◉ 硏究論文

可變構造系에 대한 스윗칭 超平面 設定의 한 方法

오세준* · 김상봉** · 하주식*

Construction Method of Switching Hyperplane for Variable Structure Systems

S.J. Oh*, S.B. Kim**, J.S. Ha*

Abstract

A construction method of a switching hyperplane for the Variable Structure Systems, which have robustness for parameter variations and noises in sliding mode is presented. The problem of composing a switching hyperplane is considered as a special case of the pole assignment for a closed-loop system.

It is shown that the condition for constructing arbitrarily a switching hyperplane matrix C is equivalent to the controllability of the pair matrix(A,B) for the system, and then an algorithm of obtaining the switching hyperplane is proposed. It is also proved that zeros of the system are invariable in the sliding mode, and the stability for the system dynamics is equivalent to the stability of PA | *ker* C.

The applicability of the method proposed in the paper is shown by the simulation results for an example system.

Ⅰ. 서 론

制御對象의 파래미터變動, 非線型性 要素 및 雜音등에 對해 不感特性을 갖는 制御系를 얻기 위한 하나의 方法으로 可變構造制御가 있다.[1,2,3)]

Sliding Mode는 狀態空間內에 設定된 超平面상에 존재하며, 超平面의 兩側에서 制御入力을 切換함으로써 狀態 軌跡이 超平面상으로 移動하여 Sliding Mode를 일으켜 파래미터의 변동이나 외란의 영향을 거의 받지 않으며 安定하게 되는 制御系를 可變構造System(Variable Structure Systems : VSS)이라 한다. 高速 스윗칭 裝置나 高速計算機등의 發達에 따라 强靭

* 정회원, 한국해양대학
** 정회원, 부산수산대학교

性을 가진 가변구조제어는 robot의 制御, 蒸氣 터어빈의 過速度保護制御, 電力系의 負荷周波數制御 등에 應用되고 있다.[4,5,6]

Sliding 狀態에서는 system dynamic가 parameter 變動이나, 雜音등에는 影響을 받지 않고 단지 스윗칭 超平面을 구성하는 parameter C_i에만 依存하므로, 一般的인 VSS의 設計에 있어 重要한 問題의 하나로 sliding 狀態가 바람직한 特性을 갖도록 하는 스윗칭 超平面行列C를 構成하는 것이다.[7,8,9]

本 論文에서는 스윗칭 超平面의 構成 問題를 閉loop系의 極 配置 問題의 特別한 경우로서 다룰 수 있다는 것을 보인 후, 바람직한 sliding 狀態特性을 부여하도록 하려면 plant의 零點의 위치를 충분히 고려한 閉loop系의 極, 즉, sliding 狀態에서의 system dynamic에 대한 極 設定을 행하여야 할 必要性에 대해 밝힌다. 그리고 C를 임의로 設定할 수 있도록 하는 條件은 주어진 system 행렬의 쌍(A, B)가 可制御인 것과 等價인 것을 分明히 한후, 그 超平面行列을 얻는 하나의 algorithm을 提案한다. sliding 狀態에 있어서 system의 零點은 不變이고, system dynamics가 安定하게 되는 것은 *ker* C에 대해서 制限 PA | *ker* C가 安定하다는 것과 等價인 것을 보인다.

2. Sliding Mode에서의 system 特性

Sliding 狀態에서의 性質을 考察하기 위해 다음과 같은 定係數線型 system Σ(A,B,C)를 생각한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2-1}$$

$$s = Cx \tag{2-2}$$

여기서 A, B, C는 각각 nxn, nxm, mxn 定數行列이고, x는 n次元 狀態 vector, u는 m次元 入力vector, s는 m次元 超平面 vector이다.

단,

$$\text{rank } B = m, \ \det(CB) \neq 0 \tag{2-3}$$

로 假定한다.

狀態 feed back 則

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ | \\ | \\ u_m \end{pmatrix} = Fx \tag{2-4}$$

는

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x), & s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x), & s_i(x) < 0 \end{cases} \tag{2-5}$$

가 되도록 切換한다.

여기서 u_i는 u의 i번째 成分이고 $s_i(x)$는 m-스윗칭 超平面 s(x)=Cx의 i번째의 成分이다. 스윗칭초평면에서 이상적인 sliding 운동이 일어나도록 하는 條件은 $s_i(x)=0$ 近方에서

$$\lim_{s_i \to 0^+} \dot{s}_i < 0, \quad \lim_{s_i \to 0^-} \dot{s}_i > 0 \tag{2-6}$$

를 滿足해야 한다.

