

## 非對稱 荷重을 받고 非對稱 變位가 주어진 軸對稱 物體의 應力解析에 관한 研究

全孝重\* · 王之錫\* · 崔順烈\*\*

A Study on the Stress Analysis of Axi-symmetric Body with Non-symmetric Load and Non-symmetric Given Displacements

H.J. Jeon, J.S. Wang, S.Y. Choi

### Abstract

Stress analysis of axi-symmetric body with non-symmetric loading and non-symmetric given displacements is investigated in this paper using the finite element method. As the non-symmetric loads and non-symmetric given displacements of axi-symmetric body are generally periodic functions of angle  $\theta$ , the nodal forces and nodal displacements can be expanded in cosine and sine series, that is, Fourier series. Furthermore, using Euler's formula, the cosine and sine series can be converted into exponential series and it is proved that the related calculus become more clear.

Substituting the nodal displacements expanded in Fourier series into the strain components of cylindrical coordinates system, the element strains are expressed in series form and by the principal of virtual work, the element stiffness matrix and element load vector are obtained for each order.

It is also showed that if the non-symmetric loads are even or odd functions of angle  $\theta$ , the stiffness matrix and load vector of the system are composed with only real numbers and relatively small capacity of computer memory is enough for calculation.

### 1. 序 論

軸對稱 物體가 軸對稱 荷重을 받거나 軸對稱으로 變位가 주어질 때는 有限要素法으로 解析하기 比較的 쉽다. 그러나 軸對稱 物體가 非對

稱 荷重을 받거나 非對稱으로 變位가 주어질 때는 그 解析이 簡單하지가 않다. 물론 3次元 有限要素法에 의한 應力解析 프로그램을 利用하면 되는데 이때에는 節點의 數가 엄청나게 많아지고 따라서 全自由度가 커지기 때문에 實

\* 正會員, 韓國海洋大學

\*\* 正會員, 群山水產專門大學

用的인 解法이 될 수 없다. 그러므로 軸對稱 物體가 非對稱 荷重을 받거나 非對稱으로 變位가 주어지더라도, 有限要素法에 의한 보통의 軸對稱 問題 解析하는 境遇와 마찬가지로 軸心을 지나는 對稱斷面의 어느 한쪽만을 解析하여 應力과 變形率 分布나 變位の 分布를 비롯한 이 物體의 거동을 計算할 수 있으면 대단히 實用的인 일 것이다.

本 研究에서는 有限要素法에 의한 보통의 軸對稱 問題 解析하는 境遇와 마찬가지로 圓筒座標系  $r-\theta-z$ 를 使用하면, 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重과 要素의 節點變位들이 全部 周期  $2\pi$ 를 가지는  $\theta$ 의 周期函數들 이라는 데에 着眼하여 이들을 Fourier 級數로 展開함으로서 有限要素의 剛性行列과 荷重벡터를 구하는 定式化 過程을 提示하였다. Cosine 級數와 Sine 級數로 表示되는 Fourier 級數를 Euler의 公式를 使用함으로서 exponential 級數로 바꿀 수 있고 따라서 微分과 積分이 簡單해지면서 要素의 剛性行列도 쉽게 구하여 짐을 보였다. 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重이  $\theta$ 의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많은데 이때에는 要素의 剛性行列과 荷重벡터가 實數만으로도 이루어지도록 할 수 있고 따라서 더 작은 컴퓨터 記憶容量으로도 計算 할 수 있음도 보였다. 또한 軸對稱 物體에 非對稱 荷重이 作用하는 하나의 例와 軸對稱 物體에 非對稱으로 變位가 주어지는 또 하나의 例를 本 研究에서 提示한 解析方法에 따라 計算하여 보였다.

이로써 非對稱 荷重을 받는 軸對稱 物體의 應力과 變位를 解析할 수 있으므로 이의 設計에 活用할 수 있도록 하였다.

## 2. 函數의 Fourier 級數 展開

어떤 函數  $f$ 가  $2\pi$ 의 周期를 가지는  $\theta$ 의 周期函數라면 이 函數는 Fourier 級數로써 나타낼 수 있음은 잘 알려진 事實이다<sup>2)</sup>.

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \quad (1)$$

여기서  $a_m, b_m$ 은 Fourier 係數로서 다음과 같이 計算된다.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta, \quad m \neq 0 \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)은 다음과 같은 Euler의 公式를 써서 表示하면 더 簡潔하여 진다.

$$\begin{aligned} e^{im\theta} &= \cos m\theta + i \sin m\theta \\ e^{-im\theta} &= \cos m\theta - i \sin m\theta \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3)으로부터  $\cos m\theta$ 와  $\sin m\theta$ 를 구하여 式(1)에 代入하고 整理하면

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im\theta} \quad (4)$$

와 같이 된다. 여기서  $\alpha_m$ 은 複素數로서

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta \quad (5)$$

와 같이 計算된다. 式(5)로 表示된 係數가 複素 Fourier 係數로 實數부와 虛數부는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_e(\alpha_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta \\ I_m(\alpha_m) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

參考로 式(2)의 實數 Fourier 係數와의 關係는

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 \\ \alpha_m &= \frac{a_m}{2} - i \frac{b_m}{2}, \quad m \neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

과 같이 된다.

