◉ 硏究論文

動的 有限要素法에 의한 보의 비틀림 自由 振動解析

梁保錫* · 呂雲東**

On a Finite Dynamic Element Method for Free Torsional Vibration of the Beam

B. S. Yang and W. D. Yeo

Abstract

The traditional finite element method applied to dynamic problems employs shape functions which are based on a static displacement assumption. The more exact approach uses frequency-dependent shape functions and frequency-dependent mass and stiffness matrices. Such matrices are developed for a torsional vibration of shaft element. Numerical examples are presented for a cantilever beam.

I. 서　론

유한요소법에서 연속탄성계의 한 요소 내의 변위장(displacement field) **u**는 요소의 절점 변위 **U**와

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}\mathbf{U}$$

의 관계를 갖는다. 여기서 **a**는 형상함수(shape function)로서 정하중의 경우에는 절점 좌표의 함수로 쉽게 나타낼 수 있으나, 동적인 문제에서는 변위가 절점변위의 직전시간력(time history)에 의존되므로 일의적으로 표현할 수 없다. 그러나 계가 조화운동을 하는 경우는 절점변위의 순시치와 조화운동의 진동수 ω의 함수로 나타낼 수 있다[1]. 즉,

$$\mathbf{u}(x, t)=\mathbf{a}(x, \omega)\mathbf{U}(t)$$

로 되고, 형상함수 **a**가 진동수의 함수이므로 자유진동을 하는 계의 엄밀한 질량 및 강성행렬은 진동수 종속의 행렬이 된다.

$$\mathbf{a}(x, \omega)=\mathbf{a}_0(x)+\omega\mathbf{a}_1(x)+\omega^2\mathbf{a}_2(x)+\cdots$$
$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_0+\omega\mathbf{M}_1+\omega^2\mathbf{M}_2+\cdots$$
$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_0+\omega\mathbf{K}_1+\omega^2\mathbf{K}_2+\cdots$$

여기서, $\mathbf{M}_0$와 $\mathbf{K}_0$는 정적 질량 및 강성행렬이고, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ⋯ $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$⋯등은 동적 수정을 나타내는 행렬들이다. 종래의 유한요소법에서는 단지 정적변위의 가정에 의한 형상함수 $\mathbf{a}_0(x)$를 이용하였으므로 $\mathbf{M}_0$ 및 $\mathbf{K}_0$만을 유도할 수 있었다. 그러므로 고유치해석의 경우 엄밀

* 정회원, 부산수산대학교 박용기계공학과

** 정회원, 여수수산대학 기관학과

해와 많은 오차가 발생하였다. 본 연구에서는 비틀림 진동계의 진동수 종속 행렬을 유도하고, 이 결과를 이용하여 수치계산을 하여 본방법의 유용함을 종래의 유한요소법의 결과와 비교하여 확인하였다.

2. 질량 및 강성행렬의 유도

원형단면의 축요소(Fig. 1)의 비틀림 진동을 나타내는 미분방정식은

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 $c^2 = G/\rho$, G는 축재료의 횡탄성계수, ρ는 축재료의 단위 체적당의 밀도를 나타낸다.

식(1)의 해를 다음과 같이 진동수 ω의 급수로 전개된다고 가정한다.

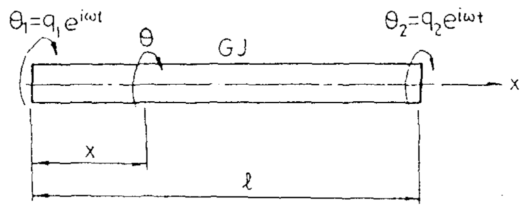


Fig. 1 Shaft element

$$\begin{aligned}\theta &= (\mathbf{a}_0 + \omega \mathbf{a}_1 + \omega^2 \mathbf{a}_2 + \cdots)\boldsymbol{\psi} \\ &= \mathbf{a}\mathbf{q}e^{i\omega t} \\ &= (\sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \mathbf{a}_r)\mathbf{q}e^{i\omega t}\end{aligned} \qquad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi} &= \{\psi_1 \ \ \psi_2\} \\ &= \{q_1 \ \ q_2\}e^{i\omega t}\end{aligned}$$

이다.

식(2)를 식(1)의 운동방정식에 대입하면

$$c^2(\sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \mathbf{a}''_r)\mathbf{q}e^{i\omega t} - \omega^2(\sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \mathbf{a}_r)\mathbf{q}e^{i\omega t} = 0 \qquad (3)$$

로 된다.

