
 論 文

大韓造船學會誌
 第27卷 第3號 1990年 9月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol.27, No.3, September 1990

자유표면파 문제에서의 하밀톤 원리의 적용에 대한 소고

김 장 환**, 배 광 준*

A Note on Hamilton's Principle for a Free-Surface Flow Problem

by

J. W. Kim** and K. J. Bai*

요 약

본 논문에서는 비선형 자유표면파의 수치해법 개발을 위한 노력의 일환으로서, 하밀톤 원리에 근거한 비정상 자유표면파 문제에 대한 범함수를 정의하였다. 즉, 고전적인 하밀톤 원리에 자유표면 경계조건에 따른 수정항을 고려해 줌으로써 본 문제에 적합한 두 범함수를 만들 수 있다. 본 논문에서는 첫째, 선형문제에서의 고유치 문제를 해석하여 두 범함수가 선형 분산관계식의 상한과 하한치를 가지는 것을 보여준다. 둘째로, 비선형 정상문제에 두 범함수를 응용하여 고립파(solitary wave)의 파고 및 속도의 근사 관계식들을 유도하였다. 이 근사 관계식들의 수치계산결과는 Longuet-Higgins & Fenton(1974)의 해석해와 비교하여 좋은 결과를 보여준다. 셋째로, 전 유체영역을 유한요소로 분할하여 유한요소법에 의한 고립파의 파형 및 특성치들의 계산결과들을 보여준다. 특히 본 논문에서는 분할한 유한요소의 수에 따른 수치해의 수렴을 보여준다.

Abstract

This note describes an application of Hamilton's principle to nonlinear free-surface flow problems. Two functionals are constructed based on classical Hamilton's principle with a modification due to the presence of a free surface. As an effort towards the development of an efficient numerical scheme for our problem, we present the following three test results: i) The bounding principles of the eigenvalues for the linear dispersion relation. ii) By assuming steady solitary waves, an approximate relation between the amplitudes and the speeds of solitary waves are derived from the two functionals constructed. Their numerical results are compared with those of Longuet-Higgins & Fenton(1974). iii) The shapes and characteristics of solitary waves are computed from two sets of functionals by varying the number of total finite elements in the fluid domain.

1. 서 언

최근에 와서 비선형 자유표면파에 대한 수치해법 개

발에 많은 연구가 진행되고 있으나, 아직도 여러가지 어려운 문제점들 때문에 일반적인 문제에 대한 해법의 개발이 이루어지지 않고 있는 실정이다. 비선형 자유표면파 문제를 해석하기 위한 수치해석방법에서의 문

발 표 : 1989년도 대한조선학회 추계연구발표회('89.11. 11.)

접수일자 : 1989년 12월 2일, 재접수일자 : 1990년 5월 15일

* 경회원, 서울대학교 조선공학과

** 학생회원, 서울대학교 조선공학과

제점을 몇가지만 열거하자면, 유체영역 및 시간에 적용하는 수치해법의에 방사경계면에서의 적절한 수치방사조건의 선택, 채택된 수치방법에서의 분산관계, 대류항에 대한 수치모델의 정도 등을 들 수 있다. 본 논문에서는 유한요소법을 이용한 비선형 자유표면과 문제의 해법 개발에 대한 노력의 일환으로 우선 간단한 수치계산 모델을 통하여, 수치모델의 선형분산관계, 고립파의 파고와 속도 관계의 근사식 및 고립파에 대한 유한요소 수치해의 수렴 정도에 대한 기초연구를 수행한 결과 보고이다.

본 논문에서는 유체 및 그 유동을 비점성, 비회전성으로 가정한다. 이 경우 유체유동의 지배방정식은 고전적인 하밀턴의 원리에 의해 기술될 수 있다(Serrin, 1959). 이 변분원리에 자유표면 조건에 대한 항들을 추가하면 다음과 같이 비선형 자유표면 문제를 정식화할 수 있다.

2. 문제의 정식화

본 논문에서는 Fig. 1과 같은 좌표계를 사용하며 모든 물리량들을 길이, 질량, 시간 차원에 대해 $L, \rho l^3, \sqrt{l/g}$ 로 각각 무차원화한다. 여기서 l, ρ, g 는 각각 특성길이, 유체의 밀도 및 중력상수이다. 특성길이 l 은 구체적인 계산이 행해질 유한수심의 경우 수심 d 를 택한다.

하밀턴의 원리에 의하면 유체의 운동방정식(Euler equation)을 푸는것은 유체의 운동에너지 T , 위치에너지 V 그리고 외력이 한 일 W 로 정의되는 Lagrangian

$$L = T - V + W \tag{1}$$

의 시간에 대한 적분치인

$$F = \int_{t_0}^{t_1} L dt \tag{2}$$

가 정류치(stationary value)를 갖게하는 속도장을 구하는 것과 같은 문제이다. 유체의 속도장을 \vec{u} , 자유표면의 방정식을 $z = \zeta(x, y, t)$, 자유표면에 작용하는 의

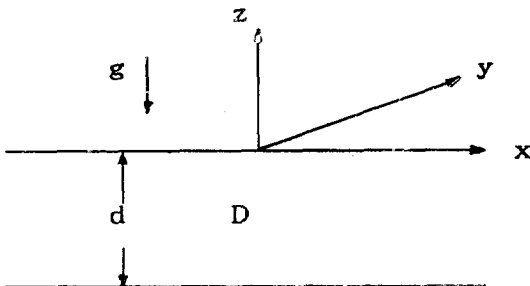


Fig. 1 Coordinate system

부압력을 $p_e(x, y, t)$ 로 정의하면 Lagrangian L 은

$$L = \frac{1}{2} \int_D \vec{u} \cdot \vec{u} dV - \frac{1}{2} \int_{S_F} \zeta^2 dS - \int_{S_F} p_e \zeta dS \tag{3}$$

로 표현된다. 여기서 S_F 는 xy 평면이다. 이때 속도장 \vec{u} 는 다음과 같이 유체영역 D 및 이의 경계면 ∂D 에서의 운동학적 구속조건들(kinematic constraints)을 만족해야한다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } D, \tag{4}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = V_n \quad \text{on } \partial D \tag{5}$$

식 (4)는 비압축성 유체의 연속방정식이며 식 (5)에서 V_n 은 경계면에서의 법선방향 속도성분이다. 특히 자유표면 S_F 에서 경계조건 (5)는

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = n_x \zeta_t \quad \text{on } S_F \tag{5'}$$

로 표현된다. 여기서 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 는 자유표면을 포함한 유체경계면에서의 바깥방향 법선벡터이다.

