

非對稱型 光學系의 有限光線追跡

홍 경 희

육군사관학교

(1990년 7월 10일 받음)

I. 序 論

광선으로 빛의 進行過程을 설명하는 분야가 幾何光學이며 광선추적은 기하광학의 기본이 된다. 특히 광학계 설계를 위해서는 광선추적이 필수적인 도구가 된다. 광선추적에도 近軸光의 경우는 近似的인 방법으로서 Gauss 광선추적을 이용하고 있으며 보다 정확한 광선추적을 위하여 유한광선추적을 실시한다. 대체로 대칭형 二次曲面에 대한 광선추적은 많은 문헌에 소개되어 있으며 비대칭형에 대하여도 부분적으로 소개되어 있다. 여기서는 熱像裝備의 走査裝置와 같은 광학계에서 많이 사용되는 비대칭형 광학계의 유한광선추적 방법을 제시하고자 한다. 먼저 대칭형 二次曲面에 의한 유한광선추적 방법을 소개하고 이를 母體로 하는 非球面系의 광선추적을 알아본다. 대칭형 2차곡면에는 구면, 포물면, 쌍곡면, 타원체면이 포함된다. 다음은 비대칭형 광학계로서, 원통형면, toric surface, 원추면의 광선추적 방법을 소개하고, 마지막으로 광축에 대하여 회전되거나 기울어진 광학계의 광선추적 방법을 제시한다.

II. 대칭형 2차곡면의 광선추적

1. 2차곡면의 광선추적

광선추적의 기본이 되는 법칙은 반사와 굴절법칙으로서 Snell의 법칙을 이용한다. Fig.1에서와 같이 굴절률이 n 인 물질을 통하여 단위 vector r 방향으로 입사하는 광선이 曲面函數가 $f(X, Y, Z)$ 이고 굴절률이 n' 인 2차곡면을 P 점에서 交叉하고 굴절하여 r' 의 방향으로 진행하는 경우를 생각하여 보자. 2차곡면상의 P 점을 지나는 法線과 반대방향의 단위 vector를 a 라 할 때, Snell의 법칙을 vector 형으로 표현하면

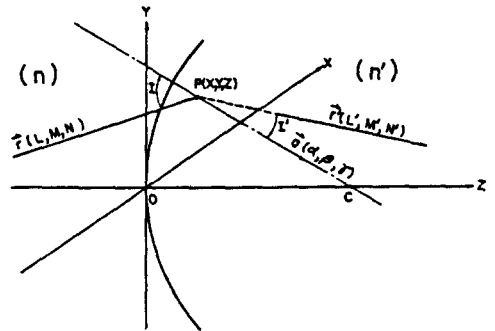


Fig. 1. Refraction at a quadratic surface

$$n'(r' \times a) = n(r \times a) \quad (1)$$

으로 쓸 수 있고 이 식에서 兩邊에 $a \times$ 를 취하여 移項整理하면

$$n'r' = n r + a(n'a \cdot r' - n a \cdot r) \quad (2)$$

이 된다. 여기서, X, Y, 및 Z 축 방향의 단위 vector를 \hat{u}_x , \hat{u}_y 및 \hat{u}_z 이라 할 때

$$r = L \hat{u}_x + M \hat{u}_y + N \hat{u}_z,$$

$$a = i \hat{u}_x + j \hat{u}_y + k \hat{u}_z, \quad (3)$$

$$r' = L' \hat{u}_x + M' \hat{u}_y + N' \hat{u}_z$$

이며 入射角이 I , 屈折角이 I' 일 때

$$a \cdot r = \cos I \text{ 이고 } a \cdot r' = \cos I' \text{이다. 따라서}$$

$$\cos I = L i + M j + N k,$$

$$n' L' = n L + i(n' \cos I' - n \cos I),$$

$$n' M' = n M + j(n' \cos I' - n \cos I), \quad (4)$$

$$n' N' = n N + k(n' \cos I' - n \cos I),$$

$$\cos I' = \frac{1}{n'} [(n'^2 - n^2) + (n \cos I)^2]^{1/2}$$

와 같이 굴절 후의 광선의 진행방향 r' 을 구할 수 있다.