Fourier 級數를 式(5)와 같이 表示하면 여러 가지의 計算에 아주 便利하고 簡潔하여지는 利點이 있다.

만약 周期函數  $f(\theta)$ 가  $\theta$ 의 偶函數이거나 奇函數이면 Fourier 係數를 구할때 積分區間을

半周期만 잡으면 되고 Fourier Cosine 級數나 Fourier Sine 級數로만 나타낼 수 있음도 잘 알려진 事實이다. 즉  $f(\theta)$ 가 偶函數이면

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta \quad (8)$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta, \quad m \neq 0$$

과 같이 되고  $f(\theta)$ 가 奇函數이면 다음과 같이 된다.

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin m\theta$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \quad (9)$$

### 3. 軸對稱 物體의 有限要素 定式化

本節에서는 解析對象 物體가 軸對稱 形象을 하고 있으나 이 物體에 作用하는 荷重이 軸對稱이 아니고 境界條件으로 주어진 變位도 軸對稱이 아닌 境遇에 有限要素法으로 應力解析하는 定式化 過程을 誘導해 내고자 한다.

軸對稱 物體이므로 圓筒座標系  $r, \theta, z$ 를 利用하여 變形率과 應力을 나타내고자 한다.  $r$  方向,  $\theta$  方向,  $z$  方向의 變位를 各各  $u, v, w$ 라 하면 垂直變形率  $\epsilon$ , 剪斷變形率  $\gamma$ 는 各各 다음과 같다<sup>3)</sup>.

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (10)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

만약 軸對稱 荷重이 作用하고 境界條件도 軸對稱으로 주어진다면  $\theta$  方向의 變位는 一定하고 따라서 式(10)에서  $\theta$ 로 偏微分한 項들은 零이 되고 이 問題는 軸對稱 問題가 된다.

한편 應力과 變形率 사이의 關係는

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (11)$$

$$\text{여기서 } \{\sigma\} = [\sigma_r \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{r\theta} \ \tau_{\theta z} \ \tau_{zr}]^T$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_r \ \epsilon_\theta \ \epsilon_z \ \gamma_{r\theta} \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{zr}]^T$$

이며  $[C]$ 는 材料의 剛性行列이다.

軸對稱 問題의 境遇와 마찬가지로 Fig.1에 보이는 바와 같이  $r-z$  平面上的 三角形 斷面을 가진 要素에서 節點 1, 2, 3의  $r, z$  座標를 各各  $r_1, z_1, r_2, z_2, r_3, z_3$ 라 하면, 要素內 任意點  $(r, z)$ 의 變位  $u, v, w$ 를 線形形象 函數  $N_j$ 를 써서 節點變位로 나타낼 수 있다.

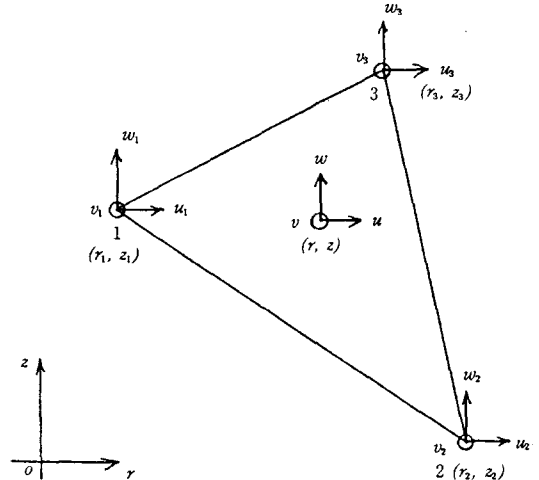


Fig 1. Nodal displacements of a element

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \quad (12)$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3$$

여기서  $u_j, v_j, w_j$ 는 各各 節點  $j$ 의  $r, \theta, z$  方向의 變位를 나타내고 ( $j=1, 2, 3$ )

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j r + c_j z), \quad j=1, 2, 3$$

$$a_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2, \quad a_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3, \quad a_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1,$$

$$b_1 = z_2 - z_3, \quad b_2 = z_3 - z_1, \quad b_3 = z_1 - z_2,$$

$$c_1 = r_3 - r_2, \quad c_2 = r_1 - r_3, \quad c_3 = r_2 - r_1$$

$$2\Delta = r_2 z_3 + r_1 z_2 + r_3 z_1 - r_2 z_1 - r_3 z_2 - r_1 z_3$$

이다.

節點變位  $u_j, v_j, w_j (j=1, 2, 3)$ 는 軸對稱 問題일 境遇에는 一定하지만 여기서는  $2\pi$ 의

周期를 가지는  $\theta$ 의 周期 函數가 된다. 따라서 이들을 各各 式(4)와 같이 Fourier 級數로 展開할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{jm} e^{im\theta} \\ v_j &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{jm} e^{im\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

$$w_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{jm} e^{im\theta}, \quad j=1, 2, 3$$

이 式을 다시 쓰면

$$\{q\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{q_m\} e^{im\theta} \quad (14)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{q\} &= [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3]^T \\ \{q_m\} &= [u_{1m} \ v_{1m} \ w_{1m} \ u_{2m} \ v_{2m} \ w_{2m} \ u_{3m} \ v_{3m} \ w_{3m}]^T \end{aligned}$$

이다.