System Σ(A,B,C)에 대해 正則인 定數行列 T에 依한 正則變換

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t) \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \tag{2-7}$$

를 생각한다.

但, T의 (n-m)행은 다음식이 만족되도록 선정된다.

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2-8}$$

式(2-7)과 같은 正則變換에 의해 얻어진 狀態變數 $\bar{x}$는

$\Sigma'(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ s = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \tag{2-9}$$

을 滿足한다. 여기서 $\det \bar{B}_2 \neq 0$이고

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n-m \\ m \end{array}, \tag{2-10}$$

$\bar{C}=CT=[\bar{C}_1 \ \ \bar{C}_2]$

이다. 그래서 det(CB)≠0의 假定으로 부터 $\det(\bar{C}_2\bar{B}_2)\neq 0$이다.

System Σ′(A,B,C)가 Sliding 狀態에 있을때 s(x)=0,s(x)=0를 滿足하므로 Feedback 則

$$u_{eq}=-(\bar{C}_2\bar{B}_2)^{-1}[(\bar{C}_1\bar{A}_{11}+\bar{C}_2\bar{A}_{21})\bar{x}_1 + (\bar{C}_1\bar{A}_{12}+\bar{C}_2\bar{A}_{22})\bar{x}_2] \qquad (2\text{-}11)$$

가 얻어진다. 式(2-11)과 s=0의 關係式으로 부터 (2-9)式은 m-狀態가 相殺된 다음과 같은 n-m 狀態方程式으로 表示된다.

$$\dot{\bar{x}}_1=(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}\bar{C}_2^{-1}\bar{C}_1)\bar{x}_1 \qquad (2\text{-}12)$$

sliding 狀態의 system dynamics(2-12)는 parameter C_i에 直接 依存하고 있다는 것을 알 수 있다.

이로 부터 可變構造 system의 設計 時 考慮되어야 할 問題는 먼저 바람직한 sliding狀態를 얻기 위해 parameter C_i를 選定한 후, 超平面 s=0의 모든 점에서 sliding 狀態의 存在를 保障하는 不連續的인 制御則을 얻는 것이다.

【性質 1】

System Σ(A,B,C)의 零點은 sliding 狀態하에서 變하지 않는다.

(증명) : System Σ(A,B,C)의 零點은 다음과 같이 表示된다.

$$\det\begin{pmatrix} sI-A & -B \\ C & 0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & 0\end{pmatrix}$$
$$=\det(sI-\bar{A}) \ \det\{\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}\}$$
$$=\det(sI-\bar{A}_{11}) \ \det\{\bar{C}_2+\bar{C}_1(sI-\bar{A}_{11})^{-1}\bar{A}_{12}\} \det(\bar{B}_2)$$
$$=\det(sI-\bar{A}_{11}+\bar{A}_{12}\bar{C}_2^{-1}\bar{C}_1) \ \det(\bar{C}_2\bar{B}_2) \qquad (2\text{-}13)$$

Sliding 狀態에서의 system dynamics는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}=\{I-B(CB)^{-1}C\}Ax \qquad (2\text{-}14)$$

이때 그 영점은 正則變換 T를 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\det\begin{pmatrix} sI-\{I-B(CB)^{-1}C\}A & -B \\ C & 0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} sI-\{I-\bar{B}(\bar{C}\bar{B})^{-1}\bar{C}\}\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & 0\end{pmatrix}$$
$$=\det\{sI-\{I-\bar{B}(\bar{C}\bar{B})^{-1}\bar{C}\}\bar{A} \ \det[\bar{C}\{sI-(I-\bar{B}(\bar{C}\bar{B})^{-1}\bar{C})\bar{A}\}^{-1}\bar{B}]$$
$$=\det(sI-\bar{A}_{11}) \ \det\{\bar{C}_1(sI-\bar{A}_{11})^{-1}\bar{A}_{12}+\bar{C}_2\} \det(\bar{B}_2) \qquad (2\text{-}15)$$
$$=\det\{sI-\bar{A}_{11}+\bar{A}_{12}\bar{C}_2^{-1}\bar{C}_1\} \ \det(\bar{C}_2\bar{B}_2)$$

式(2-13)과 式(2-15)로 부터 system 零點은 sliding 狀態하에서도 변하지 않으며, sliding 狀態 system dynamics 式(2-12)의 固有値와 system의 零點은 같다는 것을 알 수 있다. sliding 狀態는 狀態 feedback에 의해 일어나므로 零點은 座標變換 및 狀態 feedback에 의해 不變이라는 것과 一致한다.