法線 a 를 구하려면 광선과 2차곡면의 交點 $P(X, Y, Z)$ 의 座標를 구해야 한다. 이를 위해서는 먼저 2차곡면과, 광축인 Z -축과의 교점인 정점에서 接平面을 생각하고 접평면과 광선의 교점좌표를 $(X_T, Y_T, 0)$ 이라 하자. 또한 접평면상의 교점으로부터 2차곡면상의 교점까지의 거리를 D 라 하면,

$$X = X_T + LD, Y = Y_T + MD, Z = ND \quad (5)$$

가 된다. 그리고 대칭형 2차곡면의 곡면함수 $f(X, Y, Z)$ 는

$$f(X, Y, Z) = C(X^2 + Y^2 + (1+Q)Z^2) - 2Z = 0 \quad (6)$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 Q 는 異心率로서 $Q < -1$ 인 경우는 쌍곡면, $Q = -1$ 이면 포물면, $-1 < Q < 0$ 이면 長軸에 대한 타원체면, $Q = 0$ 이면 구면, 그리고 $Q > 0$ 인 경우는 短軸에 대한 타원체면이다. (5)식을 (6)식에 대입하여 풀면

$$(1 + QN^2)D^2 - 2GD + F = 0 \quad (7)$$

이 되고 여기서

$$F = C(X_T^2 + Y_T^2)$$

$$G = N - C(LX_T + MY_T) \text{ 이다.}$$

D 에 대하여 2차방정식을 풀면

$$D = \frac{G \pm \sqrt{G^2 - C(1 + QN^2)F}}{C(1 + QN^2)} \quad (8)$$

의 두 根을 얻지만 더 작은 값을 취해야 하므로 -부호를 택한다. 따라서 D 는

$$D = \frac{F}{G + \sqrt{G^2 - (1 + QN^2)CF}} \quad (9)$$

이다. 2차곡면상의 교점 $P(X, Y, Z)$ 는 (5)식으로부터 구할 수 있다. 한편, 법선 vector a 는 ∇f 의 방향을 나타내는 단위 vector이므로 이를 계산하여 각 성분별로 나타내면

$$a = -CX, \beta = -CY, \gamma = 1 - (1+Q)CZ,$$

$$i = a/S, j = \beta/S, k = \gamma/S, \text{ 단, } S = \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad (10)$$

이 된다.

앞면상의 교점좌표를 $P_1(X_{-1}, Y_{-1}, Z_1)$ 이라 하고, 앞면으로부터 현재의 2차곡면까지의 거리가 d_{-1} 이고 앞면상의 교점 P_{-1} 로부터 접평면까지의 거리가 A 라고 하면

$$\begin{aligned} A &= (d_{-1} - Z_{-1})/N \\ X_T &= X_{-1} + AL \\ Y_T &= Y_{-1} + AM \end{aligned} \quad (11)$$

의 관계식을 얻어 현재의 2차곡면의 접평면과 광선의 교점 $(X_T, Y_T, 0)$ 을 구하여 식 (5)로부터 광선과 2차곡면의 교점 $P(X, Y, Z)$ 를 구할 수 있다.

2. 非球面으로의 轉換

대칭적인 2차곡면의 곡면함수를 Z 에 대하여 표현하면

$$Z = \frac{C\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1+Q)C^2\rho^2}}, \text{ 단 } \rho^2 = X^2 + Y^2 \quad (12)$$

으로 표현되며 이를 모체로 하여 비구면을 생각하면 비구면의 함수 $Z(\rho)$ 는

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \frac{C\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1+Q)C^2\rho^2}} \\ &+ A_4\rho^2 + A_6\rho^3 + A_8\rho^4 + A_{10}\rho^5, \end{aligned} \quad (13)$$

단, $p = (\rho^2/\rho_{max}^2)^2$ 이다.

Fig. 2에서 보는 바와 같이 母體인 2차곡면상 P_0 에서 광선이 만나서 비구면상에는 점 P 에서 만나는 경우를 생각해 보자. 그림과 같이 점 $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ 를 지나는 광축에 평행한 직선이 비구면과 만나는 점을 Q_1 이라 하고, 또한 점 Q_1 에서 점 P_0 를 지나는 접선과 평행한 직선