式(13)을 式(12)에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (N_1 u_{1m} + N_2 u_{2m} + N_3 u_{3m}) e^{im\theta} \\ v &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (N_1 v_{1m} + N_2 v_{2m} + N_3 v_{3m}) e^{im\theta} \end{aligned} \quad (15)$$

$$w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (N_1 w_{1m} + N_2 w_{2m} + N_3 w_{3m}) e^{im\theta}$$

式(15)를 行列型式으로 表示하면

$$\begin{aligned} \{u\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [N] \{q_m\} e^{im\theta} \\ &= [N] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{q_m\} e^{im\theta} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $\{u\} = [u \ v \ w]^T$ ,

$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3]$  이고

$$N_j = \begin{pmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, 3$$

이다.

式(15)로 表示된 變位成分들을 式(10)에 代入하고  $\frac{\partial N_j}{\partial r} = \frac{b_j}{2\Delta}$ ,  $\frac{\partial N_j}{\partial z} = \frac{c_j}{2\Delta}$ ,  $j=1, 2, 3$  임을 注目하여 變形率 成分들을 구하고 이들을 行列 形式으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [B_m] \{q_m\} e^{im\theta} \quad (17)$$

여기서  $[B_m]$ 은

$$[B_m] = [B_{1m} \ B_{2m} \ B_{3m}],$$

$$B_{jm} = \begin{bmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & im \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ im \frac{N_j}{r} & \frac{b_j}{2\Delta} - \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & im \frac{N_j}{r} \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{bmatrix}$$

$j=1, 2, 3$

이다.

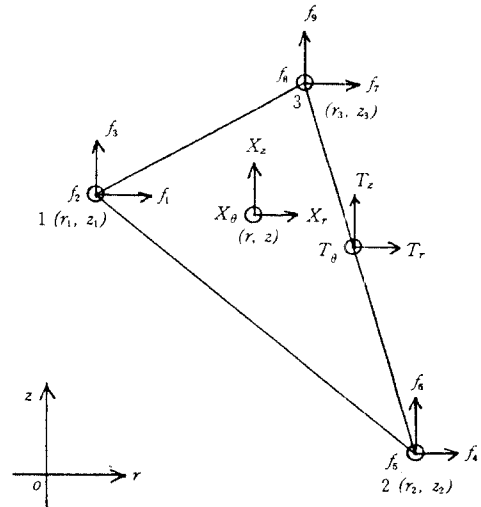


Fig 2. Nodal forces, surface forces and body forces of a element

지금 Fig. 2에 表示된 바와 같이 各 節點에서  $r, \theta, z$  方向으로 作用하는 單位길이 당의 節點力을 各各  $f_1, f_2, f_3, f_4 \dots f_9$  라고 하면, 假想 일의 原理에 의하면 다음 式이 成立한다.

$$\int_0^{2\pi} \{\delta q\}^T \{fr\} d\theta + \int_S \{\delta u\}^T \{T\} dS + \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV - \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (18)$$

여기서  $\{\delta q\}^T$ 는 假想 節點 變位로서  
 $\{\delta q\}^T = [\delta u_1 \delta v_1 \delta w_1 \delta u_2 \delta v_2 \delta w_2 \delta u_3 \delta v_3 \delta w_3]$   
 이고  
 $\{fr\} = [f_1 r_1 f_2 r_1 f_3 r_1 f_4 r_2 f_5 r_2 f_6 r_2 f_7 r_3 f_8 r_3 f_9 r_3]^T$   
 이다. 또한  
 $\{\delta u\}^T = [\delta u \delta v \delta w]$ ,  
 $\{\delta \epsilon\}^T = [\delta \epsilon_r \delta \epsilon_\theta \delta \epsilon_z \delta \gamma_{r\theta} \delta \gamma_{\theta z} \delta \gamma_{zr}]$   
 $\{T\} = [T_r T_\theta T_z]^T$   
 $\{X\} = [X_r X_\theta X_z]^T$   
 이며  $T_r, T_\theta, T_z$ 는 各各  $r, \theta, z$  方向의 表面力,  $X_r, X_\theta, X_z$ 는 各各  $r, \theta, z$  方向의 物體力이다.