Lagrange multiplier이론에 의하면(Goldstein, 1980), 구속조건 (4), (5)는 Lagrange multiplier ϕ 를 도입하여 새로운 범함수 F^* 를 정의함으로써 제거할 수 있다. 새로운 범함수 F^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$F^* = \int_{t_0}^{t_1} L^* dt, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} L^* &= L + \int_D \phi \nabla \cdot \vec{u} dV - \int_{\partial D} \phi (\vec{u} \cdot \vec{n} - V_n) dS \\ &= L - \int_D \vec{u} \cdot \nabla \phi dV + \int_{S_F} \phi \zeta_t dS \\ &\quad + \int_{\partial D/S_F} \phi V_n dS \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 ϕ 는 자유표면 상에서

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y, \zeta, t) \tag{8}$$

와 같이 정의된다. 식 (6)에 주어진 F^* 에 대한 변분을 취해보면

$$\begin{aligned} \delta \int_{S_F} \phi \zeta_t dS &= \int_{S_F} \{ \zeta_t (\delta \phi + \phi \delta \zeta) + \phi \delta \zeta_t \} dS \\ &= \int_{S_F} \{ \zeta_t \delta \phi - \phi_t \delta \zeta + (\phi \delta \zeta)_t \} dS, \end{aligned} \tag{9.a}$$

$$\begin{aligned} \delta \int_D \vec{u} \cdot \left(\nabla \phi - \frac{1}{2} \vec{u} \right) dV &= \int_D \delta \left\{ \vec{u} \cdot \left(\nabla \phi - \frac{1}{2} \vec{u} \right) \right\} dV \\ &\quad + \int_{S_F} \vec{u} \cdot \left(\nabla \phi - \frac{1}{2} \vec{u} \right) \delta \zeta dS \\ &= \int_D \{ (\nabla \phi - \vec{u}) \cdot \delta \vec{u} - \nabla \cdot \vec{u} \delta \phi \} dV + \int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n} \delta \phi dS \\ &\quad + \int_{S_F} \vec{u} \cdot \left(\nabla \phi - \frac{1}{2} \vec{u} \right) \delta \zeta dS \end{aligned} \tag{9.b}$$

의 관계식들로부터

$$\begin{aligned} \delta F^* &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\int_D \{ (\vec{u} - \nabla \phi) \cdot \delta \vec{u} + \nabla \cdot \vec{u} \delta \phi \} dV \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_F} \left\{ -\phi_t - \vec{u} \cdot \left(\nabla \phi - \frac{1}{2} \vec{u} \right) - \zeta - p_e \right\} \delta \zeta dS \right] \end{aligned}$$

$$-\int_{\partial D} (\vec{u} \cdot \vec{n} - V_n) \delta \phi \, dS + \left[\int_{S_r} \bar{\phi} \delta \zeta \, dS \right]_t' - \frac{1}{2} \int_{S_r} \zeta^2 \, dS - \int_{S_r} p_e \zeta \, dS \tag{17}$$

을 얻으므로 F^* 의 정류치를 구하는 문제는 구속조건 (4), (5)와 함께

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad \text{in } D, \tag{10}$$

$$\phi_t + \vec{u} \cdot (\nabla \phi - u/2) + \zeta = -p_e \quad \text{on } S_F \tag{11}$$

의 조건식들로 귀결된다. 식(10)을 (11)에 대입하면

$$\phi_t + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \zeta = -p_e \quad \text{on } S_F \tag{11'}$$

를 얻게된다. 식(10)은 속도 u 가 비회전성이라는 조건이며 식(11')에 부함되게끔 유체영역 내에서의 압력 p 를

$$p = -\phi_t - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + z \tag{12}$$

로 정의하면 속도장 u 는 Euler방정식 및 자유표면에서의 동력학적 조건

$$p = p_e \quad \text{on } S_F \tag{13}$$

을 만족한다.

식(6), (7)에 정의된 범함수 F^* 에 의해 전개되는 하밀턴의 원리에서는 운동학적 구속조건들을 만족하게끔 도입한 Lagrange multiplier ϕ 라는 새로운 함수를 도입하여 구하여야 할 함수가 하나 더 늘어나게 되었다. 그러나 속도장 \vec{u} 가 비회전성을 미리 만족하는 경우와 연속방정식을 미리 만족하는 경우에 대해 하밀턴의 원리는 다음과 같이 더욱 간단한 형태의 범함수들로 표현된다.

2.1 비회전성을 미리 만족하는 경우

이 경우 \vec{u} 를 속도장함수(velocity potential) ϕ 로

$$\vec{u} = \nabla \phi \tag{14}$$

와 같이 정의할 수 있다. 이를 식(8)에 대입하면

$$J = \int_{S_r} \bar{\phi} \zeta_t \, dS - \frac{1}{2} \int_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dV - \frac{1}{2} \int_{S_r} \zeta^2 \, dS - \int_{S_r} p_e \zeta \, dS + \int_{\partial D \setminus S_F} \phi V_n \, dS \tag{15}$$

를 얻는다. 위에서 얻은 새로운 Lagrangian J 에 의해 정의되는 변분문제는 Luke의 변분원리(Luke, 1967)와 같음을 보일 수 있다(Miles, 1977).

2.2 연속 방정식을 미리 만족하는 경우

연속방정식(4)를 만족하는 u 는 2차원 유동의 경우에 스칼라인 유량함수 φ 로 표현된다. 즉

$$\vec{u} = (\varphi_y, -\varphi_x) \tag{16}$$

로 정의되며 이를 (7)에 대입하면 또 하나의 새로운 형태의 Lagrangian

$$K = \int_{S_r} \bar{\phi} (\zeta_t + \bar{\varphi}_x) \, dS + \frac{1}{2} \int_D \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV$$

을 얻게된다. 여기서

$$\bar{\varphi}(x, t) = \varphi(x, \zeta, t) \tag{18}$$

로 정의된다.

3. 보조 변분원리(Complementary Variational Principles)

속도장함수 ϕ 및 유량함수 φ 를 이용하여 표현된 변분원리 (15), (17)은 외력이 작용하지 않고($p_e=0$) 유체영역이 고정된 경우($\delta \zeta=0$) 각각

$$J = \int_{\partial D} V_n \phi \, dS - \frac{1}{2} \int_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dV, \tag{19}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_D \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV \tag{20}$$

로 표현된다. 엄밀해의 경우 범함수 J 와 K 는 유체의 운동에너지가 된다. 범함수 J 의 정류치를 찾는 문제는 J 의 최대치(maximum)를 찾는 문제가 된다. 유체의 경계면에서 ϕ 에 대한 Dirichlet type의 경계조건이 주어지는 경우 K 의 정류치를 찾는 문제는 K 의 최소치(minimum)을 찾는 문제가 된다. 각 원리는 Dirichlet principle 및 Kelvin principle로 알려져 있으며 이 두 원리를 보조변분원리(Complementary variational principle, Dual extremum principle)이라고 부른다(Bai, 1977). Bai(1977)는 이 원리를 이용하여 제한된 수로에서 영 및 무한대의 진동수의 상하 및 좌우 동요의 부가질량계수의 상한치(upper bound)와 하한치(lower bound)를 구하였다.

일반적인 비선형 자유표면파 문제의 경우 유체영역 자체가 해의 일부이므로 위와 같은 보조변분원리를 기대하기 힘들다. 그러나 파의 크기 및 유체속도의 크기가 충분히 작은 선형파의 고유치문제의 경우 다음과 같은 보조변분원리를 얻을 수 있다. 즉 외부 교란이 없고 ϕ, φ 및 ζ 의 크기가 작다고 가정하여 J 및 K 의 으뜸항만을 취하면

$$J \cong \int_{S_r} \phi(x, 0, t) \zeta_t \, dS - \frac{1}{2} \int_{D_0} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dV - \frac{1}{2} \int_{S_r} \zeta^2 \, dS, \tag{21}$$

$$K \cong \int_{S_r} \phi \zeta_t + \varphi_x(x, 0, t) \, dS + \frac{1}{2} \int_{D_0} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV - \frac{1}{2} \int_{S_r} \zeta^2 \, dS \tag{22}$$

