
 論 文

大韓造船學會誌
 第27卷 第1號 1990年 3月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 27, No. 1, March 1990

전진하며 동요하는 2차원 특이점에 의하여 발생하는
 자유표면파에 미치는 표면장력의 영향

최 항 순*, 최 재 식**

Surface-Tension Effects on the Flow Caused by a Two-Dimensional Pulsating
 Source Moving with a Constant Speed beneath the Free Surface

by

Hang S. Choi*, and Jae S. Choi**

요 약

본 논문에서는 표면장력 효과를 포함한 선형포텐셜이론을 이용하여 전진하며 동요하는 2차원 소오스에 의하여 발생하는 자유표면파를 해석하였다. 속도를 U , 진동수를 ω 그리고 중력가속도를 g 라 할 때, $\tau = U\omega/g$ 로 정의된 무차원 진동수가 임계치 1/4보다 작을 때에는 6개의 파성분이 나타남을 보였다. 이 중에서 특히 2개의 파성분은 표면장력의 영향을 지배적으로 받아 소오스 앞면에 발생하는 데, 그중 하나는 전진속도 방향으로 다른 하나는 반대방향으로 매우 느리게 전파한다. 동요수가 작을 경우에는 표면장력의 영향이 약해지며 임계치 1/4보다 조금 큰 진동수에서 공진이 발생한다. 그러나 동요수가 클 때에는 ($\nu = \omega^2/g > 20$) 표면장력효과가 크게 작용하여 발생파의 진폭이 감소하며 분산되어 임계치에서의 공진현상이 사라진다. 한편 전진속도가 표면장력파의 최소위상속도인 0.232 m/sec인 때는 해가 존재하지 않는다.

Abstract

This paper deals with the flow caused by a two-dimensional pulsating source, which moves with a constant horizontal speed beneath the free surface. The analysis is based on linear potential theory including surface tension effects. In the case of subcritical reduced frequencies $\tau < 1/4$ ($\tau = U\omega/g$, $U = \text{constant speed}$, $\omega = \text{circular frequency}$, $g = \text{gravitational acceleration}$), six wave components are found. Two of them are largely affected by surface tension, which propagate ahead of the source in the direction of and opposite to the steady translation, respectively. The rest are almost identical with those found by Haskind (1954), i.e. for which the surface tension effect is negligible. For low oscillation frequencies, the resonant frequency still exists at τ only slightly greater than 1/4. For oscillation frequencies greater than $\nu (= \omega^2/g) > 20$, the surface tension effect is so significant that it disperses generated waves and consequently

접수일자 : 1989년 7월 20일, 재접수일자 : 1989년 11월 30일

* 경희원, 서울대학교 공과대학

** 서울대학교 대학원(현재 대우조선공업주식회사)

the singular phenomenon is removed. However, in addition to the gravity breaking, capillary breakings occur when the translation speed coincides with the minimum capillary celerity.

1. 서 론

Haskind[1]는 자유표면 아래에서 진진하며 동요하는 2차원 소오스에 의하여 발생하는 유동을 선형포텐셜이론으로 해석하였다. 그의 결과에 따르면 무차원 진동수 τ 가 임계치 $\tau_0(=1/4)$ 보다 작으면 소오스 앞면에 진진속도방향으로 전파하는 1개의 파성분이 (이를 Haskind의 표시에 따라 v_2 라 하자), 소오스 뒷면에는 진진운동방향으로 1개의 특성파(v_1) 그리고 반대방향으로 전파하는 2개의 특성파(v_3 와 v_4)등 4개의 성분파가 존재한다. 특히 τ 가 임계치에 접근하면 파성분 v_1 과 v_2 의 군속도는 진진속도와 같아져 이들 파에너지는 발산되지 못하여 파고가 무한대에 이르는 특이현상을 초래한다.

실제 유동에서 파고가 무한대에 이를 수 없음을 자명한 사실이다. 그 원인으로 포텐셜유동에서는 비선형성을 그리고 실제 유체에서는 점성과 표면장력을 생각할 수 있다. 포텐셜이론에 입각한 비선형성에 대하여는 Dagan & Miloh[2]가 섭동법을 이용하여 파기울기 ($kA=O(\epsilon)$, $\epsilon=O(1)$)의 3차항까지 포함시킨 비선형해를 구하여 속도포텐셜은 $\tau=\tau_0$ 에서 $O(\epsilon)^{1/2}$ 의 크기로 유한함을 밝혔다. 이들이 유도한 해의 본질은 잘 알려져 있는 3차 비선형 파분산식인 진폭분산(amplitude dispersion)으로 이해할 수 있다. 점성이나 표면장력 또한 파를 감소시키며 분산시키는 효과가 있으므로 임계치에서의 특이현상을 제거할 수 있는 역학적 기구일은 분명하지만 아직 이에 대한 연구가 수행되지 않았다.

