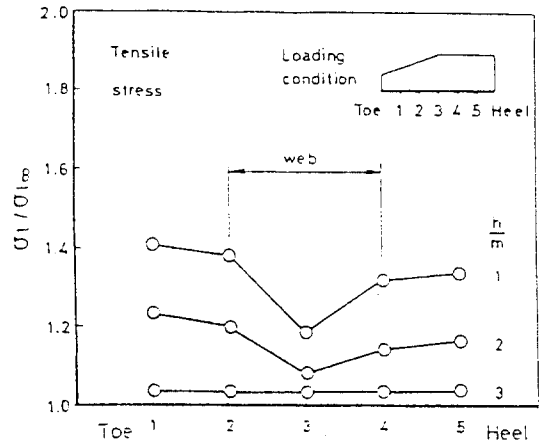
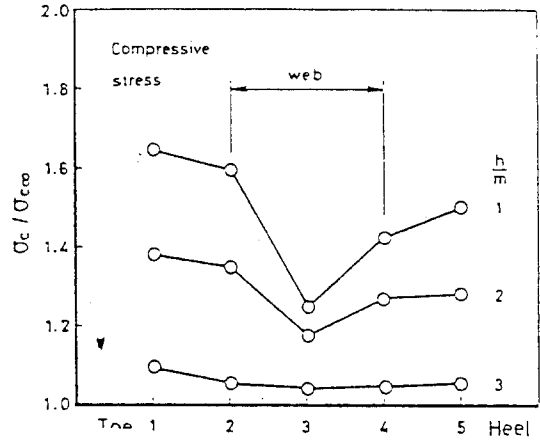
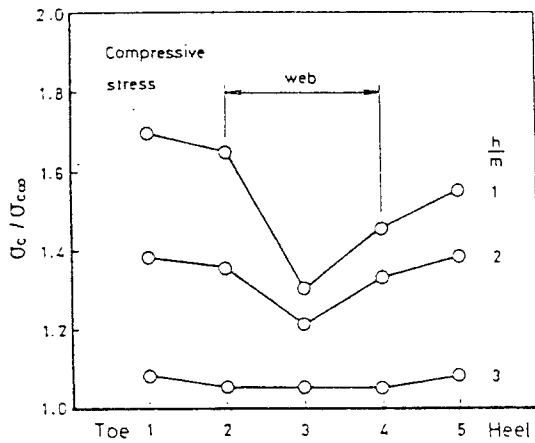


Fig. 15 Ratio of Stress (Load Cond.6)



점이다. 그림 13, 14, 15에 중실치차의 응력을 1로 할 경우의 박육화에 따른 응력의 비를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 압축축이 인장축보다 빨리 증가한다.

2)의 결과도 웨브가 있는 중앙부에서는 림의 굽힘응력이 감소한 당연한 결과로 판단된다.

박육베벨치차의 설계시 매번 3차원 경계요소법을 이용하여 최악점의 응력을 계산하는 것은 막대한 계산을 필요로 하게되어 설계비용의 관점에서는 거의 불가능하다고 볼 수 있다. 따라서 이 절에서는 박육치차의 응력을 중실치차의 응력과 림부분의 응력의 합으로서 대응 계산될 수 있는가를 검토한다.

그림 16에  $h/m=1$ 의 박육베벨치차의 하중조건 1의 경우 경계요소법에 의한 응력과, 會田 등에 의한 중실치차의 응력<sup>8)</sup> 및 림부분의 응력의 합을 인장축 및 압축축의 쌍방에 대해 비교한 결과를 나타낸다. 중실치차의 응력은 평치차의 경우이며 베벨치차의 경우에는 상당평치차에 대해 적용한 값이다.

소단부에서는 차이가 크지만 내단부에서는 잘 일치되고 있음을 볼 수 있다.