를 얻는다. 여기서 D_0 는 교란되지 않은 유체영역을 표시한다. 식 (21)에서 ζ 에 대한 변분으로부터

$$\zeta = -\phi_t(x, 0, t) \tag{23}$$

을 얻고 식 (22)에서는 ϕ 에 대한 변분으로부터

$$\zeta_i = \varphi_z(x, 0, t) \quad (24)$$

의 관계식을 얻는다. 선형 분산식을 얻기위해 ϕ, φ 및 ζ 를 x -방향과 시간 t 에 대해 각각 파수(wave number) k 와 원진동수(circular frequency) ω 를 갖는 정현파의 형태로 가정하여

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \hat{\phi}(z)e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi(x, z, t) &= \hat{\varphi}(z)e^{i(kx - \omega t)}, \\ \zeta(x, t) &= \hat{\zeta}e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (25. a, b, c)$$

로 놓으면 식 (23), (24)는 각각

$$\hat{\zeta} = i\omega\hat{\phi}(0), \quad \hat{\zeta} = -\frac{k}{\omega}\hat{\varphi}(0) \quad (23', 24')$$

로 쓸 수 있다. 위의 관계식들을 (21), (22)에 대입하여 t 및 x 에 대하여 한 주기 및 파장으로 적분하여 평균을 취하면 다음과 같은 averaged Lagrangian

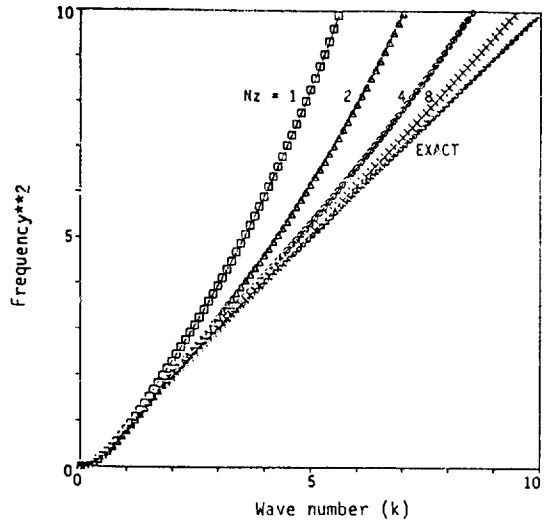
$$\bar{J} = \frac{1}{2}\omega^2|\hat{\phi}(0)|^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (|\hat{\phi}_z|^2 + k^2|\hat{\phi}|^2)dz, \quad (26)$$

$$\bar{K} = -\frac{k^2}{2\omega^2}|\varphi(0)|^2 + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (|\varphi_z|^2 + k^2|\varphi|^2)dz \quad (27)$$

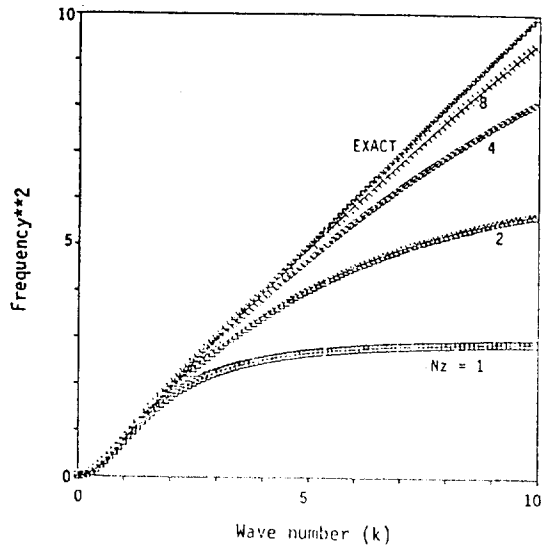
을 얻게된다. 주어진 파수 k 에 대해 원진동수 ω 를 구하는 문제는 (26), (27)의 정류치를 구하는 문제와 같게 되고 이는 고유치문제에서 잘 알려진 바와 같이 다음과 같은 Rayleigh quotient

$$R[\hat{\phi}] = \frac{\int_{-1}^0 (|\hat{\phi}_z|^2 + k^2|\hat{\phi}|^2)dz}{|\hat{\phi}(0)|^2} \quad (28)$$

의 최소치를 구하는 문제로 귀결된다. J 의 경우 이 최소치가 ω^2 의 값을 갖고 K 의 경우 k^2/ω^2 의 값을 갖게된다. 따라서, 속도장함수에 의한 범함수 J 를 이용한 근사계산에서는 원진동수 ω 가 엄밀해보다 높은 값을 얻게되고 유량함수에 의한 K 의 경우는 엄밀해보다 낮은 값을 얻게된다. 위의 해석은 수치근사에 있어서 깊이 방향의 근사만을 고려한 것이다. 실제로 수평방향의 근사까지 고려할 경우 주어진 파장에 대한 수치해의 파수는 엄밀해보다 높은 값을 주게되므로(Bai et al, 1989) 범함수 K 를 이용한 ω 의 근사값이 엄밀해보다 낮은 보장을 할 수 없게 된다. 그러나 같은 수평방향의 근사에 대해서 범함수 K 에 의한 ω 값은 J 에 의한 값보다 항상 낮은 값을 갖는다. 자유표면파문제를 초기치문제로 푸는 경우, 그 수치해법이 주는 최대 원진동수 ω_{max} 는 그 크기가 작을수록 시간적분시 수치해의 안정성(numerical stability)에 유리한 반면 수치해의 정도(accuracy)에는 큰 기여가 없으므로, 보다 작은 ω_{max} 값을 주는 유량함수에 의한 근사법이 속도장함수를 이용한 수치근사법보다 수치안정성에 더 유리한 결



(a) Velocity-potential approximation



(b) Stream-function approximation

Fig. 2 Linear dispersion relation of F.E.M.
Nz : No. of mesh in z-direction

과를 준다.

범함수 (26), (27)을 유한요소법으로 근사시켜 구한 선형 분산관계를 엄밀해 $\omega^2 = k \tanh k$ 와 비교하여 Fig. 2에 도시하였다. 여기서는 등 간격으로 분할된 각 요소에서 선형내삽함수(linear interpolation function)를 사용하였으며, 요소수가 증가함에 따라 근사해가 위에

서 설명한 상-하한 관계를 보이며 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

4. 2차원 정상문제의 해석

이 절에서는 유한수심에서의 외부교란이 없는 정상 문제를 범함수 J, K 를 이용하여 해석한다. 정상문제에서의 범함수 J, K 는 식 (15), (17)에서 시간 도함수 항들을 없애고, 비무늬이 방정식 (12)에 비무늬이 상수를 주기위해 위치에너지항에 수두 H 를 보정하면 다음과 같이 표현된다.

$$J = \int_{\partial D} V_n \phi \, dV - \frac{1}{2} \int_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dV - \frac{1}{2} \int_{s_f} (\zeta - H)^2 \, dx, \tag{29}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_D \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dV - \frac{1}{2} \int_{s_f} (\zeta - H)^2 \, dx \tag{30}$$

여기서 φ 는 유체영역의 경계면에서 Dirichlet type의 구속조건들을 만족하여야 한다. 속도 Q 로 이동하는 고립파(solitary wave)의 경우 수두 H 는

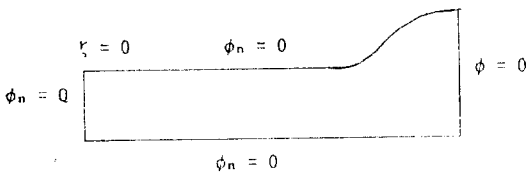
$$H = Q^2/2 \tag{31}$$

로 정해진다. 고립파형의 대칭성을 이용하면 풀어야 할 유체영역 및 ϕ, φ 의 경계조건은 Fig. 3(a), (b)와 같이 표현된다.