식(3)에서 ω의 차수를 동일한 항으로 분리하여 정리하면

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}_0}{\partial x^2} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}_1}{\partial x^2} = 0 \qquad (5)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{a}_2}{\partial x^2} = -\mathbf{a}_0 \qquad (6)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{a}_3}{\partial x^2} = -\mathbf{a}_1 \qquad (7)$$

....

로 나타낼 수 있다. 이들 식은 직접 적분함으로써 쉽게 계산할 수 있다.

식(4)의 $\mathbf{a}_0$는 관성항을 무시한 종래의 유한요소법에서 이용된 정적형상함수(static shape function)로서 다음의 경계조건을 만족해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}&x = 0, \ \ \theta = \theta_1 \\ &x = l, \ \ \theta = \theta_2\end{aligned} \qquad (8)$$

식(8)을 함수 $\mathbf{a}_0$에 관한 경계조건으로 다시 표현하면

$$\begin{aligned}&a_{01}(0) = 1, \ \ a_{01}(l) = 0 \\ &a_{02}(0) = 0, \ \ a_{02}(l) = 1\end{aligned} \qquad (9)$$

이 얻어진다. 단,

$$\mathbf{a}_0 = \{a_{01} \ \ a_{02}\}$$

이다.

그러므로 식(4)를 적분한 후 식(9)의 경계조건을 대입하면 다음의 해가 얻어진다.

$$\mathbf{a}_0 = \{1-\eta \ \ \eta\} \qquad (10)$$

단, $\eta = x/l$이다.

식(5)에서 식(7)까지의 계산의 경우에는 $x=0$와 $x=l$에서 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 및 $\mathbf{a}_3$가 영이 되어야 하는 경계조건을 사용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{a}_1 = 0 \qquad (11)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\rho l^2}{6G}\{(2\eta - 3\eta^2 + \eta^3)\ (\eta - \eta^3)\} \qquad (12)$$

$$\mathbf{a}_3 = 0 \qquad (13)$$

....

요소 질량 및 강성매트리스 $\mathbf{m}, \mathbf{k}$는 다음과 같이 형상함수 $\mathbf{a}_i (i=1, 2, \cdots)$에 의해 나타낼 수 있다[2].

$$\mathbf{m} = \int_0^l \mathbf{a}^T \rho I_p \mathbf{a} \ dx \tag{14}$$

$$\mathbf{k} = \int_0^l \mathbf{a}'^T G I_p \mathbf{a}' \ dx \tag{15}$$

여기서, I_p는 축단면적의 극관성 모우멘트이고, $(\ \ )'$는 x에 관한 미분을 나타낸다.

그러므로 식(10)~(13)을 식(14)와 (15)에 각각 대입하면 다음과 같은 주파수 종속 질량 및 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \omega^2 \mathbf{m}_2 + \cdots \tag{16}$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \omega^4 \mathbf{k}_4 + \cdots \tag{17}$$

여기서,

$$\mathbf{m}_0 = \frac{\rho I_p l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}_2 = \frac{2\rho^2 I_p l^3}{45G} \begin{pmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_0 = \frac{G I_p}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = -\frac{\rho^2 I_p l^3}{45G} \begin{pmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix}$$

이다.

식(16)과 (17)에서 $\mathbf{m}_0$ 및 $\mathbf{k}_0$행렬은 정적변위에 따른 종래의 유한요소 질량 및 강성행렬과 일치하며, $\mathbf{m}_2$와 $\mathbf{k}_4$행렬은 본 연구에서 새로 유도된 1차 주파수 종속항을 나타내는 행렬이다.

3. 고유치 해석

비감쇠 자유진동의 운동방정식은 계의 요소 행렬을 이용하여 구성하면 다음과 같다.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{q} = 0 \tag{18}$$

식(16)과 식(17)을 식(18)에 대입하면

$$[\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0 - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_4) - \cdots] \mathbf{q} = 0 \tag{19}$$

로 된다.

실제 계산의 경우, ω^4이상의 항은 무시하여도 큰 오차가 없으므로 식(19)는 ω^2의 2차식으로 표시되는 고유치문제(quadratic eigenvalue problem)의 식으로 귀착된다[3]. 즉,

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B} - \omega^4 \mathbf{C}) \mathbf{q} = 0 \tag{20}$$

여기서

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_4$$

이다.

식(20)의 고유치의 해는 통상적으로 다음과 같이 다시 배열할 수 있다.

$$(\mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{Y} = 0 \tag{21}$$

여기서,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}$$

이다.