또한 sliding 狀態에 있어서 system dynamics의 安定性은 設定된 parameter C_i에 직접 관련하고 있으므로 安定한 零點의 設定이 중요하다는 것을 알 수 있다.

【性質 2】

Sliding 狀態의 system dynamics가 安定하게 되는것은 *ker* C에 對應하는 PA의 制限 PA | *ker* C가 安定하다는 것과 等價이다.

즉 sliding 狀態에서 system dynamics가 安定하다고 하는것은 system Σ(A,B,C)가 不安定한 零點을 갖지 않는다는 것을 의미한다.

(증명) : System Σ(A,B,C)가 安定한 零點을 가지고 있다고 하면, 이때 $s\in C_+$(復素平面의 右半平面)에 對해 system行列의 行列式이

$$\det(sI-A) \ \det C(sI-A)^{-1} B\neq 0 \qquad (2\text{-}15)$$

을 滿足하는 것은 明白하다.

det(CB)≠0의 假定으로 부터

$$\ker C\cap Im\ B=\Phi,\ Im\ B\oplus \ker C=\mathbf{x} \qquad (2\text{-}16)$$

를 얻는다.

(2-14)式에서 $B(CB)^{-1}C$는 *ker* C에 따라서 B의 Range 空間으로 射影되고 그래서

$$P = I - B(CB)^{-1}C \qquad (2\text{-}17)$$

은 *Im* B에 따라서 *Ker* C에로 射影된다.

x를 狀態空間 이라하고 A : **x**→**x**가 線型寫像이고 γ^*를 *Ker* C에 포함된 最大의 A-不變 部分空間이라고 하면 狀態空間 **x**의 *Ker* C에의 射影된 P는 그 像에 對한 制限이 identity 寫像, 즉, $Im\ P = \gamma^* \subset Ker\ C$이므로 **x**의 部分공간 *Ker* C는 PA에 關해 不變이고 商空間 **x** | *Ker* C상에서의 PA에 의해 誘導된 商寫像이 0으로 되는 것은 明白하다.

즉,

$$\det(sI-PA) = det\begin{pmatrix} sI_{n-m}-PA \mid Ker\ C & -(PA)_{12} \\ 0 & sI_m \mid \mathbf{x}/\ Ker\ C \end{pmatrix}$$
$$= s^m\ det(sI_{n-m}-PA \mid Ker\ C) \qquad (2\text{-}18)$$

와 같이 쓸수 있다.

다음으로

$$\begin{cases} \det(I_n + MN) = \det(I_m + NM) \\ A(sI-A)^{-1} = s(sI-A)^{-1} - I \end{cases} \qquad (2\text{-}19)$$

의 關係式을 使用하여 (2-18)式은

$$\det(sI-PA) = \det\{sI-(I-B(CB)^{-1}\ C)A\}$$
$$= \det(sI-A)\ \det\{I + (sI-A)^{-1}\ B(CB)^{-1}CA\}$$
$$= s^m \det(sI-A)\ \det\{C\ (sI-A)^{-1}\ B\}\ \det(CB)^{-1} \qquad (2\text{-}20)$$

(2-18)式과 (2-20)式에 의해서 system Σ (A, B,C)가 不安定한 零點을 갖지 않는것은 *Ker* C에 대해 制限 PA | *Ker* C가 安定한 것과 同一하다는 것을 알 수 있다.

3. 스윗칭 超平面 行列 C의 構成

3.1 1入力 시스템일 경우 C 構成

다음과 같은 可制御인 1入力 system을 생각한다.

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x \in R^n,\ u \in R^1 \qquad (3\text{-}1)$$

設定해야 할 sliding 狀態 超平面을

$$s = C^T x,\ s \in R^1 \qquad (3\text{-}2)$$

이라 한다.

system(3-1)의 特性方程式을

$$\phi(s) = \det(sI-A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + \alpha_0 = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

이라 하자.

system 方程式의 係數行列로 부터 定義된 多項式行列, 즉 system行列은

$$P(s) = \begin{pmatrix} sI-A & -b \\ C^T & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}4)$$

로 된다.

$$\text{rank}\ P(s) < n+1 \qquad (3\text{-}5)$$

을 滿足하는 複素數 s는

$$\det\ P(s) = \det\begin{pmatrix} sI-A & -b \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} sI-A & -b \\ C^T & C^T(sI-A)^{-1}b \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}6)$$
$$= \det\ (sI-A)\ C^T(sI-A)^{-1}b$$

의 根으로 부터 求해지고 system의 不變零點이라 일컫는다.