경계요법의 해석결과로 부터는 웨브가 붙어 있는 치폭중앙부분의 응력감소가 인정되지만 그림 16의  $\sigma_r + \sigma_z$ 에서는 이 경향이 나타나지 않고 있다. 치폭중앙부에서의 응력감소는 佐山

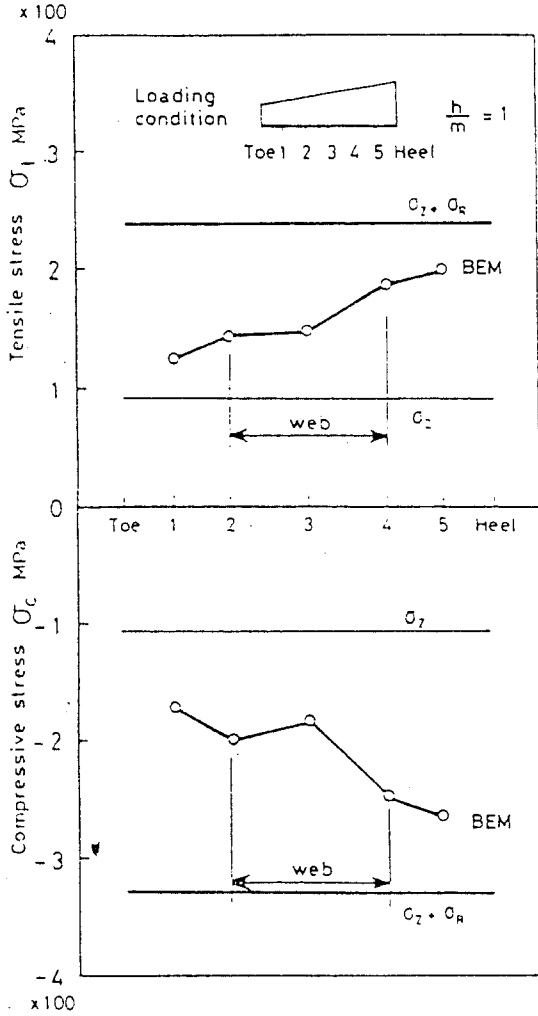


Fig. 16 Stress Analysed by B.E.M, of Spur Gear, and of Rim

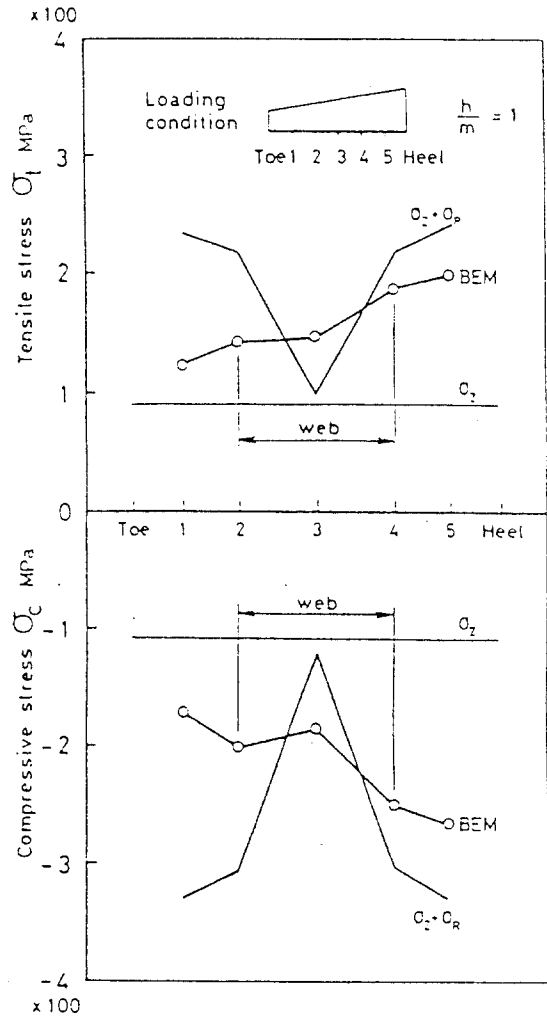


Fig. 17 Stress Analysed by B.E.M, of Spur Gear, and of Rim

등의 연구에 의한, 모선 주위의 모멘트  $t\phi$ 를 받는 외지지의 박육원통의 응력분포를 고려하면 설명이 가능할 것이다.