$\int_S dS$ 는 要素의 表面에 대한 面積分이고  
 $\int_V dV$ 는 要素의 體積積分을 나타낸다.  
 式(14), (16), (17)로부터  $\{\delta q\}^T, \{\delta u\}^T, \{\delta \epsilon\}^T$ 를 구하면

$$\begin{aligned} \{\delta q\}^T &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta q_m\}^T e^{im\theta} \\ \{\delta u\}^T &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta q_m\}^T e^{im\theta} [N]^T \\ \{\delta \epsilon\}^T &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta q_m\}^T e^{im\theta} [B_m]^T \end{aligned} \quad (19)$$

이들을 式(18)에 代入하면  $\{\delta q_m\}^T$ 는 常數이므로 積分記號 밖으로 나올 수 있고 따라서

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta q_m\}^T \left( \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \{fr\} d\theta + \int_S e^{im\theta} [N]^T \{T\} dS + \int_V e^{im\theta} [N]^T \{X\} dV \right) - \int_V e^{im\theta} [B_m]^T \{\sigma\} dV = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} - \int_V e^{im\theta} [B_m]^T \{\sigma\} dV &= 0 \quad (20) \\ \{\delta q_m\}^T &\text{은 任意(Arbitrary)이므로 結局 式} \\ (20) \text{이 項常 成立하기 위해서는} \\ \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \{fr\} d\theta + \int_S e^{im\theta} [N]^T \{T\} dS + \\ \int_V e^{im\theta} [N]^T \{X\} dV &= \int_V e^{im\theta} [B_m]^T \{\sigma\} dV \quad (21) \end{aligned}$$

$$m = -\infty \sim \infty$$

이 되어야 한다.

節點力  $\{fr\}$ , 表面力  $\{T\}$ , 物體力  $\{X\}$ 로 表示되는 非對稱 荷重들은 周期  $2\pi$ 를 가지는  $\theta$ 의 周期函數이다. 이들도 節點變位와 마찬가지로 Fourier 級數로 展開할 수 있다. 例를 들면

$$\begin{aligned} f_1 r_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{1k} e^{ik\theta} \\ T_r &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{rk} e^{ik\theta} \\ X_r &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{rk} e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

와 같다. 여기서 複素 Fourier 係數  $h_{1k}, T_{rk}, X_{rk}$ 는 式(5)의 境遇와 마찬가지로

$$\begin{aligned} h_{1k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 r_1 e^{-ik\theta} d\theta \\ T_{rk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_r e^{-ik\theta} d\theta \\ X_{rk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_r e^{-ik\theta} d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

와 같이 구하면 된다.

節點力, 表面力, 物體力의 다른 成分들도 같은 方法으로 Fourier 級數로 展開하고 複素 Fourier 係數를 구하면 된다. 그리하여 結局 節點力  $\{fr\}$ , 表面力  $\{T\}$ , 物體力  $\{X\}$ 를 다음과 같이 Fourier 級數로써 展開한다.

$$\begin{aligned} \{fr\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_k\} e^{ik\theta} \\ \{T\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{T_k\} e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\{X\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_k\} e^{ikh\theta}$$

여기서  $\{h_k\} = [h_{1k} \ h_{2k} \ h_{3k} \ h_{4k} \ h_{5k} \ h_{6k} \ h_{7k} \ h_{8k} \ h_{9k}]^T$ ,  $\{T_k\} = [T_{rk} \ T_{\theta k} \ T_{zk}]^T$ ,  $\{X_k\} = [X_{rk} \ X_{\theta k} \ X_{zk}]^T$  이다.

또한 三角形 斷面을 가진 要素의 微小表面積  $dS$ 와 微小體積  $dV$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} dS &= r d\theta \ dl \\ dV &= r d\theta \ dA \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $dl$ 는 三角形 邊의 微小길이 이고  $dA$ 는 三角形 要素의 微小面積이다.

式(24)와 式(25)를 式(21)에 代入하면

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_k\} e^{i(m+k)\theta} d\theta + \int_l \int_0^{2\pi} [N]^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ & \{T_k\} e^{i(m+k)\theta} d\theta \ rdl + \int_A \int_0^{2\pi} [N]^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ & \{X_k\} e^{i(m+k)\theta} d\theta \ rdA \\ & = \int_1 e^{im\theta} [B_m]^T \{\sigma\} dV \\ & m = -\infty \sim \infty \end{aligned} \quad (26)$$

이 된다. 그런데

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+k)\theta} d\theta \begin{cases} = 0 & (k \neq -m) \\ = 2\pi & (k = -m) \end{cases} \quad (27)$$

이므로 式(26)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & 2\pi \{h_{-m}\} + \int_l [N]^T \{T_{-m}\} 2\pi \ rdl \\ & + \int_A [N]^T \{X_{-m}\} 2\pi \ rdA \\ & = \int_1 e^{im\theta} [B_m]^T \{\sigma\} dV \end{aligned} \quad (28)$$

여기서  $\int_l dl$ 은 三角形 要素邊에 대한 線積分 이고  $\int_A dA$ 는 三角形 要素에 대한 面積분이다.