(3-6)式에 의해

$$\phi(s) \equiv \det(sI-A)\ C^T\ (sI-A)^{-1}b$$
$$= \gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + \gamma_0 \qquad (3\text{-}7)$$

인 C^T를 求하는 問題를 생각한다.

(3-7)式에 의해

$$\gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + \gamma_0$$
$$= C^T(\Gamma_{n-1}s^{n-1} + \Gamma_{n-2}s^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + \Gamma_0)b \qquad (3\text{-}8)$$

로 된다. 여기서

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\phi(s)}$$
$$(\Gamma_{n-1}s^{n-1} + \Gamma_{n-2}s^{n-2} + \cdots\cdots\cdots +$$

Γ_0) (3-9)

이고 Γ_i= Fadeev의 Algorithm에 의해서 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma_{n-1}=I$$
$$\Gamma_{n-2}=A+\alpha_{n-1}I$$
$$\Gamma_{n-3}=A^2+\alpha_{n-1}A+\alpha_{n-2}I$$
$$\Gamma_{n-4}=A_3+\alpha_{n-1}A^2+\alpha_{n-2}A+\alpha_{n-3}I$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma_0=A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+\alpha_1 I$$
$$\alpha_{n-1}=-tr(A\Gamma_{n-1})$$
$$\vdots$$
$$\alpha_0=-t_r(A\Gamma_0)/n$$

system(3-1)의 可制御行列을

$$V=[b\ \ Ab\cdots\cdots A^{n-1}b] \tag{3-10}$$

라 하면

$$[\Gamma_{n-1}b\cdots\cdots\Gamma_0 b]= V\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2}\cdots\cdots\alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1}\cdots\cdots\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

와 같은 關係를 얻는다.

system(3-1)이 可制御라는 條件으로부터 V는 正則이다.

(3-11)식을 利用하여 (3-8)式의 兩邊의 s에 關한 係數를 比較하면

$$[\gamma_{n-1}\ \ \gamma_{n-2}\cdots\cdots\cdots\gamma_0]=C^T[\Gamma_{n-1}b\cdots\cdots\cdots\Gamma_0 b]$$

로 되고

$$C^T=[\gamma_{n-1}\ \ \gamma_{n-2}\cdots\cdots\gamma_0]\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2}\cdots\cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1}\cdots\cdots & \alpha_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} V^{-1} \tag{3-12}$$

를 얻는다. 즉 C^T를 얻기위한 條件은 V가 正則, 즉 주어진 system의 行列의 雙(A, B)가 可制御이어야 하는 것이 明白하다.

3-2. 多入力 system일 경우 行列 C의 構成

制御對象은 可制御이고 式(2-1)과 같은 시스템에 대해 定해야 할 sliding 狀態 超平面으로써 (2-2)式을 생각한다.

【정리 3.1】

스윗칭 礁平面 行列 C를 바람직한 sliding 狀態가 되도록 選定하기 위한 必要充分條件은 주어진 system의 行列의 쌍(A, B)가 可制御性을 만족해야 한다.

(증명) : SystemΣ (A,B,C)와 그것에 等價한 system$\Sigma'(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$가 같은 零點을 갖는 다고 하는 것은 T에 대한 가정으로 부터 明白하다.

이러한 關係에 있는 Σ(A,B,C)에 대한 零點 設定은 $\Sigma'(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$의 $\bar{C}$=CT에 의한 零點 設定과 같다. 이것을 이용해서 完全可制御가 임의의 零點 設定, 즉 바람직한 C를 선정하는 必要條件이라는 것을 먼저 보이도록 한다.

System의 行列의 쌍(A,B)가 可制御이지 않을 경우는 다음과 같은 等價한 쌍$(\bar{A},\bar{B})$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix},\ \bar{B}=\begin{pmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

가 존재한다.

$\bar{C}=[\bar{C}_1\quad \bar{C}_2]$라 하면

$$\det\{\bar{P}(s)\}=\det\begin{pmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\det\ (sI-\bar{A})\ \det[\bar{C}_1(sI-\bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c]$$

$$=\det(sI-\bar{A}_{22})\det[\bar{C}_1\, adj(sI-\bar{A}_c)\,\bar{B}_c] \quad (3\text{-}13)$$

가 된다. 式(3-12)로 부터 $\det(sI-\bar{A}_{22})$는 C의 설정에 의해 변화하지 않으므로 sliding 零點이 변화하기 위한 必要條件은 system이 완전히 可制御이어야 한다는 것을 알 수 있다.