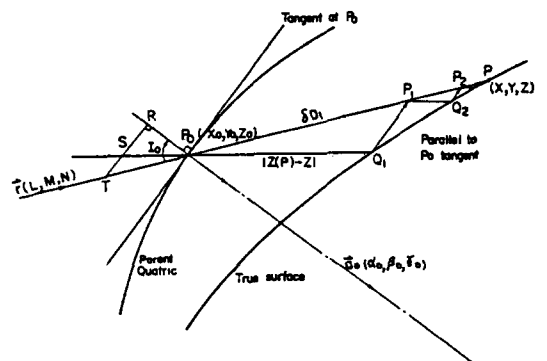


Fig. 2. Aspheric transfer

이 광선과 만나는 점을 $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 이라 하자. 이와 같이 계속하면 점 $P(X, Y, Z)$ 에 도달할 수가 있다. 직각삼각형 TRP_0 에서 선분 TR_0 의 길이를 1.0이 되도록 하면 선분 RP_0 의 길이는 $\cos I_0$ 가 되며, 선분 SP_0 의 길이를 Z_0 라 하면 직각삼각형 SRP_0 에서 법선의 z -축에 대한 방향여현이 k_0 이므로 $Z_0 k_0 = \cos I_0$ 의 관계가 된다 (Fig. 2). 따라서

$$Z_0 = \frac{\cos I_0}{k_0} \quad (14)$$

이 된다. 선분 TR 가 P_0 의 접선에 평행하므로 삼각형 TSP_0 와 삼각형 $P_1Q_1P_0$ 는 서로 닮은 꼴이므로

$$\delta D_1 = k_0 [Z(\rho) - Z] / \cos I_0 \quad (15)$$

이 되고, 접평면상의 교점으로부터 점 P_1 까지의 거리 D 는 접평면상의 교점으로부터 점 P_0 까지의 거리 D_0 와 δD_1 의 합이 된다. 즉,

$$\begin{aligned} D &= D_0 + \delta D_1 \\ X_1 &= X_0 + LD \\ Y_1 &= Y_0 + MD \\ Z_1 &= Z_0 + ND \end{aligned} \quad (16)$$

같은 방법으로 $\delta D_2, \delta D_3, \dots, \delta D_n$ 을 구하여, δD_n 이 매우 작은 값으로 될 때까지 반복하며, 이에 따라, X_2, X_3, \dots, X_n 을 구하여 최종 $P(X, Y, Z)$ 점의 좌표를 구한다.

법선 vector a 는 $\vec{\nabla} f(X, Y, Z)$ 의 規格化된 단위 vector 이므로

$$\begin{aligned} A(p) &= A_1 p^2 + A_2 p^3 + A_3 p^4 + A_{10} p^5, \\ A_p &= \frac{\partial A(p)}{\partial p} = 2A_1 p + 3A_2 p^2 + 4A_3 p^3 + 5A_{10} p^4 \text{ 이라} \end{aligned}$$

이라 할 때,

$$\begin{aligned} \alpha &= - \left(C + \frac{2\gamma}{\rho_{max}} \frac{\partial A}{\partial p} \right) X \\ \beta &= - \left(C + \frac{2\gamma}{\rho_{max}} \frac{\partial A}{\partial p} \right) Y \\ \gamma &= 1 - (1+Q) C [Z - A(p)] \end{aligned} \quad (17)$$

가 되며 이를 規格化 하면

$$\begin{aligned} i &= \alpha / S, \quad j = \beta / S, \quad k = \gamma / S, \\ \text{단, } S &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

III. 비대칭형 2차곡면의 광선추적

1. Toric 면의 광선추적

Fig. 3과 같은 toric 면의 곡면함수 $f(X, Y, Z)$ 는 曲率 $C_1=1/r_1, C_2=1/r_2$ 라 하면

$$\begin{aligned} C_1 C_2 (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2C_1 C_2 Z + 2(C_1 - C_2) \\ - 2(C_1 - C_2) \sqrt{(1 - C_2 Z)^2 + (C_2 X)^2} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

으로 표현할 수 있다. 여기서 r_1 과 r_2 의 비에 따라 toric 면의 모양이 달라지며, 도너스, 사과 또는 레몬형의 곡면이 된다. 한편, $C_1=0$ 이면 원기둥면이 된다. $C_2=0$ 이면 식 (19)를 사용할 수 없다. 식 (5)를 식 (19)에 대입하여 D 에 대하여 풀면,

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1 C_2^2, \\ F_2 &= 2C_1 C_2 [C_2 (X_7 L + Y_7 M) - N], \\ F_3 &= 2(C_1 - C_2), \\ F_4 &= F_1 (X_7^2 + Y_7^2) + F_3. \end{aligned}$$