한편 式(17)을 式(11)에 代入하여  $\{\sigma\}$ 를 구하면

$$\{\sigma\} = [C] \sum_{k=-\infty}^{\infty} [B_k] \{q_k\} e^{ikh\theta} \quad (29)$$

가 되고 이것을 式(28)에 代入하고 整理하면

$$\begin{aligned} [K_m] \{q_m\} &= \{L_m\} \\ m &= -\infty \sim \infty \end{aligned} \quad (30)$$

여기서

$$\begin{aligned} [K_m] &= \int_1 [B_{-m}]^T [C] [B_m] \ rdA \\ \{L_m\} &= \{h_m\} + \int_l [N]^T \{T_m\} \ rdl \\ & \quad + \int_A [N]^T \{X_m\} \ rdA \end{aligned}$$

式(30)은 하나의 要素에 대하여 成立하는 式으로 여러 要素들에 대한 式들을 組立 (Assembling)하고 境界 條件에 따라 修正하여 聯立方程式을 푸는 要領은 보통의 有限 要素法 問題 푸는 것과 同一하다. 다만 이때 注意하여야 할 것은 보통의 有限 要素法 問題는 한번만 풀면 되는데 反하여 여기서는 여러번 ( $m = -\infty \sim \infty$ ) 풀어야 하고,  $[K_m]$ ,  $\{q_m\}$ ,  $\{L_m\}$ 이 全部 複素數로 이루어졌다는 점, 그리고 要素의 剛性行列  $[K_m]$ 이 對稱行列이 아니라는 점 등이다.

要素의 剛性行列  $[K_m]$ 이 어떠한 行列인가 보기 위하여  $[B_m]$ 을 다음과 같이 實數部와 虛數部로 表示하여 보자.

$$\begin{aligned} [B_m] &= [B] + im[B^*] \\ [B_{-m}] &= [B] - im[B^*] \end{aligned} \quad (31)$$

여기서

$$\begin{aligned} [B] &= [B_1 \ B_2 \ B_3] \\ [B^*] &= [B_1^* \ B_2^* \ B_3^*] \end{aligned}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ 0 & \frac{b_j}{2\Delta} - \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & 0 \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$B_j^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_j}{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$j=1, 2, 3$

式(31)을 式(30)의  $[K_m]$ 에 代入하면

$$[K_m] = [K'_m] + im[K''] \quad (32)$$

가 된다. 여기서

$$[K'_m] =$$

$$\int_0^1 ([B]^T[C][B] + m^2[B^*]^T[C][B^*]) r dA$$

$$[K''] =$$

$$\int_0^1 ([B]^T[C][B^*] - [B^*]^T[C][B]) r dA$$

이다. 위에서 보는 바와 같이  $[K'_m]$ 와  $[K'']$ 는 實數로만 이루어진 行列이다. 또한  $[K'_m]$ 는 對稱行列이고  $[K'']$ 는 歪對稱(Skew-symmetric) 行列이다.

#### 4. 偶函數이거나 奇函數인 境遇

前節에서 求한 要素의 剛性行列  $[K_m]$ 과 荷重벡터  $\{L_m\}$ 이 複素數이기 때문에 컴퓨터 프로그래밍에 있어서 큰 記憶容量을 必要로 한다. 그러나 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重在  $\theta$ 의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많고 또한 境界條件으로 주어진 變位가  $\theta$ 의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많은데, 이럴 때는 要素의 剛性行列과 荷重벡터가 實數로만 이루어지므로 더 작은 컴퓨터 記憶容量으로도 計算이 可能하다.

더우기 모든 函數는 다음 式에 보이는 바와 같이 偶函數와 奇函數의 總으로 表示할 수 있음을 注目할 必要가 있다.  $f(\theta)$ 는 偶函數도 奇函數도 아닌 一般的인 函數라 하자. 그러면

$$f(\theta) = \frac{f(\theta) + f(-\theta)}{2} + \frac{f(\theta) - f(-\theta)}{2} \quad (33)$$

과 같이 表示할 수가 있고 이 式에서 右邊의 제1항은 偶函數이고 제2항은 奇函數이다.

지금 非對稱 荷重을 받고 非對稱 變位가 주어진 軸對稱 物體에 있어서 荷重과 變位가  $r$  方向과  $z$  方向 成分은  $\theta$ 의 偶函數이고  $\theta$  方向 成分은  $\theta$ 의 奇函數라고 하자. 이런 境遇는 實際로 종종 接하게 되는 問題인데 餘他の 境遇도 같은 方法으로 定式化 할 수 있다. Fig. 1에서와 같이  $r-z$  平面에서 三角形 斷面을 가진 要素에서 節點  $j$ 의  $r$  方向,  $\theta$  方向,  $z$  方向 變位  $u_j, v_j, w_j$ 는 式(8)과 (9)를 參照하여

$$u_j = \sum_{m=0}^{\infty} u_{jm} \cos m\theta$$

$$v_j = \sum_{m=0}^{\infty} v_{jm} \sin m\theta \quad (34)$$

$$w_j = \sum_{m=0}^{\infty} w_{jm} \cos m\theta, \quad j=1, 2, 3$$

와 같이 된다. 이들을 式(12)에 代入하면 要素內 任意點( $r, z$ )에서의 變位  $u, v, w$ 를 구한다.

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} (N_1 u_{1m} + N_2 u_{2m} + N_3 u_{3m}) \cos m\theta$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} (N_1 v_{1m} + N_2 v_{2m} + N_3 v_{3m}) \sin m\theta \quad (35)$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} (N_1 w_{1m} + N_2 w_{2m} + N_3 w_{3m}) \cos m\theta$$

이 式을 行列型式으로 表示하면

$$\{u\} = \sum_{m=0}^{\infty} [N_m] \{q_m\} \quad (36)$$

여기서  $[N_m] = [N_{1m} \ N_{2m} \ N_{3m}]$  이고

$$N_{jm} = \begin{pmatrix} N_j \cos m\theta & 0 & 0 \\ 0 & N_j \sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & N_j \cos m\theta \end{pmatrix}$$

$j=1, 2, 3$

$$\{q_m\} = [u_{1m} \ v_{1m} \ w_{1m} \ u_{2m} \ v_{2m} \ w_{2m} \ u_{3m} \ v_{3m} \ w_{3m}]^T \text{이다.}$$

여기서 注意하여야 할 점은 前節에서와는 달

리  $\{q_m\}$ 의 成分들이 全部 實數들 이라는 것이다.