다음으로 充分條件의 證明은 임의로 주어진 零點의 多項式을 갖도록 $\Sigma(A,B,C)$의 행렬 C를 구함으로써 행한다.

$$B=[b_1\ b_2\ \cdots\cdots\ b_m]$$

로 되고

$$\{b_1\ b_2\ \cdots\cdots\ b_m\ Ab_1\ Ab_2\ \cdots\cdots\ Ab_m\ A^2b_1\ \cdots\cdots\} \quad (3\text{-}14)$$

과 같은 集合으로 부터 서로 線型 獨立한 벡터를 이용하여 다음과 같은 행렬을 얻는다.

$$\varsigma=\{b_1\ b_2\ \cdots\cdots b_m\ Ab_1\ \cdots\cdots\} \quad (3\text{-}15)$$

$$S_g=[b_1\ Ab_1\ \cdots\cdots\ A^{\sigma_1-1}b_1\ b_2\ \cdots\cdots\ A^{\sigma_m-1}b_m] \quad (3\text{-}16)$$

단, σ_i는

$\sigma_i=\max\{j \mid A^{j-1}\ b_i\in\varsigma\}$로 주어지는 Kronecker 不變量이다.

行列 S_g는 雙(A,B)가 可制御 이므로 正則이고, 逆行列 L는

$$L=S_g^{-1}=\begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ l\rho_m^T \end{pmatrix}$$

으로 주어진다.

$l\rho_i^T$를 이용하여 正則行列・T^{-1}를 다음과 같이 구성한다.

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} l\rho_1^T \\ l\rho_1^T A \\ l\rho_1^T A^{\rho_1-1} \\ l\rho_2^T \\ \vdots \\ l\rho_m^T A^{\rho_m-1} \end{pmatrix}$$

이로 부터 다음과 같은 Luenberger의 可制御正準型을 얻을 수 있다.[17] 여기서 C_i는 임의로 정한다.

$$\bar{A}=T^{-1}AT$$
$$\bar{B}=T^{-1}B$$
$$\bar{C}=CT=[\bar{C}_1\cdots\cdots\vdots\cdots\bar{C}_m]$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots\cdots & \bar{A}_{1m} \\ \bar{A}_{21} & \cdots\cdots & \bar{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_{m1} & \cdots\cdots\ \cdots & \bar{A}_{mm} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_{ii}=\begin{pmatrix} 0\cdots\cdots\ \cdots\ I\ \sigma_{i-1} \\ 0 \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_i\rho_{i-1}\cdots-\alpha_i\rho_{i-1} \end{pmatrix}$$

$i\neq j$일때

$$\bar{A}_{ij}=\begin{pmatrix} 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ -\alpha_i\rho_{j-1}\cdots\cdots\ -\alpha_i\rho_{j-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_{ij}\in R^{\sigma i\cdot\sigma i}(i=1,\ \cdots\cdots m)$$
$$\bar{A}_{ij}\in R^{\sigma i\cdot\sigma j}(j=1,\ \cdots\cdots m)$$

$$\rho_i=\sum_{j=1}^{i}\sigma_j, \qquad \rho_0=0$$

$$\bar{B}=\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{B}_m \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_i=\begin{pmatrix} 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \\ 0\cdots\cdots 1\ \beta_{ii}\cdots\beta_{i(m-1)} \end{pmatrix}$$

다음으로 Falb-Wolowich의 構造定理에 의해 system $\Sigma'(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$의 전달함수는

$\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\ \bar{B}=\bar{C}\ S_g(s)\delta_c^{-1}(s)\hat{B}_m$

으로 주어진다. 단,

$$\delta(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & \\ S & 0 & & 0 \\ | & & & | \\ S^{\sigma_1-1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ | & S & & \\ | & S^{\sigma_2-1} & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ | & | & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & S^{\sigma_m-1} \end{pmatrix}$$

$$\delta_c(s)=\begin{pmatrix} s^{\sigma_1} & & 0 \\ & s^{\sigma_2} & \\ 0 & & s^{\sigma_m} \end{pmatrix} -\hat{A}_m\ S_g(s)$$

$$\hat{A}_m=\begin{pmatrix} -\alpha_{10}\cdots\cdots\cdots\alpha_{1(n-1)} \\ \\ -\alpha_{m0}\cdots\cdots\cdots\alpha_{m(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_m=\begin{pmatrix} 1 & \beta_{11} & \cdots\cdots\beta_{1(m-1)} & \\ 0 & & | & \\ | & & & \\ | & & \beta_{(m-1)(m-1)} & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

System $\Sigma'(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$의 多項式 行列의 行列式은

$$det\ \bar{P}(s)=det\begin{pmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{pmatrix}$$
$$=det(sI-\bar{A})\ det(\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\ \bar{B}) \qquad (3\text{-}17)$$

로 된다.