라 놓고,

$$\begin{aligned} A_0 &= F_1^2 - F_3^2 (1 + C_2^2 X_7^2), \\ A_1 &= 2F_2 F_4 - F_3 [2C_2 (C_2 X_7 L - N)], \\ A_2 &= F_2^2 + 2F_1 F_4 - F_3^2 C_2^2 (1 - M^2), \\ A_3 &= 2F_1 F_2, \quad A_4 = F_1^2 \end{aligned}$$

라 놓으면

$$A_4 D^4 + A_3 D^3 + A_2 D^2 + A_1 D + A_0 = 0 \quad (20)$$

과 같은 4차방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식을 풀어 最小實根을 취하여 식 (5)에 대입하면 구하고자 하는 광

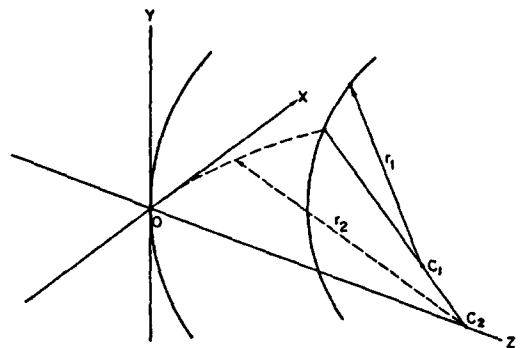


Fig. 3. Toric surface

선과 toric 면과의 교점, $P(X, Y, Z)$ 의 좌표를 구할 수 있다.

이 결과로부터 식 (19)의 곡면함수의 gradient 를 취하여 그 성분을 알아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha &= X[-C_1 C_2 + C_2(C_1 - C_2)/R], \\ \beta &= -C_1 C_2 Y, \\ \gamma &= [C_1(1 - C_2 Z) - (C_1 - C_2)(1 - C_2 Z)/R], \\ \text{단, } R &= \sqrt{(1 - C_2 Z)^2 + (C_2 X)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

법선 vector a 는 식 (21)을 규격화 하면 된다(Fig. 3).

2. non-right circular cone

non-right circular cone 의 곡면함수 $f(X, Y, Z)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-C_0(X^2 + Y^2) + 2Z(1 + C_0 k Y) = 0 \quad (22)$$

단, $r = r_0 + kY$, 여기서 C_0 는 $Y=0$ 일 때의 반경이다. Fig. 4에서 보는 바와 같이 $k=0$ 이면 각각 球缺원기둥, 子午원기둥이 된다(Fig. 4).

(1) 구결원기둥의 광선추적

Fig. 4a 와 같이 구결 non-right cone 중에서 $k=0$ 이면 구결원기둥면이 되며 곡면함수는

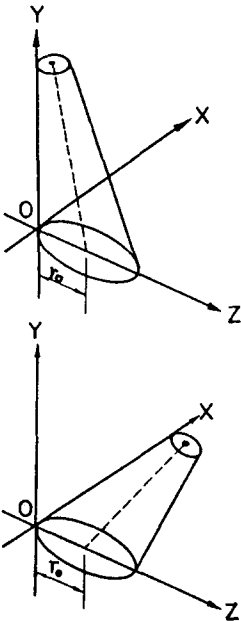


Fig. 4. Non-right circular cone

$$-C_2(X^2 + Y^2) + 2Z = 0 \quad (23)$$

으로 되고 앞에서 논한 바와 같은 방법으로, 접평면으로부터 광선이 곡면과 만나는 교점까지의 거리 D 와 곡면의 법선 vector 를 구하기 위한 α, β, γ 는

$$\begin{aligned} D &= \frac{C_2 X_7^2}{(N - C_2 L X_7) + \sqrt{(C_2 L X_7 - N)^2 - C_2^2 X_7^2 (1 - M^2)}}, \\ \alpha &= -C_2 X, \beta = 0, \gamma = 1 - C_2 Z \end{aligned}$$

으로 된다.