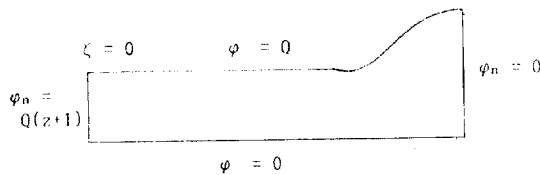
4.1. 고립파의 파고와 속도간의 근사 관계식

ϕ 및 φ 의 z 방향 변화를 간단한 형태의 함수로 근사하면 고립파의 속도 Q 와 파고 A 의 관계식을 직접 얻을 수 있다. 먼저 속도장함수 ϕ 의 형태를

$$L_1: \phi(x, z) = f_0(x) + f_1(x)(1+z), \tag{32}$$



(a) Velocity-potential formulation



(b) Stream-function formulation

Fig. 3 Boundary conditions for solitary-wave solutions

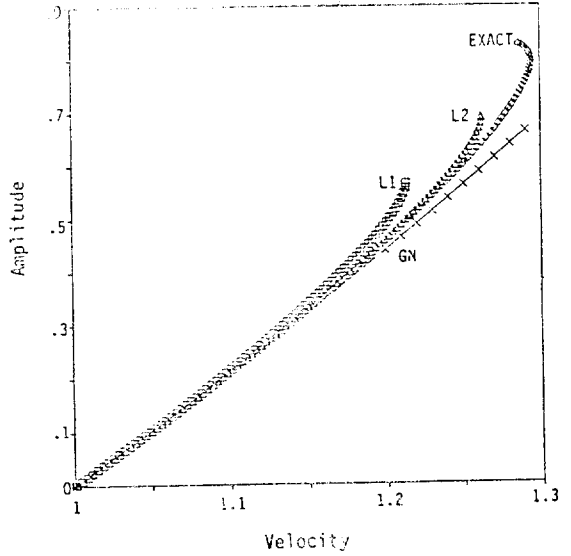


Fig. 4 Amplitude of solitary waves for a given velocity
 L_1 (or L_2): velocity-potential approximation by linear(or quadratic) interpolation in z -direction, GN : stream-function approximation by linear interpolation in z -direction, which is equivalent to Green-Naghdi equation

$$L_2: \phi(x, z) = f_0(x) + f_2(x)(1+z)^2 \tag{33}$$

의 형태로 가정하면 Appendix에 주어진 유도과정을 통해 다음의 근사 관계식을 얻게된다.

$$L_1: \frac{A^2 Q^2}{1+A} + \frac{1+A}{3} G^2 - A^2 = 0, \tag{34}$$

$$L_2: \frac{A^2 Q^2}{1+A} + \frac{1+A}{5} G^2 - A^2 = 0 \tag{35}$$

유량함수 φ 의 경우는 구속조건

$$\varphi = 0, \quad z = -1 \tag{36}$$

$$\varphi = Q, \quad z = \varphi \tag{37}$$

을 만족하는 가장간단한 형태인

$$\varphi(x, z) = \frac{Q}{1+\zeta(x)} (1+z) \tag{38}$$

로 가정하면 Appendix에서 보인 것처럼 Green-Naghdi 방정식과 같은 결과를 얻게되어 근사관계식

$$Q^2 = 1 + A \tag{39}$$

을 얻게된다. Fig. 4에서는 이들의 값들과 Longuet Higgins & Fenton(1974)의 해석적인 결과를 비교하여 도시하였다. Appendix에서 보인 것처럼 식 (34)와 (39)는 해석해와 $O(A)$ 까지 일치하지만 식 (35)는 $O(A^2)$ 까지 일치하여 그 결과가 $A=0.5$ 부근까지도 해석해와의 일치하는 것을 볼 수 있다. 식 (34), (35)에 주어

지는 속도장함수에 의한 근사식은 파고 A 가 한정된 값을 보이니, 유량함수에 의한 근사식 (39)는 무제한 큰 값을 가진다. 이는 Appendix에서 보인 것과 같이 속도장함수에 의한 변분원리는 동력학적 경계조건을 수식상으로 만족하여 파고 A 가 수두 $Q^2/2$ 를 넘지 못하는 반면 유량함수에 의한 변분원리는 운동학적 조건만을 수식상으로 만족하고 동력학적 조건은 약형의 의미 (weak sense)로 만족하기 때문이다.

4.2. 유한요소법에 의한 수치계산

고립파의 여러가지 성질들인 파고, 파형, 운동에너지 등에 대한 더욱 정확한 관계를 얻기 위해서는 식 (29), (30)에 주어진 범함수 J, K 를 근사할 때 더욱 확장된 함수공간에서 정의된 모사함수(trial function)를 사용하여 근사해를 구한다. 본 논문에서는 변분원리에 근거한 해법으로 유한요소법을 이용하여 수치계산을 수행하였다. 특히, 앞 절에서 언급한 유체영역이 고정된 경우에만 증명할 수 있는 상-하한 원리의 직접응용은 현재 이론적으로 증명할 수 없기에, 수치계산을 통해 이와 유사한 관계를 보여준다.

유한요소법에서는 먼저 속도장함수 ϕ 및 유량함수 φ 를

$$\phi(x, z) = \phi_i N_i(x, z; \zeta), \tag{40}$$

$$\varphi(x, z) = \varphi_i N_i(x, z; \zeta) \tag{41}$$

로 근사화시킨다. 여기서 $\{N_i(x, z; \zeta), i=1, \dots, N_e\}$ 는 N_e 개의 유한요소 모사함수이며 N_e 는 유한요소의 절점(nodal point) 갯수이다. 이들 모사함수들은 유체영역의 모양에 따라 변하므로 파형 ζ 의 함수이다. N_i 의 자 절점들을 z 방향으로만 움직이게끔 정의하면 자유표면 S_F 상의 N_i 의 값은 S_F 상에서 정의되는 함수

$$M_k(x) = N_{i_k}(x, z; \zeta)|_{S_F}, \quad k=1, \dots, N_F \tag{42}$$

로 표시된다. 여기서 N_F 는 자유표면의 절점수이며 i_k 는 자유표면상에서만 정의된 절점 k 에 대응되는 유체영역에서의 절점번호이다. 파의 방정식을

$$\zeta(x) = \zeta_k M_k(x) \tag{43}$$

로 근사시키면 식 (29), (30)의 범함수들은 다음과 같은 형태로 근사화된다. 즉

$$J = Q f_i \phi_i - \frac{1}{2} \phi_i K_{ij} \phi_j - \frac{1}{2} \zeta_k P_{k1} \zeta_1, \tag{44}$$

$$K = \frac{1}{2} \varphi_i K_{ij} \varphi_j - \frac{1}{2} \zeta_k P_{k1} \zeta_1 \tag{45}$$