이러한 배경에서 본 논문에서는 표면장력의 영향을 규명하고자 한다. 경계면에 작용하는 압력은 표면장력 계수에 비례하고 곡률반경에 반비례한다. 공기에 대한 물의 표면장력계수는 매우 작으므로($\sigma=0.07$ N/m) 파장이 짧은 파의 경우에만 표면장력의 효과가 나타난다. 문제를 가능한 간단하게 만들기 위하여 여기서는 선형의 범위에서 처리하고자 한다.

2. 선형자유표면경계조건

일정속도 $-U$ 로 이동하며 양의 y 축이 수직상방을 가리키는 우수좌표계에서 표면장력에 의하여 자유표면,

$y=\zeta(x, t)$,에 작용하는 압력은(Wehausen & Laitone [3])

$$-P=\sigma\eta_{xx}[1+\eta_x^2]^{-3/2} \quad (1)$$

이며, 포텐셜유동이란 가정하에 선형항만을 취하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$-P_t=\sigma\eta_{ixi}=-\sigma\phi_{yyy} \quad (y=0). \quad (2)$$

식(2)를 얻는 과정에서 운동학적 선형 자유표면경계조건과 2차원 연속방정식을 이용하였다. 이동좌표계에 대한 선형 자유표면 경계조건은 잘 알려져 있다.

$$(\partial/\partial t-U/\partial x)^2\phi+g\phi_y+(\sigma/\rho)\phi_{yyy} \\ +\mu(\partial/\partial t-U\partial/\partial x)\phi=0 \quad (y=0), \quad (3)$$

여기서 ρ 는 물의 밀도를 그리고 μ 는 가장마찰계수를 뜻한다.

진진하며 진동수 ω 로 동요하는 소오스에 대한 속도포텐셜은

$$\Phi(x, y, t)=Re\{\phi(x, y)\exp(i\omega t)\} \quad (4)$$

로 표시할 수 있으며, 이를 자유표면 경계조건 식(3)에 대입하면 아랫식을 얻는다.

$$\alpha\phi_{yyy}+\tau^2/\nu\phi_{xx}-2i\tau(1-i\beta)\phi_x \\ +\phi_y-\nu(1-2i\beta)\phi=0 \quad (y=0), \quad (5)$$

여기서 $\alpha=\sigma/\rho g$, $\beta=\mu/2\omega$, $\nu=\omega^2/g$ 이다.

즉, α 는 표면장력효과물 그리고 β 는 가장마찰력의 영향을 나타내는 데, β 는 결국 0으로 처리하여야 하며, 만약 표면장력을 고려하지 않으면 ($\alpha=0$) 윗 식은 일반 선형 자유표면 경계조건이 된다. 한편 선형분산관계식은

$$\omega^2=gk(1+\alpha k^2) \quad (6)$$

와 같이 3차 비선형분산식과 유사한 형태이지만, 여기서는 α 가 상수이므로 연속적인 분산의 변화를 나타내지는 못한다.

식(5)를 만족하는 속도포텐셜을 유도하기 위하여 다음과 같은 Green함수를 도입한다.

$$G(x, y)=-\ln r+\ln r'+F_1(z)+F_2(\bar{z}), \\ r=|z-\zeta|, \quad r'=|z-\bar{\zeta}|, \\ z=x+iy, \quad \zeta=\xi+i\eta, \quad (7)$$

여기서 \bar{z} 와 $\bar{\zeta}$ 는 z 와 ζ 의 공액복소수를 뜻한다.

이제 Green함수를 식(5)에 대입하면 z 의 함수 F_1 과 \bar{z} 의 함수 F_2 에 대한 상미분방정식을 얻는다.

$$-i\alpha F_1''' + \tau^2/\nu F_1'' + i\{1-2\tau(1-i\beta)\}F_1' \\ -\nu(1-2i\beta)F_1=f(z), \quad (8)$$

$$i\alpha F_2''' + \tau^2/\nu F_2'' - i\{1+2\tau(1-i\beta)\}F_2' \\ -\nu(1-2i\beta)F_2=\bar{f}(\bar{z}), \quad (9)$$

$$f(z) = -i/(z-\bar{\zeta}) + 2ia/(z-\bar{\zeta})^3,$$

여기서 F_1' 는 z 에 대한 미분, F_2' 는 \bar{z} 에 대한 미분이며, $\bar{f}(z)$ 는 $f(z)$ 의 공액복소함수를 뜻한다.

즉, 파를 나타내는 포텐셜은 3계 선형 미분방정식의 해이며, 비동차항은 더블렛과 표면장력에 의한 Hexapole로 구성되어 있다. 윗식으로부터 포텐셜 $F_1(z)$ 와 $F_2(\bar{z})$ 는 Schwarz의 반경정리(reflection theorem)을 만족함을 알 수 있다.