式(35)로 表示된 變位成分들을 式(10)에 代入하여 變形率 成分들을 구하고 이들을 行列型 式으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B_m] \{q_m\} \quad (37)$$

여기서

$$[B_m] = [B_{1m} \ B_{2m} \ B_{3m}] \text{ 이고}$$

$$B_{jm} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} \cos m\theta & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} \cos m\theta & m \frac{N_j}{r} \cos m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \cos m\theta \\ -m \frac{N_j}{r} \sin m\theta & (\frac{b_j}{2\Delta} - \frac{N_j}{r}) \sin m\theta & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \sin m\theta & -m \frac{N_j}{r} \sin m\theta \\ \frac{c_j}{2\Delta} \cos m\theta & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \cos m\theta \end{bmatrix}$$

$$j=1, 2, 3$$

前節에서와 마찬가지로 式(18)로 表示되는 假想일의 原理를 적용하면 다음 式이 成立함을 알 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \{fr\} d\theta + \int_s [N_m]^T \{T\} dS + \int_v [N_m]^T \{X\} dV = \int_v [B_m]^T \{\sigma\} dV \quad (38)$$

$$m=0, 1, 2, \dots, \infty$$

이 式의 左邊 제1항은 節點力  $\{fr\}$ 의  $r$ 方向과  $z$ 方向 成分에는  $\cos m\theta$ 를 곱하고  $\theta$ 方向 成分에는  $\sin m\theta$ 를 곱하여 1周期間을 積分하라는 뜻이다.

節點力  $\{fr\}$ , 表面力  $\{T\}$ , 物體力  $\{X\}$ 는  $r$ 方向과  $z$ 방향 성분은 式(8)의 cosine 級數

로,  $\theta$ 方向 成分은 式(9)의 sine 級數로 展開한다. 예를 들면

$$f_1 r_1 = \sum_{k=0}^{\infty} h_{1k} \cos k\theta, \quad f_2 r_1 = \sum_{k=0}^{\infty} h_{2k} \sin k\theta$$

$$h_{10} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_1 r_1 d\theta,$$

$$h_{1k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1 r_1 \cos k\theta d\theta, \quad h_{20} = 0,$$

$$h_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_2 r_1 \sin k\theta d\theta,$$

$$T_r = \sum_{k=0}^{\infty} T_{rk} \cos k\theta, \quad T_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} T_{\theta k} \sin k\theta$$

$$T_{r0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T_r d\theta, \quad T_{rk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T_r \cos k\theta d\theta$$

$$T_{\theta 0} = 0, \quad T_{\theta k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T_{\theta} \sin k\theta d\theta \quad (39)$$

등이다. 또한 應力  $\{\sigma\}$ 는 式(37)과 式(11)로부터

$$\{\sigma\} = [C] \sum_{k=0}^{\infty} [B_k] \{q_k\} \quad (40)$$

이므로 이들을 式(38)에 代入하여 整理하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$[K_m] \{q_m\} = \{L_m\}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \infty \quad (41)$$

$$\text{여기서 } [K_m] = \int_v [B_m^*]^T [C] [B_m^*] r dA$$

$$[B_m^*] = [B_{1m}^* \ B_{2m}^* \ B_{3m}^*]$$

$$B_{jm}^* = \begin{bmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & m \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ -m \frac{N_j}{r} & \frac{b_j}{2\Delta} - \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & -m \frac{N_j}{r} \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$j=1, 2, 3$$

$$\{L_m\} = \{h_m\} + \int_v [N]^T \{T_m\} r dl$$



$$+ \int_1 [N]^T \{X_m\} r dA$$

여기서 注意하여야 할 것은  $\{h_m\}$ ,  $\{T_m\}$ ,  $\{X_m\}$ 의 成分들이 前節에서와는 달리 複素數가 아니고 式(39)에서 구하여진 바와 같이 實數들 이라는 點이다. 따라서 式(41)은 全部 實數들 로만 이루어져 있으므로 컴퓨터의 記憶容量이 前節에서 보다 더 작아도 된다.