構造定理를 利用하면

$$\det(sI-\bar{A})\ \det(\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B})=\det(sI-\bar{A})$$
$$det\ \bar{C}S_g(s)\,\delta_c^{-1}(s)\,\hat{B}_m$$

로 된다.

여기서 $\det\ \hat{B}_m=1$이고 $\det(sI-\bar{A})=\det\ \delta_c(s)$이므로 이 式은

$$\det(sI-\bar{A})\ det\{\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}\}=\det\ \bar{C}\ S_g(s)$$

로 求해진다.

$\bar{C}$는 任意의 값이므로 다음과 같이 생각한다.

$$\det\ \bar{C}S_g(s)=det$$

$$\begin{pmatrix} C_{10}\cdots C_1\sigma_{1-1}\ 0\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots\cdots 0\cdots\cdots C_{20}\cdots C_2\sigma_{2-1}\ 0\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\ C_{m0}\cdots C_m\sigma_{m-1} \end{pmatrix} S_g(s)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}(C_{i0}+C_{i1}s\cdots\cdots+C_i\sigma_{i-1}s^{\sigma_i-1})$$

주어진 零點의 多項式이

$$\det(sI-\bar{A})\ det(\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\ \bar{B})$$
$$=\gamma_{n-m}s^{n-m}+\gamma_{n-m-1}s^{n-m-1}+\cdots\cdots+\gamma_0$$
$$=\prod_{i=1}^{m}[C_{i0}+C_{i1}s+\cdots\cdots+C_i\sigma_{i-1}s^{\sigma_i-1}]$$

로 된다.

따라서 求하고자 하는 C는

$$C=\bar{C}T^{-1}=\begin{pmatrix} C_{10}\ C_{11}\ \cdots\cdots & C\sigma_{1-1}\cdots\cdots\cdots\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 0\ C_{20}\cdots\cdots C\sigma_{2-1} \\ 0\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots C_{m0}\cdots\cdots C_m\sigma_{m-1} \end{pmatrix} T^{-1} \qquad (3\text{-}18)$$

와 같이 구해진다.

4. 例 題

다음과 같은 system을 생각한다.

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}u \qquad (4\text{-}1)$$

$$[b_1,b_2,Ab_1,Ab_2,\cdots\cdots]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2\cdots \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}2)$$

로 되고, b_1,b_2,Ab_1,Ab_2가 順序대로 線型獨立이고, $\sigma_1=\sigma_2=2$이면

$$H=[b_1, Ab_1, b_2, Ab_2]=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad (4\text{-}3)$$

로 된다.

단, (4-1) 式에서 B가

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (4\text{-}4)$$

로 된다고 하면

$$[b_1, b_2, Ab_1, Ab_2, A^2b_1, A^2b_2\cdots\cdots]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 2 & 18 & -14\cdots\\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdots\end{pmatrix} \quad (4\text{-}5)$$

로 되고 순서대로 b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2가 선형독립이 되고, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=3$이면 $H=[b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2]$로 되지 않으면 않된다. 그런데 식 (4-3)에 대하여는 $\rho_1=2$, $\rho_2=4$ 이면

$$L=H^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow h_1=(0\ 1\ 0\ 0)\\ \\ \rightarrow h_2=(0\ 0\ 01\ 0)\\ \\ \end{array}$$

(4-6)

로 되는데

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_1A\\ \cdots\cdots\\ h_2\\ h_2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix} \quad (4\text{-}7)$$

$$T=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad (4\text{-}8)$$

로 된다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\bar{A}=T^{-1}A\ T=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 0 & 0\\ -10 & -7 & 4 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -5 & -5\end{array}\right)$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ \cdots & \cdots\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad (4\text{-}9)$$

단, 本例는 $b_{12}=0$의 特別한 境遇이다. 特性方程式은

$$det\begin{pmatrix}s^2+7s+10 & -s-4\\ -s-2 & s^2+5s+5\end{pmatrix}$$

$$=s^4+12s^3+49s^2+79s+42=0$$

로 되고 $\bar{A}$의 고유치는 약 -1.09, -2.0, -3.71, -5.20 이 된다.