전 절점수를 n이라 하면 행렬 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$는 $2n \times 2n$이고, $\mathbf{D}$는 $4n \times 4n$의 행렬이 되어 고유치는 모두 4n개가 구해진다. 이는 정적변위함수(static displacement function)만을 고려한 종래의 유한요소법의 경우에 비해 차수가 2배로 증가한 것으로 계산시간과 용량의 증가가 요구된다.

4. 수치계산 결과

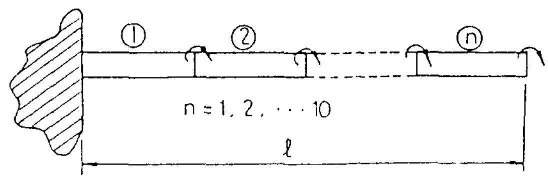
본 연구에서 제안한 방법의 유용성 즉, 고유치와 고유벡터의 정도 향상을 종래의 유한요소 행렬의 결과와 비교검토 하였다. 엄밀해와의 비교를 위해 일단고정, 타단자유의 외팔보를 이용하였다.

외팔보의 비틀림 고유진동에 대한 엄밀해는 다음과 같다[4].

$$\omega_i = \frac{\beta_i}{l} \left(\frac{G}{\rho} \right)^{1/2}$$

Table 1. Ratios of ω/ω_{ex} for torsional vibrations of a fixed-free shaft

n	Frequency Number									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	1.0015 (1.0259)	1.0687 (1.1946)								
3	1.0003 (1.0115)	1.0191 (1.1027)	1.0827 (1.2002)							
4	1.0000 (1.0064)	1.0067 (1.0583)	1.0405 (1.1535)	1.0829 (1.1915)						
5	1.0000 (1.0041)	1.0029 (1.0373)	1.0191 (1.1027)	1.0573 (1.1811)	1.0792 (1.1815)					
6	1.0000 (1.0029)	1.0015 (1.0259)	1.0099 (1.0719)	1.0323 (1.1365)	1.0687 (1.1946)	1.0746 (1.1728)				
7	1.0000 (1.0021)	1.0008 (1.0189)	1.0056 (1.0529)	1.0191 (1.1027)	1.0443 (1.1605)	1.0761 (1.2001)	1.0701 (1.1655)			
8	1.0000 (1.0016)	1.0005 (1.0145)	1.0034 (1.0405)	1.0118 (1.0792)	1.0286 (1.1279)	1.0544 (1.1769)	1.0804 (1.2014)	1.0660 (1.1594)		
9	1.0000 (1.0013)	1.0003 (1.0115)	1.0022 (1.0320)	1.0077 (1.0627)	1.0190 (1.1027)	1.0377 (1.1479)	1.0624 (1.1877)	1.0827 (1.2002)	1.0624 (1.1543)	
10	1.0000 (1.0010)	1.0002 (1.0093)	1.0015 (1.0259)	1.0052 (1.0508)	1.0131 (1.0837)	1.0265 (1.1228)	1.0459 (1.1633)	1.0687 (1.1946)	1.0836 (1.1978)	1.0593 (1.1500)



* Numbers in parenthesis represent values obtained from conventional analysis

단, $\beta_i=\frac{\pi}{2}(2i-1)$, i는 차수이다.

본 계산에 사용된 수치는 다음과 같다.

$E=3\times10^7\ N/cm^2,\quad v=0.3,\quad G=E/2(1+v)$

$\rho=0.724637\times10^{-3}kg/cm^3,\quad l=24cm$

식(21)에 의해 구해진 비틀림 고유진동수와 엄밀해와 비를 분할 요소수의 변화에 따라 Table 1.에 나타내었으며, 또한 종래의 유한요소 모델에 의한 결과도 괄호속에 각각 나타내었다.

이 표에서 알 수 있듯이 주파수 종속 행렬을 고려함으로써, 종래의 정적변위함수에 의한 유한요소법의 결과보다 계산정도가 현저하게 높아짐을 알 수 있다.