### 5. 計算例

前節에서 誘導하여 定式化한 解析方法을 利用하여 우선 非對稱荷重을 받는 軸對稱物體의 一例를 解析하였다. Fig. 3(a)와 같이 剛體로 이루어진 正반위에 外徑 120mm, 內徑 60mm, 높이 40mm의 두꺼운 벽을 가진 中空의 圓筒을 올려놓고 右側의 반쪽에만 가장자리에 軸方向(z方向)으로 單位길이당 10kg의 分布荷重이 作用하는 境遇를 計算하여 그 結果를 Fig. 4에 나타내었다. 材料는 軟鋼으로 彈性係數는  $E = 21,000\text{kg/mm}^2$ 이고 Poisson比는  $\nu = 0.3$ 이다. 圓筒座標系를 Fig. 3(b)와 같이 定하고  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$ ,  $\theta = 180^\circ$ 인 斷面의 要素分割과 變形模樣을 各各 Fig. 4 (a), (b), (c)에 나타내었다. 그림에서 點線은 荷重이 作用하기 前의 原來의 模樣을 나타내고 實線은 荷重이 作用할 때의 斷面模樣을 나타내는데 變位를 3000倍 擴大하여 그린 그림이다. 荷重이 作用하지 않은  $\theta = 180^\circ$ 인 斷面에서 變形이 가장 작음을 알 수 있다.

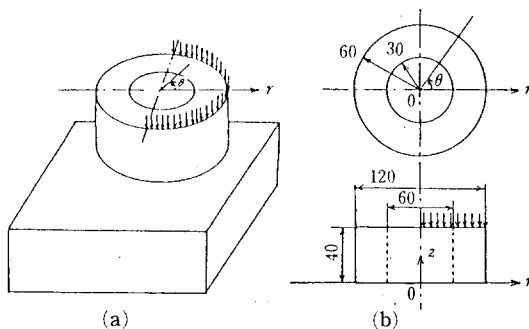
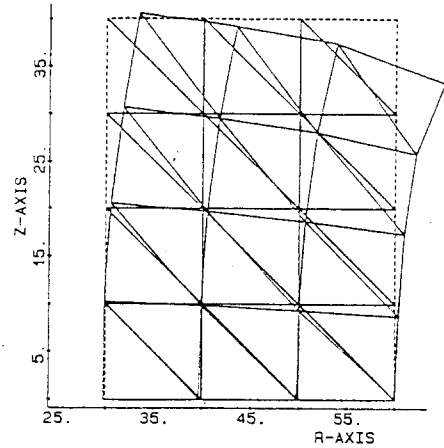
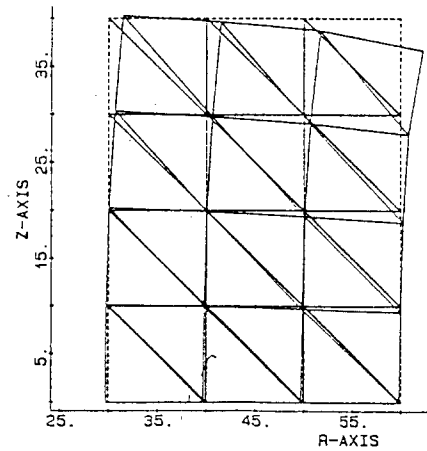


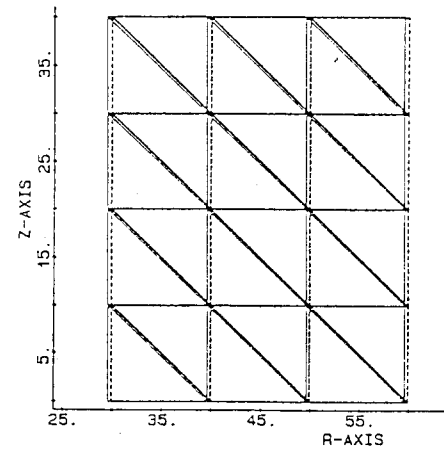
Fig 3. An example of axi-symmetric body subjecting to non-symmetric load.



(a)  $\theta = 0^\circ$



(b)  $\theta = 90^\circ$



(c)  $\theta = 180^\circ$

Fig 4. Deformation of each cross section

非對稱 變位가 주어진 軸對稱 物體의 一例가 Fig. 5에 보이는 바와 같은 船尾管 密封裝置에 있는 시일 링(Seal Ring)이다.

推進軸이 同心上에서만 回轉하면 이는 軸對稱 問題의 解法만으로 解析이 可能하다. 그러나 推進軸의 橫進動이 發生한다든지 加工上의 誤差로 推進軸이 偏心되어 있거나 眞圓이 아닌 境遇에는 시일 링은 非對稱 變位를 받게된다.

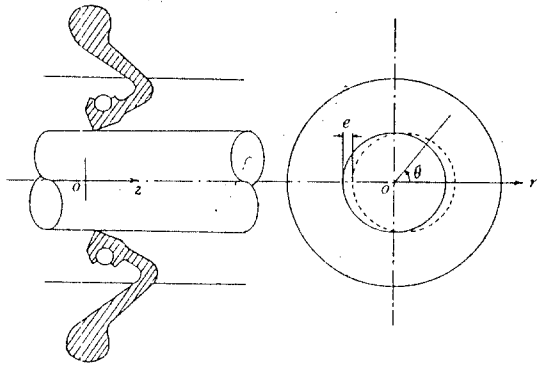
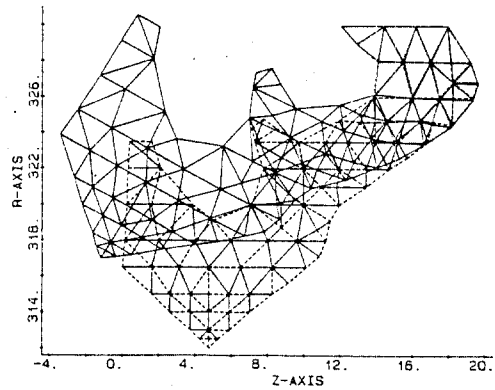