으로 근사되며 여기서

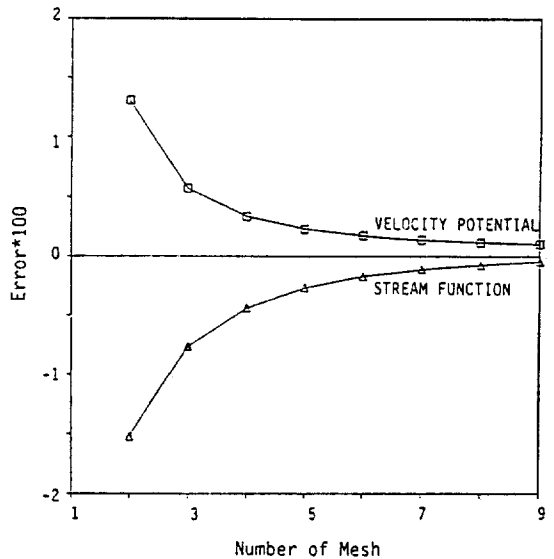
$$K_{ij} = \int_D \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dV, \tag{46.1}$$

$$P_{k1} = \int_{S_F} M_k M_1 \, dx. \tag{46.2}$$

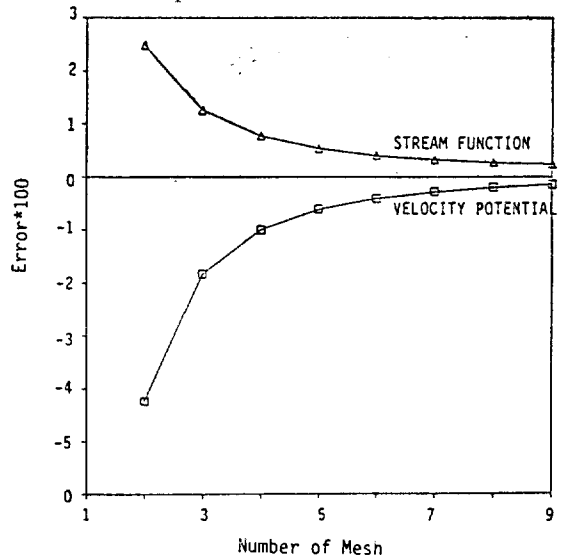
$$f_i = \int_{-1}^0 N_i|_{x=x_L} \, dz, \tag{46.3}$$

$$\zeta_k = \zeta_k - H \tag{47}$$

이고 x_L 은 원칙적으로 무한대의 값을 가져야하나 수치계산에서는 충분히 큰 값으로 대치한다.

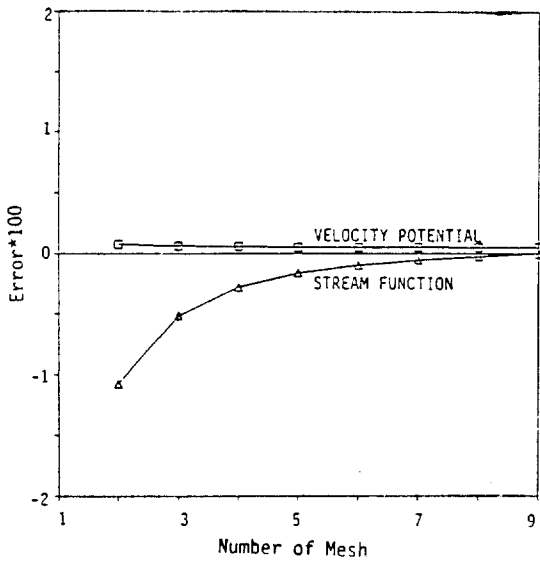


(a) Errors in amplitude A

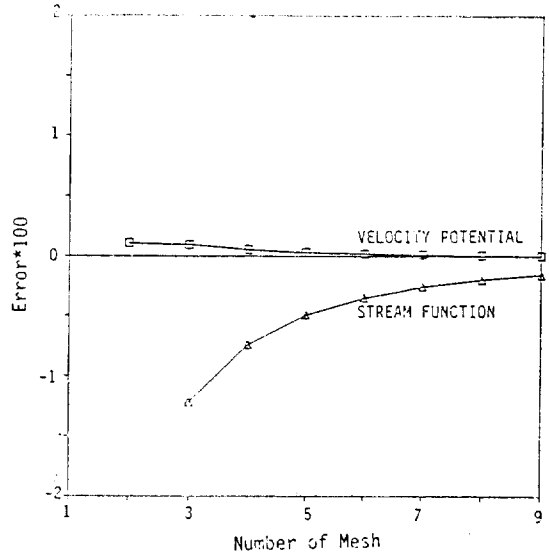


(b) Errors in kinetic energy T

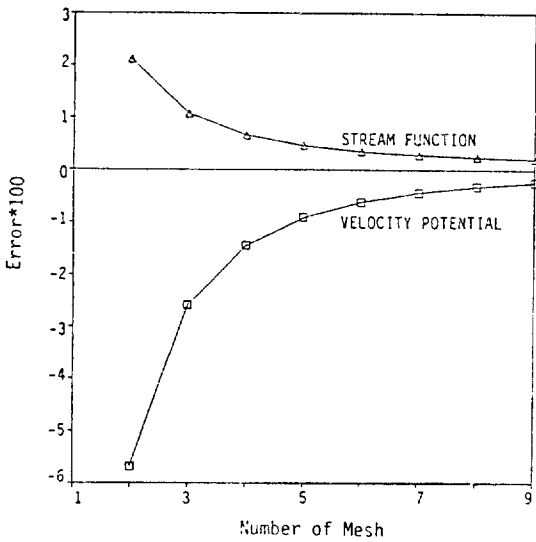
Fig. 5 Relative errors of numerical solutions for $Q=1.2$ (uniform-spacing discretization)



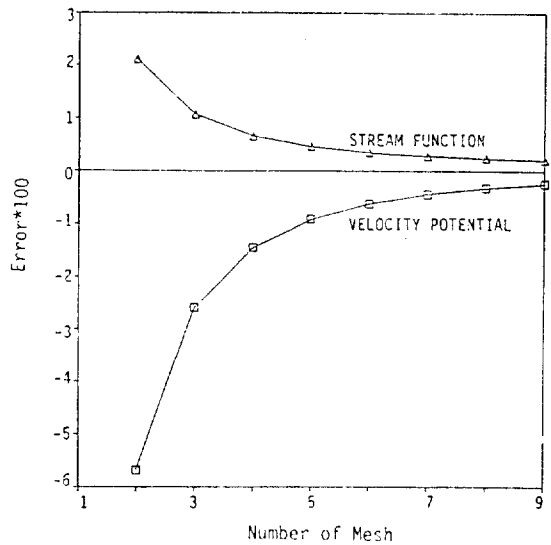
(a) Errors in amplitude A



(a) Errors in amplitude A



(b) Errors in kinetic energy T



(b) Errors in kinetic energy T

Fig. 6 Relative errors of numerical solutions for $Q=1.2$ (quadratic-spacing discretization)

J 및 K 가 정류치를 갖게되는 조건은 각각

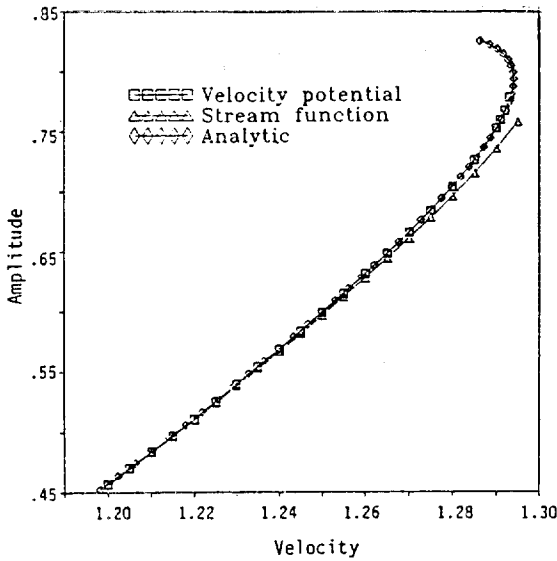
$$\frac{\partial J}{\partial \phi_i} = \frac{\partial J}{\partial \zeta_k} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \phi_i} = \frac{\partial K}{\partial \zeta_k} = 0 \quad (49)$$