Fig. 2와 Fig. 3은 위의 경향을 나타내기 위해 요소 분할수에 대해 1차에서 4차까지의 고유진동수에 대한 퍼센트 오차(percentage error)를 비교한 것이다. 퍼센트 오차는 다음과 같이 정의한다.

$$Percentage\ error=\frac{\omega_{ex}-\omega}{\omega_{ex}}\times100(\%)$$

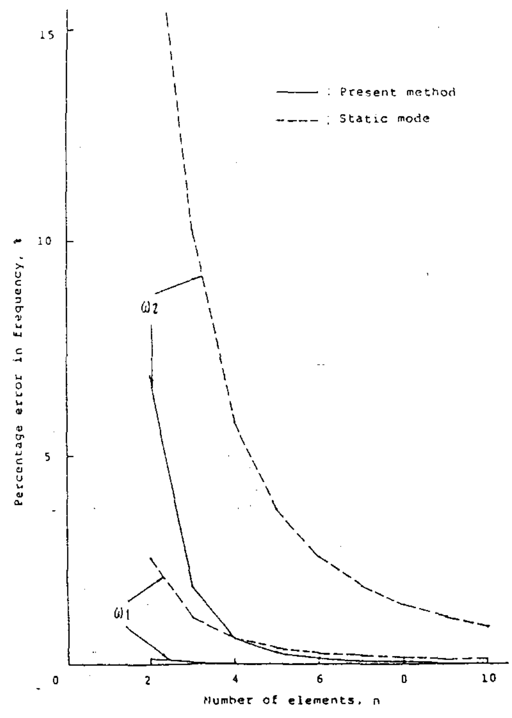


Fig. 2 Variations of percentage error in frequencies of a shaft

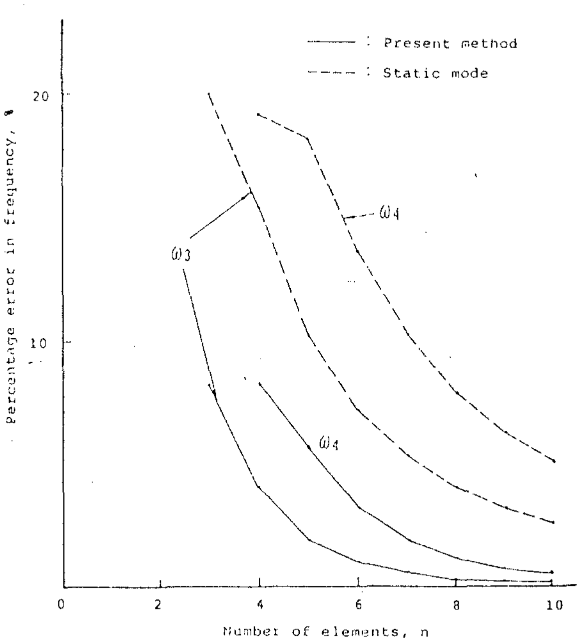


Fig. 3 Variations of percentage error in frequence of a shaft

여기서, ω_{ex}는 엄밀해이고, ω는 유한요소 모델에 의한 진동수이다. 그림에서 보면 본 방법에 의한 결과가 기존의 유한요소법에 의한 결과에 비해 엄밀해로의 수렴이 요소수의 증가에 따라 매우 빠르며 이는 저차 고유진동수에서 더욱 빠른 경향을 보이고 있다.

본 방법의 고유치 계산 차수가 기존의 방법에 비해 2배나 크므로, 이런 단점을 극복하기 위하여 요소수를 반으로 줄인 결과와 비교하여 보아도 본 방법의 오차가 매우 적음을 알 수 있다. 따라서 기존의 유한요소 모델에 본 연구에서 제안한 주파수 종속 행렬을 첨가함으로써 계의 비틀림 고유진동수를 보다 정확하고 경제적으로 구할 수 있을 것이다.

5. 결　　론

본 연구에서는 유한요소법의 계산정도를 향상시키기 위하여 종래의 정적 형상함수에 의한 질량 및 강성행렬에 관성항의 영향을 보정하기 위해 주파수 종속 행렬을 첨가하는 동적 유한요소법을 비틀림 진동계에 적용하였다. 본 방법의 유용성을 검토하기 위해서 일단고정, 타단자유의 축을 이용하여 엄밀해 및 기존의 방법에 의한 결과와 비교하였다. 현재 회전축, 평판, 쉘, 곡면보등의 기계요소에 관하여 본 방법을 응용중에 있으며 차후에 이들을 보고할 예정이다.

참고문헌

1) Przemieniecki, J. S., "Quadratic Matrix Equations for Determining Vibration Modes and Frequencies of Continuous Elastic Systems", Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, AFFDL TR 66-80, 1966.
2) Przemieniecki, J. S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1968.
3) Gupta, K. K., "Solution of Quadratic Matrix Equations for Free Vibration Analysis of structures", Int. J. for Num. Meth. Eng., Vol.6, pp.129-135, 1973.
4) Gorman, D. J., "Free Vibration Analysis of beams and shafts", John Wiley & Sons, New York.