(2) 자오원기둥의 광선추적

Fig. 4b 와 같이 자오 non-right circular cone 중에서 $k=0$ 이면 자오원기둥면이 되며 곡면함수는

$$-C_1(X^2 + Y^2) + 2Z = 0 \quad (25)$$

으로 되고 같은 방법으로 D 및 α, β, γ 는

$$\begin{aligned} D &= \frac{C_1 Y_7^2}{(N - C_1 M Y_7) + \sqrt{(N - C_1 M Y_7)^2 - C_1^2 Y_7^2 (1 - L^2)}}, \\ \alpha &= 0, \beta = -C_1 Y, \gamma = 1 - C_1 Z. \end{aligned} \quad (26)$$

3. Axicons

Fig. 5 와 같이 $T = \tan \theta, \zeta = TZ$ 의 관계일 때 axicon 의 곡면함수로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다(Fig. 5).

$$[1 - N^2(1 + T^2)]D^2 + 2(LX_7 + MY_7)D + (X_7^2 + Y_7^2) = 0 \quad (27)$$

위의 2차방정식을 풀어 작은 D 값을 취하면

$$D = \frac{X_7^2 + Y_7^2}{-(LX_7 + MY_7) + \sqrt{(LX_7 + MY_7)^2 + B_1 \cdot B_2}} \quad (28)$$

단, $B_1 = 1 - N^2(1 + T^2), B_2 = X_7^2 + Y_7^2,$

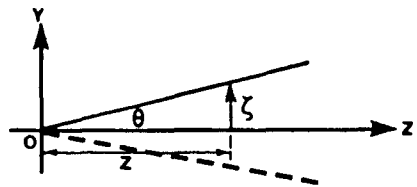


Fig. 5. Axicon

을 얻을 수 있고,

$$\alpha = -X, \beta = -Y, \gamma = T^2 Z \quad (29)$$

를 구할 수 있다.

IV. 異心系의 光線追跡

1. 偏心된 境遇

Fig. 6 과 같이 광축으로부터 X-축으로 d_x , Y-축으로 d_y 만큼 편심된 경우에는 원래의 좌표원점을 기준으로 접평면에 광선이 만나는 점의 좌표가 $(X_T, Y_T, 0)$ 이고 광선의 方向餘弦이 (L, M, N) 이라 할 때, 편심된 광학계의 頂點을 原點으로 하는 좌표계에서는 각각 (X', Y', Z') 및 (L', M', N') 은 아래와 같은 식으로 변화된다 (Fig. 6).

$$X' = X + d_x, Y' = Y + d_y \quad (30)$$

또한 광선추적 후 다시 원래의 좌표계로 환원하려면 식 (30)의 逆으로

$$X = X' - d_x, Y = Y' - d_y \quad (31)$$

으로 구할 수 있다.

2. 회전 및 기울어진 경우

광학계가 Fig. 7a 와 같이 Y-축을 회전축으로 하여 J

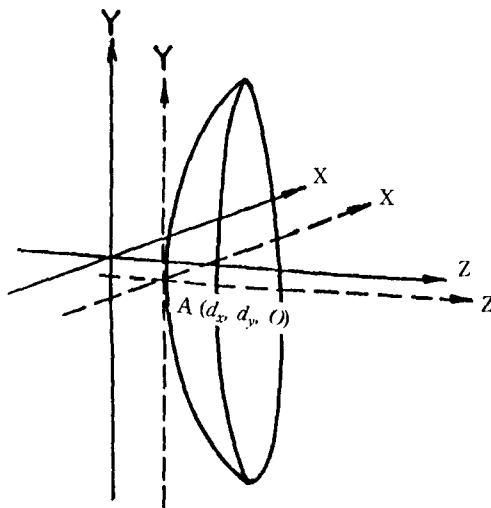


Fig. 6. Decentered system

radian 만큼 회전하고 X-축을 회전축으로 하여 K radian 만큼 기울어졌을 때 이 광학계의 유한광선 추적을 위하여는 좌표변환을 하여주어야 한다. Fig. 7b 에서 보는 바와 같이

$$X' = X, Y' = PD = PC - DC, Z' = OD = OA + BC$$

으로 관계지를 수가 있으며 이를 행렬식으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos K & -\sin K \\ 0 & \sin K & \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (32)$$

이 된다. 또한 Fig. 7c 에서 보는 바와 같이

$$X' = OE = OF - AB, Y' = Y, Z' = OD = OC + BP$$

의 관계가 있으며 이를 행렬식으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & 0 & -\sin J \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin J & 0 & \cos J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (33)$$