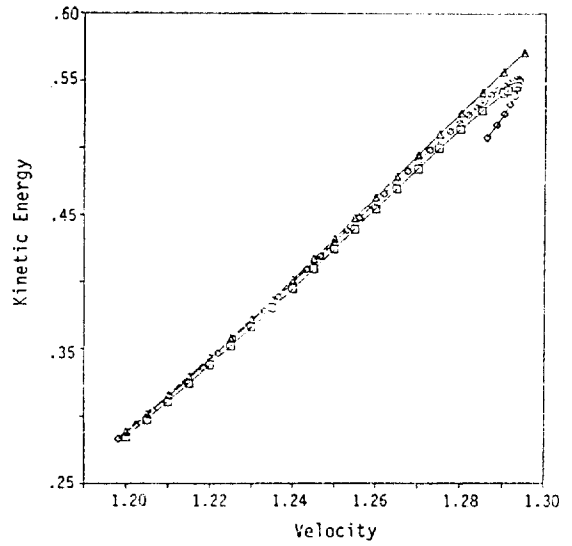
이 된다. 이들 방정식들은 ϕ_i, ϕ_i, ζ_k 에 대한 비선형 연립 대수방정식으로서 적절한 축차방법(iteration)으로

Fig. 7 Relative errors of numerical solutions for $Q=1.25$ (quadratic-spacing discretization)

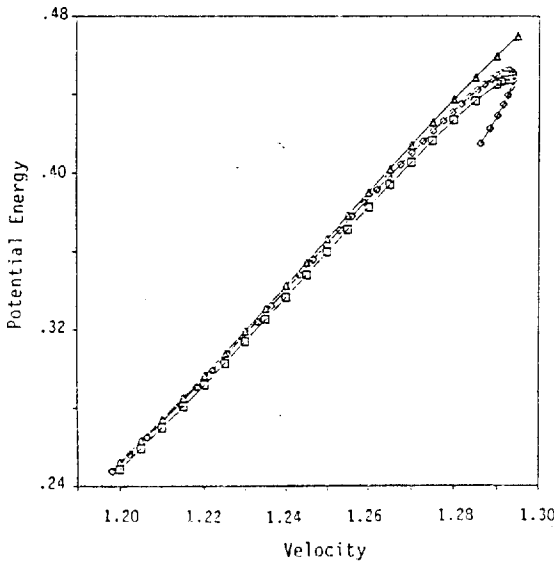
수치해를 구하여야한다. 본 논문에서는 비선형 방정식의 해법에 널리 사용되는 Newton방법을 이용하였다. 반복수정의 초기값으로는 알려진 근사해(Green-Naghdi 혹은 Boussinesque)를 이용하거나 여러속도에 대한 파랑은 구한경우 근접한 속도에서 구한 수치해를



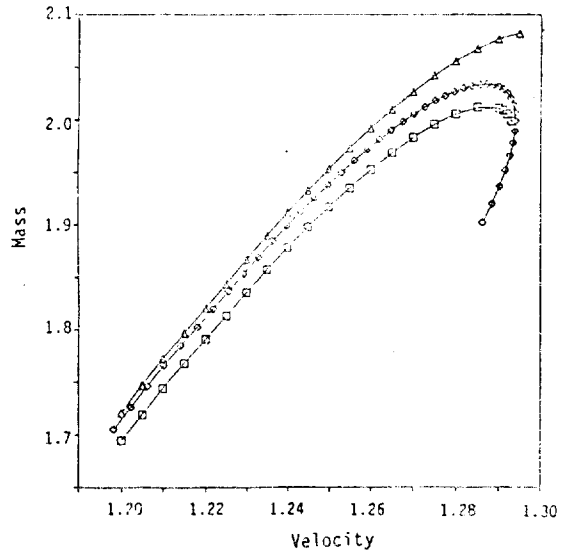
(a) Amplitude A



(b) Kinetic energy T



(c) Potential energy V



(d) Mass M

Fig. 8 Amplitude, kinetic energy, potential energy and mass of solitary waves for $N_z=5$

이용하였다. 수치계산의 수렴여부는 반복수정에 의한 파의 수렴값이 10^{-6} 이하가 되는 조건을 사용하였다. 모든 계산에서는 계산영역의 무차원화한 길이 x_L 을 500으로 잡았고 x 방향은 1,000개의 구간(1001절점)으로

$$x_i = -500 \left\{ 1 - \frac{(i-1)^2}{1000^2} \right\}, \quad i=1, \dots, 1001 \quad (50)$$

와 같이 자승간격(quadratic spacing)으로 분할하였다. 수치계산은 먼저 상-하한 관계들 알아보기 위하여 $Q=1.2, 1.25$ 에 대하여 x 방향의 요소수 및 분할방법을 달리하여 계산을 수행하였다. 수치계산된 결과중 파의 크기 A , 운동에너지 T , 위치에너지 V , 파형의 x 방향 적분치 M (mass)을 Longuet-Higgins & Fenton(1974)

의 해석해의 값을 기준으로 상대오차의 값을 비교하였다.

$Q=1.2$ 의 경우는 먼저 x 방향의 분할을 등간격으로 하여 요소수가 2, 3, ..., 9인 8가지의 경우를 계산하여 그 결과의 일부를 Fig. 5에 도시하였다. 그결과를 보면 파의 크기 A 는 속도장함수에 의한 근사값은 상한치를, 유량함수에 의한 근사값은 하한치를 보여준다. 그 외의 물리량들인 T, V, M 은 모두 그 반대의 경향들을 보였다. 그림에서는 운동에너지 T 만을 보여주며 V 와 M 의 값도 유사한 형태를 얻었다.

Fig. 6에서는 역시 $Q=1.2$ 의 경우에 x 방향의 분할을 요소수 N_x 에 대해

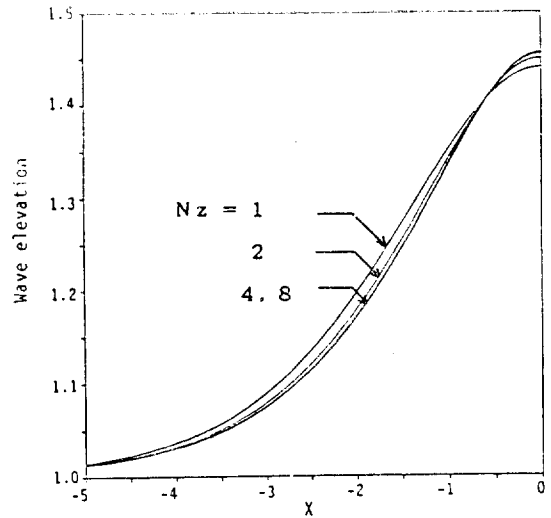
$$z_i = -\left(\frac{i-1}{N_x}\right)^2, \quad i=1, \dots, N_x+1 \quad (51)$$

으로 자승간격분할하여 계산된 결과를 보여준다. 각 물리량들의 상-하 한치의 경향은 등간격의 경우와 같으나 더욱 빠른 수렴을 보여준다. 특히 코립파의 파고는 속도장함수에 의한 근사의 경우 해석해의 결과에 유효숫자 범위 내에서 일정한 값으로 수렴한 결과를 보여준다.