3. 특성파수

식(8)과 (9)로 주어진 3계 선형 미분방정식을 풀기 전에 이들의 특성방정식을 살펴보자. 식(8)에 대한 특성방정식의 근을 $-ik_n(n=1, 2, 3)$ 으로, 그리고 식(9)에 대한 특성방정식의 근을 $i k_n(n=4, 5, 6)$ 이라 하면, 이에 대한 대수방정식은 다음과 같다.

$$k^3 - (\tau^2/\alpha\nu)k^2 + \{[1 \mp 2\tau(1-i\beta)]/\alpha\}k - (\nu/\alpha)(1-2i\beta) = 0, \quad (10)$$

세번째항에서 $n=1, 2, 3$ 일 때에는 -부호를, 그리고 $n=4, 5, 6$ 에 대하여는 +부호를 택한다.

Cardan의 3차 방정식에 대한 대수해법으로 k_n 을 바로 구할 수 있다.

$$k_{1,4} = \tau^2/3\alpha\nu - 1/2(S+T) - i\sqrt{3}/2(S-T), \quad (11)$$

$$k_{2,5} = \tau^2/3\alpha\nu - 1/2(S+T) + i\sqrt{3}/2(S-T), \quad (12)$$

$$k_{3,6} = \tau^2/3\alpha\nu + (S+T), \quad (13)$$

여기서

$$S = [R + (R^2 + Q^3)^{1/2}]^{1/3},$$

$$T = [R - (R^2 + Q^3)^{1/2}]^{1/3},$$

$$R = (3\alpha\nu)^{-3}[\tau^6 - 9/2\alpha\nu^2\tau^2\{1 \mp 2\tau(1-i\beta)\} + 27/2\alpha^2\nu^4(1-2i\beta)],$$

$$Q = -(3\alpha\nu)^{-2}[\tau^4 - 3\alpha\nu^2\{1 \mp 2\tau(1-i\beta)\}],$$

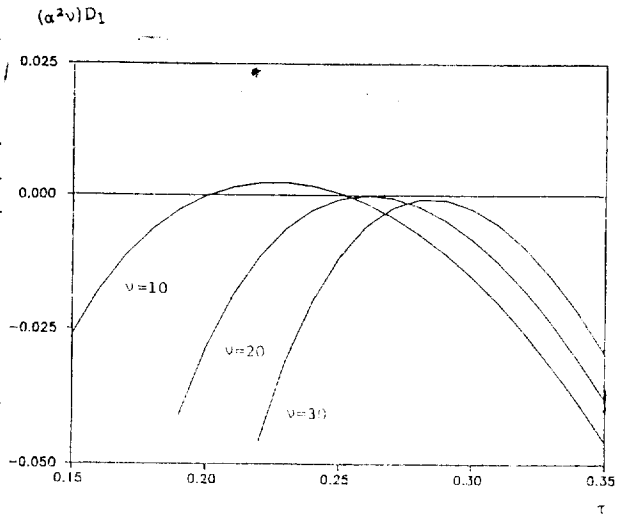
$$R^2 + Q^3 = -(108\alpha^4\nu^2)^{-1}[\tau^4\{1 \mp 4\tau(1-i\beta)\} - 4\beta^2\tau^6 - 2\alpha\nu^2\{1 \mp 2\tau(1-i\beta)\}\{2 \mp 8\tau(1-i\beta)\} - \tau^2(1-2i\beta+8\beta^2)] - 27\alpha^2\nu^4(1-2i\beta)^2].$$

여기서도 앞에서와 같이 $k_n(n=1, 2, 3)$ 에 대하여는 -부호를, $k_n(n=4, 5, 6)$ 에 대하여는 +부호를 적용한다. 표현식이 간단하지 않으므로 근사해를 구하여 개략적인 특성을 살펴보자. 우리가 관심있는 경우는

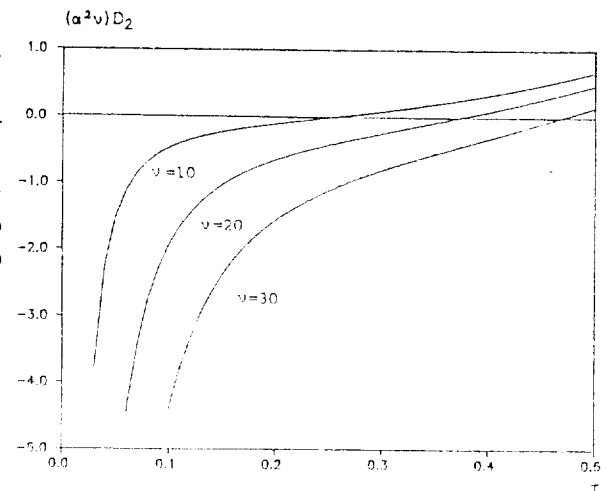
$$\alpha = 7.143 \times 10^{-6} \text{m}^2, \quad \beta \rightarrow 0, \quad \tau \approx 1/4, \quad \nu = O(1)$$