Fig. 5. Seal ring of stern tube sealing system

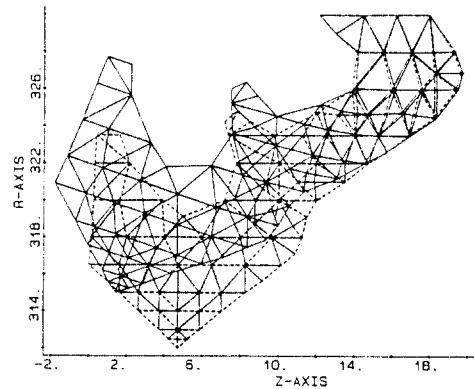
지금 圓筒座標系를 Fig. 5와 같이 定하고 推進軸이  $e$ 만큼 偏心되었을 때  $e$ 가 軸徑에 比하여 작다면 립 先端의 半徑方向( $r$ 方向) 變位  $u$ 와 圓周方向( $\theta$ 方向) 變位  $v$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u &= e \cos\theta \\ v &= e \sin\theta \end{aligned} \quad (42)$$

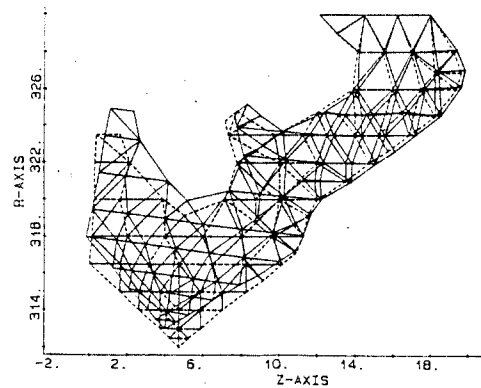
이것을 境界條件으로 주어서 解析한 結果를 Fig. 6에 나타내었다. 이 그림은 內徑 624mm의 시일링을 軸徑 630mm의 推進軸에 裝着하고서 2mm의 偏心이 있을때 各斷面의 變形模樣을 나타낸 것이다. 材料는 Viton 系 고무로 彈性係數는  $E=1.12\text{kg/mm}^2$ , Poisson 比는  $\nu=0.44$ 이다. 點線으로 表示된 部分은 裝着하기 前 原來의 斷面模樣을 나타내고 實線은 裝着하고서 2mm의 偏心이 있는 斷面模樣을 나타낸다.  $\theta=0^\circ$ 인 斷面에서 가장 큰 變位가 發



(a)  $\theta = 0^\circ$



(b)  $\theta = 90^\circ$



(c)  $\theta = 180^\circ$

Fig. 6. Deformation of each cross section

生하고 主應力도 가장 큰 引張應力이 發生하였음을 確認하였다. 또한  $\theta = 90^\circ$ 인 斷面에서는 큰 剪斷應力이 發生하였다.

### 6. 結 論

非對稱 荷重을 받고 非對稱으로 變位가 주어진 軸對稱 物體의 應力과 變形率 및 變位를 有限要素法으로 解析하는 定式化 過程을 誘導한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 軸對稱 物體의 非對稱 荷重과 非對稱 變位가  $2\pi$ 의 周期를 가지는 角度  $\theta$ 의 周期函數이므로 이들을 Fourier級數로 展開함으로서 軸心을 지나는 對稱斷面의 어느 한쪽만을 가지고 有限要素 解析이 可能하였다.

(2) Euler의 公式을 利用하여 cosine 級數와 sine級數로 表示된 Fourier 級數를 複素數를 活用하는 Exponential 級數로 展開하면 微分과 積分이 簡單하여져서 要素의 剛性行列이 쉽게 求하여 진다.

(3) 非對稱 荷重과 非對稱 變位의 成分들이 角度  $\theta$ 의 偶函數이거나 奇函數이면 要素의 剛性行列이 實數로만 이루어지게 할 수 있고 따라서 더 작은 컴퓨터 記憶 容量으로 計算이 可能하여진다.

### 參考文獻

- 1) Timoshenko, Goodier, Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1970.
- 2) Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 5th Edition, John Wiley & Sons, 1985.
- 3) Kenneth H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, Jhon Wiley & Sons, 1975.
- 4) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.
- 5) Yukiyoishi Miyashita, et al., Study on Stern Tube Sealing System-Part I : Deformation Behavior in Static Condition of Sealing Rings, Journal of the M.E.S.J., Vol. 11, No. 3, 1976.
- 6) Ruel V. Churchill, James Ward Brown, Fourier Series and Boundary Value Problems, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1978.
- 7) 王之錫, 金基俊, 李英浩, Fourier 級數를 應用한 二階 線形 常微分 方程式의 解法에 關한 研究, 韓國舶用機關學會誌 第8卷 第1號, 1984. 4.