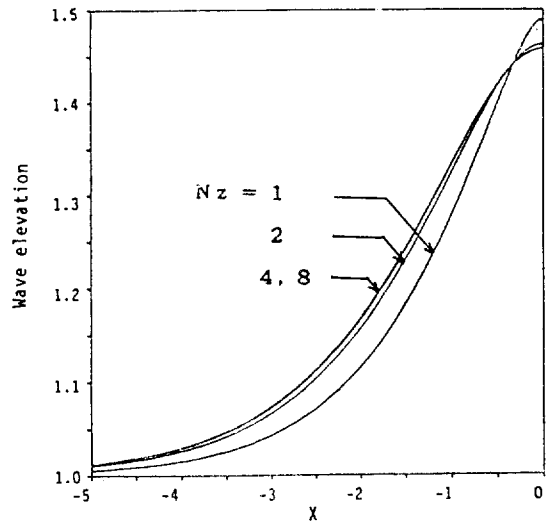
Fig. 7에서는 $Q=1.25$ 의 경우에 대해 x 방향으로 자승분할한 계산결과를 도시하였다. 이 경우에서도 $Q=1.2$ 와 같은 상-하한치 관계를 볼 수 있다.

Fig. 8에서는 x 방향으로 자승분할하여, $N_x=5$ 인 경우에 대해 Q 값을 변화시켜가며 계산된 각 물리량들의 값을 해석해와 비교하였다. Q 값을 변화시키며 계산한 결과에서도 앞서의 계산결과들과 같은 상-하한 관계의 경향들을 볼 수 있다. 파의 크기 A 의 경우 속도장함수에 의한 계산결과가 해석해와 거의 일치하는 것을 볼 수 있으나, 유체영역 전체에 대해 정의되는 물리량인 T, V, M 은 유량함수에 의한 계산이 더 좋은 결과를 보인다. 한편, 코립파의 속도 Q 가 1.28~1.29의 구간에서는 해석해의 경우 주어진 속도에 대해 두개의 파고 값을 보여주고 있으나 본 수치계산에서는 아직 이를 확인하지 못하였다. 이는, 본 수치계산에서는 주어진 속도 Q 에 대한 수치계산을 수행하는 방법을 사용하였기 때문이라고 생각되며 이 구간의 보다 더 자세한 계산을 위해서는 파고를 입력으로 하여 계산을 수행하는 것이 필요하다고 생각된다.

Fig. 9에서는 $Q=1.2$ 에 대해 x 방향을 등간격으로 분할하여, $N_x=1, 2, 4, 8$ 로 계산된 파형을 도시하였다. 속도장함수에 의한 근사에서는 요소수가 증가함에 따라 파고는 낮아지고 체적은 증가하는 경향을 볼 수 있다. 유량함수에 의한 근사에서는 이와 반대의 경향을 볼



(a) Stream-function formulation



(b) Velocity-potential formulation

Fig. 9 Wave profiles of solitary waves for $Q=1.2$. Uniform-spacing discretization with $N_x=1, 2, 4, 8$

수 있다. Fig. 10에서는 Fig. 9와 같은 경우에 대하여 x 방향을 자승간격으로 분할하여 계산한 결과를 보여준다. 이 경우 속도장함수에 의한 결과는 등간격의 결과에 비해 더 빠른 수렴을 보인다. 특히, 파정 근방의 파형은 N_x 가 2 이상인 경우에는 거의 일정한 형태를 유지하고 있다. 이러한 경향은 Fig. 6에서의 결과와도 일치한다.

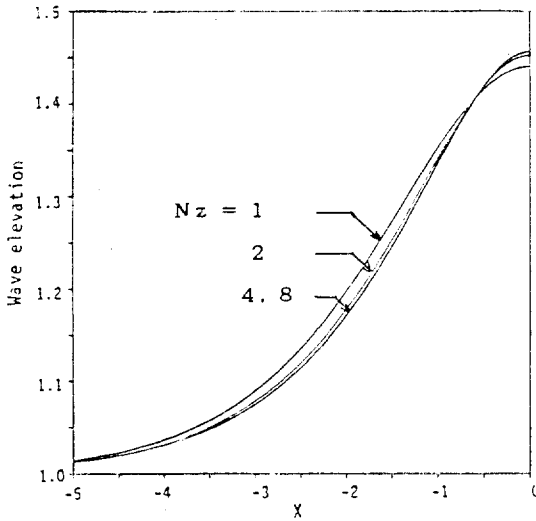
을 것으로 기대된다.

5. 결 론

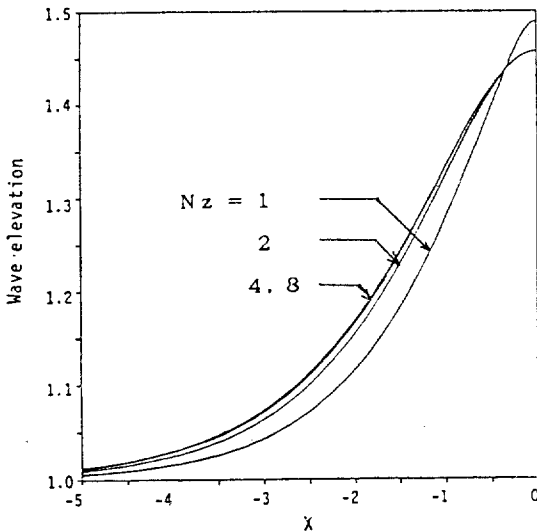
본 논문에서는 복잡한 비선형과 문제의 일반적인 해법개발의 노력의 일환으로서 간단한 수치모델을 택하여 하밀턴 원리에 근거한 이론 및 수치해법의 기본성질을 규명하고자 하였다. 먼저 선형화한 모델에서의 수치모델에서의 분산관계식을 해석하였고, 2차원 고딕파를 모델로 하여 파고 및 속도의 관계식을 두가지 다른 변분원리를 이용하여 근사관계식을 얻고 이를 상호 비교 검토하였다. 마지막으로 유한요소법을 응용하여 고딕파의 파형을 구하고 수치계산에서의 유한요소수의 증가에 따른 수치해의 수렴정도를 보여주었다. 보다 일반적인 비선형과 문제의 수치계산에 있어서, 이들 결과는 수치해의 유효범위를 미리 판단하는 자료가 될 수 있다고 생각된다. 앞으로 비선형과 문제의 해법개발에 앞서 이와 같이 적용할 수치계산 모델의 기본성질 규명에 지속적인 노력이 선행되어야 한다고 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] Bai, K.J., "The added-mass of two-dimensional cylinders heaving in water of finite depth", *J. of Fluid Mech.*, Vol. 81, pp.85-105, 1977.
- [2] Bai, K.J., "Sway added-mass of cylinders in a canal using dual-extremum principles", *J. of Ship Research*, Vol.23, pp.193-199, 1977.
- [3] Bai, K.J., Kim, J.W. & Kim, Y.H., "Numerical computations for a nonlinear free-surface flow problem", *Proc. 5th Int. Conf. on Num. Ship Hydro.*, Hiroshima, Japan, pp.403-419, 1989.
- [4] Fenton, J.D., "A ninth-order solution for the solitary wave", *J. of Fluid Mech.*, Vol.53, pp. 257-271, 1982.
- [5] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wisley Pub., 1980.
- [6] Longuet-Higgins, M.S. & Fenton, J.D., "On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II", *Proc R. Soc. London A340*, pp.471-493, 1974.
- [7] Luke, J.C., "A variational principle for a fluid with a free surface", *J. of Fluid Mech.*, Vol. 27, pp.395-397, 1967.