$$\sigma_r \phi = \pm \frac{t\phi}{h^2} \left( S_D \phi_M + \frac{h}{2H} \right) \dots\dots\dots (19)$$

위식에서 H는 하중작용점으로부터 림중심선까지의 반경방향거리이다. 그림14의 림부분응력  $\sigma_r$  대신 림부분의 응력으로서 위식의 결과를 이용한 그림이 그림17이다. 소단부에서는

여전히 차이가 크게 나타나고 있으며 그 이유는 중실치차의 응력으로서 상당평치차의 계산식을 이용한 점과 원추형의 림부분에 대해 원통형의 림부분계산식을 이용한 결과로 보며 앞으로 각각의 상기 문제점의 해결방안이 모색되면 해결될 수 있을 것으로 판단되고, 그 결과 비교적 간단한 두 식의 계산결과와 함으로부터 박육화베벨치차 등의 응력계산이 간이하게 계산되어 설계에 이용할 수 있을 것으로 생각된다. 또한 그 전이라도 최대응력이 작용되고 있

는 대단부에서는 응력이 잘 일치하고 있으므로 박육베벨치차의 설계시 최악점의 응력을 중실 평치와 림부분의 응력의 합으로 대응할 수 있다.

#### 4. 결 론

박육베벨치차의 설계시 기초적 설계자료를 얻기위한 방법으로, 림부분의 뚜께가 치의 높이에 비례하여 직선적으로 변화하는 박육베벨치차에 대해 저자가 개발한 3차원경계요소법에 의한 응력해석 프로그램에 의한 해석을 하였다.

또한 그 해석 결과를 중실상당평치차의 응력과 림부분의 발생응력의 값과 비교, 검토하였다. 그결과 경계요소법에 의한 응력해석 결과는 소단부를 제외한 부분에서는 비교적 잘 일치하고 있다고 판단되며 설계시 본 전산프로그램이나 혹은 간이계산식에 의해 해석이 가능할 것으로 판단된다.

본 전산프로그램의 타당성은 저자 등의 논문에서 이미 확인된바 있으므로 타의 기계요소 혹은 기계구조의 설계계산에도 이용할 수 있으며 확장하여 정탄성문제 뿐만이 아니라 탄소성의 해석문제까지 가능할 것이다.

#### 參考文獻

- 1) 薄肉りム齒車の齒元應力に関する研究 (第1報)  
鈴木 他3名, 日機論(C), 47-422(1981), 1366
- 2) 前掲文 第2報  
鈴木 他3名, 12機論(C), 48-432(1982), 1217.
- 3) 前論文 第3報  
鈴木 他3名, 日機論(C), 49-438(1983), 209
- 4) 有限要素法による薄肉平齒車の齒元應力解析  
小田 他2名, 日機論(C)46-411(1980), 1432
- 5) 薄肉平齒車の曲げ強度特性に関する基礎的研究  
新井 外2名, 日機論(C) 47-413(1981), 47
- 6) 薄肉すぐばかさ齒車の設計に関する基礎的研究, 張志演 外4名 日機論 第22回 SYMP-OSIUM論文集, 805-3
- 7) 薄肉すぐばかさ齒車の設計に関する基礎的研究  
張志演 外4名, 日機論(C), 50-493(1987)
- 8) 平齒車の曲げ應力について,  
會田, 日機論, 27-178(1971) 868
- 9) Some numerical integration fomulate over triangles and squares with l/r singularity, C.A Brebbia et al, Appl. Math. Modeling5, 209-211(1981)