Kronecker 不變量은 $\sigma_1=2$, $\sigma_2=2$ 이므로

$$S_g(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & 0\\ 0 & 1\\ 0 & s\end{pmatrix} \quad (4\text{-}10)$$

로 된다.

system $\Sigma'(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$의 多項式 行列의 行列式은

$$det(sI-\bar{A})\,det\{\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}\}=det\ \ \bar{C}\ \ S_g(s)$$

이므로 주어진 시스템의 영점은 다항식은

$$(s+6)(s+7)=s^2+13s+42$$

으로 되어

$$\begin{aligned} det\ \bar{C}\ S_g(s) &= \pi_{i=1}^{2}(c_{i1}+c_{i2}s)\\ &=(c_{11}+c_{12}s)(c_{21}+c_{22}s)\\ &=s^2+13s+42\end{aligned}$$

의 관계식에서 $c_{22}=1$로 하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\bar{C}=\begin{pmatrix}6&1&0&0\\0&0&7&1\end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&0&6&1\end{pmatrix}$$

$$C=\bar{C}T^{-1}=\begin{pmatrix}6&1&0&0\\0&0&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-3&1&0\\0&0&1&0\\0&1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&1&4&1\end{pmatrix} \qquad (4\text{-}11)$$

위에서 구한 C를 이용하여 다음과 같은 feedback 則에 의해 system (4-1)을 시뮬레이션한 결과는 그림(4-1)과 같다.

Sliding mode가 존재하기 위한 조건으로부터

$s^T \dot{s}<0$

$s_i^T \dot{s}_i<0, \quad i=1,2,$

$\dot{s}_1=(-1+f_{11})x_1+(-6+f_{12})x_2+f_{13}x_3+(1+f_{14})x_4$

$\dot{s}_2=(1+f_{21})x_1+(1+f_{22})x_2+(-10+f_{23})x_3+(2+f_{24})x_4$

1) $s_1 \dot{s}_1 < 0$

$$f_{11}=\begin{cases}-1.5 & \text{if } s_1x_1>0\\ 1.5 & \text{if } s_1x_1<0\end{cases}$$

$$f_{12}=\begin{cases}-6.5 & \text{if } s_1x_2>0\\ 6.5 & \text{if } s_1x_2<0\end{cases}$$

$$f_{13}=\begin{cases}-0.5 & \text{if } s_1x_3>0\\ 1.5 & \text{if } s_1x_3<0\end{cases}$$

$$f_{14}=\begin{cases}-1.5 & \text{if } s_1x_4>0\\ 1.5 & \text{if } s_1x_4<0\end{cases}$$

2) $s_2 \dot{s}_2 < 0$

$$f_{21}=\begin{cases}-1.5 & \text{if } s_2x_1>0\\ 1.5 & \text{if } s_2x_1<0\end{cases}$$

$$f_{22}=\begin{cases}-1.5 & \text{if } s_2x_2>0\\ 1.5 & \text{if } s_2x_2<0\end{cases}$$

$$f_{23}=\begin{cases}-11 & \text{if } s_2x_3>0\\ 11 & \text{if } s_2x_3<0\end{cases}$$

$$f_{24}=\begin{cases}-3 & \text{if } s_2x_4>0\\ 3 & \text{if } s_2x_4<0\end{cases}$$

단 s는 스윗칭 超平面벡터 s=Cx이고 F는 다음과 같이 주어지는 feedback 행열을 의미한다.

$$F=\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}&f_{14}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}&f_{24}\end{pmatrix}$$