(a) Stream-function formulation



(b) Velocity-potential formulation

Fig. 10 Wave profiles of solitary waves for $Q=1.2$. Quadratic-spacing discretization with $N_z=1, 2, 4, 8$

이상의 유한요소법에 의한 수치계산결과로부터, 비록 이론적으로는 아직 증명할 수는 없으나, 비선형 자유표면파 문제에 있어서 속도장함수와 유량함수에 의한 근사해법은 상호 대칭적인 해의 수렴거동을 갖고 있음을 확인하였다. 이 성질을 이용하면 보다 일반적인 비선형 자유표면파 문제의 해를 원하는 오차범위 내에서 수치적으로 구할 수 있는 방법을 개발할 수 있

- [8] Miles, J.W., "On the Hamilton's principle for free-surface waves", *J. of Fluid Mech.*, Vol. 83, pp.153-158.
- [9] Naghdi, P.M., "Comments on cnoidal wave solution obtained for two-dimensional flows confined to the $x-z$ plane", ME290B-Nonlinear continuum mechanics lecture notes, Dept. of Mech. Eng., Univ. Calif., Berkeley, 1981.
- [10] Serrin, J. Mathematical principles of classical fluid mechanics, Encyclopedia of physics VIII/1 Fluid Dynamics I, 1959.

Appendix 고립파의 파고속도 관계식

(1) 속도장 함수에 의한 근사

속도장 함수 ϕ 의 형태를

$$\phi(x, z) = f_0(x) + f_n(x)(1+z)^n \tag{A.1}$$

으로 가정하면

$$\phi_x = f_n(1+z)^n \tag{A.2}$$

$$\phi_z = n f_n(1+z)^{n-1} \tag{A.3}$$

를 얻게된다. 이 관계식들을 본문의 식 (29)에 대입하여 z 방향의 적분을 수행하면

$$J = \int L_J dx$$

$$L_J = -\frac{1}{2} \left\{ h f_0'^2 + \frac{2h^{n+1}}{n+1} f_0' f_n' + \frac{h^{2n+1}}{2n+1} f_n'^2 + \frac{n^2 h^{2n-1}}{2n-1} f_n'^2 + (h-H)^2 \right\} \tag{A.4}$$

을 얻는다. 여기서

$$h(x) = 1 + \zeta(x), \quad H = 1 + Q^2/2 \tag{A.5}$$

이며 $x = -\infty$ 에서의 경계면 적분은 계산의 편의상 무시하였다. 식 (A.4)에서의 Lagrangian L 은 f_0 에 무관하므로

$$\frac{\partial L_J}{\partial f_0} = -h f_0' - \frac{h^{n+1}}{n+1} f_0' = -Q \tag{A.6}$$

의 질량 보존식을 얻는다. 또한 파고 h 에 대한 변분으로부터

$$-\frac{\partial L_J}{\partial h} = \frac{1}{2} (f_0' + h^n f_n')^2 + \frac{n^2}{2} h^{2n-2} f_n'^2 + (h-H) = 0 \tag{A.7}$$

을 얻는다. 식 (A.7)은 자유표면에서의 동력학적 조건이 된다. f_n 에 대한 변분대신 Lagrangian L_J 에 대한 Hamiltonian

$$H_J = f_0' \frac{\partial L_J}{\partial f_0'} + f_n' \frac{\partial L_J}{\partial f_n'} - L_J \tag{A.8}$$

이 보존되는 조건식을 이용하면

$$h f_0'^2 + \frac{2h^{n+1}}{n+1} f_0' f_n' + \frac{h^{2n+1}}{2n+1} f_n'^2 - \frac{n^2 h^{2n-1}}{2n-1} f_n'^2 - (h-H)^2 = Q^2 - Q^4/4 \tag{A.9}$$

의 선형운동량(linear momentum)의 보존식을 얻는다. 식 (A.9)의 우변은 $x = -\infty$ 에서의 경계조건

$$h=1, \quad f_0'=Q, \quad f_n=f_n'=0 \tag{A.10}$$

으로 부터 얻어졌다. 식 (A.6, 7, 9)에서 f_0', f_n' 을 소거하면

$$Q^2 + \frac{h^2}{2n+1} G_n^2(h, f_n) - \frac{n^2 h^{2n}}{2n+1} f_n^2 - h(h-H)^2 - h(Q^2 - \frac{Q^4}{4}) = 0 \tag{A.11}$$

의 관계식을 얻는다. 여기서

$$G_n(h, f_n) = [2(H-h) - n^2 h^{2n-2} f_n^2]^{1/2} - \frac{Q}{h} \tag{A.12}$$

로 정의된다. 대칭면 $x=0$ 에서는 $f_n=0, h=1+A$ 이므로 이를 (A.12)에 대입하면

$$\frac{A^2 Q^2}{1+A} + \frac{1+A}{2n+1} G^2 - A^2 = 0 \tag{A.13}$$

$$G = G_n(1+A, 0) = -\frac{Q}{1+A} + (Q^2 - 2A)^{1/2} \tag{A.14}$$

를 얻는다.

식 (A.14)의 관계식을 파의 크기 A 가 작을 경우에 대해 근사시키면

$$Q^2 = 1 + A - \frac{A^2}{4(2n+1)} + O(A^3) \tag{A.15}$$

의 관계를 얻는다. $n=2$ 인 경우 위의 관계식은

$$Q^2 = 1 + A - \frac{A^2}{20} \tag{A.15}$$

가 되어 해석해의 결과와 A^2 의 차수까지 일치한다 (Fenton, 1972).

(2) 유량함수에 의한 근사.

유량함수 φ 는 해지면 및 수면에서의 경계조건

$$\varphi(x, -1) = 0, \quad \varphi(x, \zeta) = Q \tag{A.16}$$

을 만족해야 한다. 이들을 만족하는 가장 간단한 형태의 함수인

$$\varphi(x, z) = \frac{Q}{h(x)} (1+z) \tag{A.17}$$

을 본문의 식 (30)에 대입하여 깊이 방향의 적분을 수행하면

$$K = \int L_K dx, \quad L_K = \frac{Q^2 h'^2}{6h} + \frac{Q^2}{2h} - \frac{1}{2} (h-H)^2 \tag{A.18}$$

을 얻게된다. Lagrangian L_K 의 Hamiltonian H_K 의 보존법칙을 이용하면

$$\frac{Q^2 h'^2}{3h} - \frac{Q^2}{h} + \frac{1}{2}(h-H)^2 = -Q^2 + \frac{Q^4}{4} \quad (\text{A.19})$$

의 선형운동량 보존법칙을 얻고 이로부터

$$h' = \pm \frac{h-1}{Q} \left(\frac{h-Q^2}{3} \right)^{1/2} \quad (\text{A.20})$$

을 얻는다. 식 (A.20)은 Green-Naghdi 방정식의 결과와 같다(Naghdi, Lecture Note). 대칭면 $x=0$ 에서

의 조건

$$h' = 0, \quad h = 1 + A \quad (\text{A.21})$$

을 식 (A.20)에 대입하면

$$Q^2 = 1 + A \quad (\text{A.22})$$

의 근사식을 얻는다.