으로 쓸 수 있다. 먼저 Fig. 7c 와 같이 Y-축을 회전축

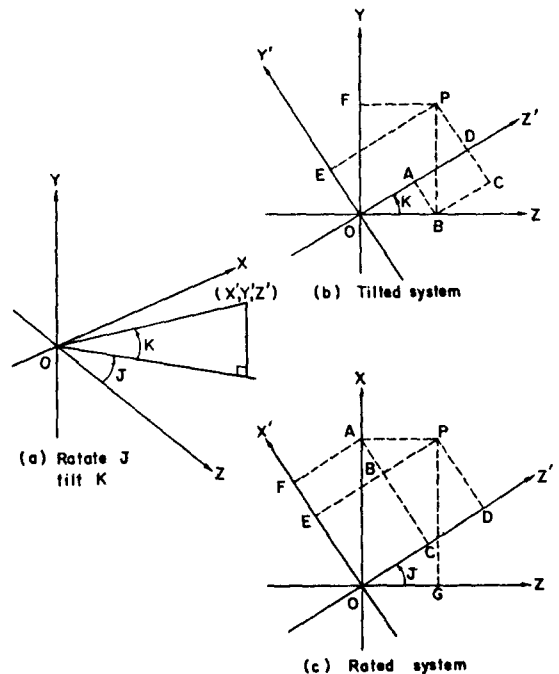


Fig. 7. Rotated and tilted system

으로 하여 J radian 회전하고 그 후 Fig. 7b와 같이 X -축을 회전축으로 하여 K radian 기울어진 경우에는 식 (32)와 식 (33)으로부터 다음과 같이 좌표변환이 가능하다.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & 0 & -\sin J \\ -\sin K \sin J & \cos K & -\sin K \cos J \\ \cos K \sin J & \sin K & \cos K \cos J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (34)$$

이와 같이 座標變換하여 유한광선추적을 실시한 후 다른 광학계와 계속 연결하여 광선추적을 하려면, 굴절인 경우에는 원래의 좌표로 還元해 주어야 한다. 이를 위해 식 (34)의 逆變換을 하여야 하며 행렬식으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & -\sin J \sin K & \sin J \cos K \\ 0 & \cos K & \sin K \\ -\sin J & -\cos J \sin K & \cos J \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (35)$$

으로 된다. 이 때 방향여현도 위치와 꼭 같은 관계이다. 따라서 식 (34)와 식 (35)에서 (X, Y, Z) , (X', Y', Z') 대신에 (L, M, N) , (L', M', N') 만 대입하면 쉽게 좌표변환관계식을 얻을 수 있다.

그러나 반사할 경우에는 좌표축이 원래 상태로 환원되는 것이 아니라 오히려 처음에 회전 및 기울어진만큼 같은 방향으로 한번 더 회전 및 기울어진다. 따라서 반사할 경우에는, 유한광선추적 후에 좌표를 환원할 때 식

(35)를 사용하면 안되고 식 (34)에 의해 변화시켜야 한다. 이 점에 각별히 주의해야 한다.

V. 結 論

비대칭인 경우와 이심계의 유한광선추적을 위한 일반적인 방법을 제시하였다. 이상에 나타나 있는 공식을 이용하면 熱像裝備의 走査裝置를 비롯한 일반적인 광학계의 설계를 위한 유한광선추적이 가능하다. 회절격자와 Fresnel 렌즈의 경우에는 더 보완해야 하며 굴절률이 非均質인 경우도 곤란하다. 그러나 국내 광학산업 분야에서는 여기 소개된 방법만으로도 충분하다. 광학계 설계와 기하광학에 많은 활용을 바란다.

參 考 文 獻

- [1] 홍경희 외 4명, 走査裝置 光系統 設計研究, 육군사관학교 화랑대연구소 (1990).
- [2] R.M. Mackay and F.J. Busselle, Proceeding of SPIE vol.655, 30 (1986).
- [3] 草川徹, レッズ 光學, 東海大學出版會 (1988).
- [4] R.E. Hokins, MILHDBK-141 Optical Design, U. S. Government Printing Office (1970).
- [5] 이종용, 이상수, Laser Scanning 용 광학계의 설계, 한국과학기술원, 서울 (1987).

Finite Raytracing Through Non-rotationally Symmetric Systems

Kyung Hee Hong
Korea Military Academy

(Received: July 10, 1990)

A general ray tracing scheme has been developed for using a personal computer which trace finite rays through any non-rotationally symmetric system. This scheme may be used for the surface type such as conic section with or without aspherics, toric surfaces, sagittal and tangential cylindrical sections and axicons. Specially, any combination of decentered, tilted and rotated surfaces has been considered. Before transferring to the next surfaces, the local coordinates are referred back to an initial reference coordinate system. We can get a mathematical model of a non-rotationally symmetrical finite ray trace running on an inexpensive personal computer.