5. 결 론

본 論文에서는 system dynamics가 parameter 變動이나, 雜音등에 강인성을 가진 可變構造系의 스윗칭 超平面을 構成하는 하나

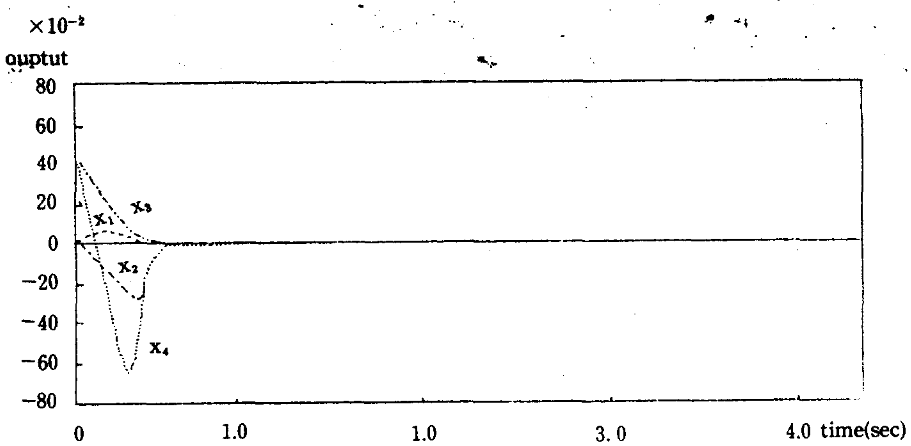

Fig.4-1 Simulation Result.
State Variables for(4-1)

의 방법을 제안했다.

스윗칭 超平面의 構成은 閉loop系의 極 配置 問題의 特別한 경우로서 다루었으며, 바람직한 sliding 狀態特性을 부여하도록 零點의 위치를 고려한 閉loop系의 極, 즉, sliding 狀態에서의 system dynamics에 대한 極 設定을 행하여야 할 必要性에 대해 밝혔다. 또 C를 임의로 設定할 수 있도록 하는 條件은 주어진 system 行列의 쌍(A, B)가 可制御인 것과 等價인 것을 分明히 하고, 그 超平面行列을 얻는 하나의 algorithm을 보였다. sliding 狀態에 있어서 system의 零點은 不變이고, system dynamics가 安定하게 되는 것은 *ker* C에 대해서 制限 PA | *ker* C가 安定하다는 것과 等價인 것을 밝히고 예제를 통해 본 방법의 有用性을 立證했다.

参考文獻

1) V.I. Buyakas, "Optimal Control Systems with Variable Structure", Translated from Automatika Telemekhanika, Vol.27, No.4, 1966.
2) B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems", Automatika, Vol.5, Pergammon press, 1969, UK.
3) E.J. Davision, "The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Timeinvariant Multivariable Systems", IEEE Trans.on Automatic Control, AC-21, No.1, 1976.
4) J.J. Slotine and S.S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators", Int, J., Control, Vol.37, No.2, 1983.
5) B.H. Krogh, "Feedback Control of Overloaded Networks", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-29, No.8, 1984.
6) A.Y. Sivaramakrishnam, M.V. Hariharm and M.C. Sriaillam, "Design of Variable-Structure Local Frequency Controller using Pole Assignment Technique", Int, J., Control, Vol. 40, No.3, 1984.
7) V.I. Utkin, "Equations of the Shipping Regime in Dis-continuous Systems", Translated from Automatika : Telemekhanika, No.12, 1971.
8) V.I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes", IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, No.2, April 1977.
9) K.D. Young, "Controller Design for a Manipulation using Theory of Variable Structure Systems", IEEE Trans., System, Man, and cybernatics, Vol.SMC-8, No.2, 1978.
10) El-Ghezawi, O.M.E et al, "Variable Structure Systems Design", Int, J., Control, Vol.36, 1982.
11) K.D. Young and H.G. Kwanty, "Variable structure Servomechanism Design and Application to Overspeed Protections Control", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.18, No.4, 1982.
12) 박민호, 김경서, 이홍희, "슬라이딩 모우드를 이용한 유도전동기의 위치제어에 관한 연구", 대한전기학회지, 39-1-7, 1989.
13) S.B. Kim and K. Furuta, "Regulator Design with poles in a Specified Region", Int, J. Control, Vol.47, No.7, 1988.
14) K. Fruta and S.B. Kim, "Pole Assignment in a Specified Disc, IEEE Trans. Automatic Control, AC-32, No.5, 1987.
15) 古田 勝久, 佐野昭, "基礎 システム 理論", コロナ社, 1978.
16) R.D. Kupta and F.W. Fairman, "Luenberger's Canonical Form Revisited", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-22, 1977.
17) W.M. Wonham, "Linear Multivariable Control : A Geometric Approach", Second Ed. Springer-Varlag.
18) B.C. Kuo, "Automatic Control Systems", 5th Ed. Prentice-hall, Inc. Englrwood Cliffs,
19) V.I. Utkin, "Variable Structure Systems : Present and Future", Plenum Publishing Corporation, 1984, Moscow. Translated from Avtomatika i Telemekhanika, No.9, 1983.