이므로 $k_n(n=1, 2, 3)$ 에 대한 S 와 T 의 근사식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{S}{T} \right\} &= \frac{\tau^2}{3\alpha\nu} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha\nu^2}{\tau^4} \{1 - 2\tau(1-i\beta)\} \right. \\ &\quad \left. \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha\nu^2}{\tau^4} \{1 - 4\tau(1-i\beta)\}^{1/2} \right] + O(\alpha, \beta)^2 \end{aligned} \quad (14)$$



(a) D_1



(b) D_2

Fig. 1 Variation of D with τ for 3 different ν 's

$k_n(n=4, 5, 6)$ 에 대하여도 식(14)가 그대로 유효하나, 대괄호안 2제항과 3제항에 포함되어 있는 2τ 와 4τ 앞의 부호가 +가 되어야 한다. S 와 T 에 대한 근사치를 이용하면 특성파수의 근사치는 쉽사리 구해진다.

$$k_{1,4} = (\nu/\tau^2)\{1 \mp 2\tau(1-i\beta)\} - \nu(1-2i\beta) \quad (15)$$

$$k_{2,5} = \nu(1-2i\beta) \quad (16)$$

$$k_{3,6} = (\tau^2/\alpha\nu) - (\nu/\tau^2)\{1 \mp 2\tau(1-i\beta)\} \quad (17)$$

표면장력을 고려하지 않은 Haskind의 결과($v_n, n=1, 2, 3, 4$)와 비교하면

$$k_{1,2} \cong v_{1,2}, \quad k_{4,5} \cong v_{3,4}$$

임을 알 수 있다. 즉, 이들 4개의 파성분은 비교적

파장이 길므로 표면장력의 영향이 상대적으로 미약하여 표면장력이 작용하지 않을 때와 거의 같은 특성을 지니고 있다. 그러나 k_3 과 k_0 은 표면장력의 영향으로 발생한 파성분으로 모두 소우스앞면에 나타나지만, k_3 는 전진속도 방향으로 ($\text{Im } k_3 < 0$), k_0 은 ($\text{Im } k_0 > 0$) 반대 방향으로 전파한다.

4. 속도포텐셜

특성방정식의 근 $k_n(n=1, 2, \dots, 6)$ 을 이용하여 식(8)과 (9)로 주어진 3계 선형비동차 미분방정식을 풀면 함수 $F_1(z)$ 과 $F_2(\bar{z})$ 를 얻는다(부록 참조).

$$F_1(z) = D_1^{-1} [(k_3 - k_2)e^{-ik_1z} \int_{-\infty}^z e^{ik_1z} + (k_1 - k_3)e^{-ik_2z} \int_{-\infty}^z e^{ik_2z} + (k_2 - k_1)e^{-ik_3z} \int_{-\infty}^z e^{ik_3z}] f(z) dz, \quad (18)$$

$$F_2(\bar{z}) = D_2^{-1} [(k_0 - k_5)e^{ik_4\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} e^{-ik_4\bar{z}} + (k_4 - k_0)e^{ik_5\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} e^{-ik_5\bar{z}} + (k_5 - k_4)e^{ik_6\bar{z}} \int_{-\infty}^{\bar{z}} e^{-ik_6\bar{z}}] \bar{f}(\bar{z}) d\bar{z} \quad (19)$$

여기서

$$D_1 = -(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1) \\ D_2 = -(k_4 - k_5)(k_5 - k_6)(k_6 - k_4)$$

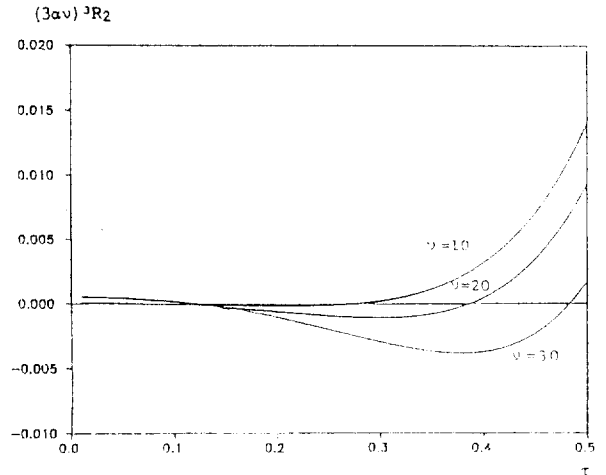
이며, $f(z)$ 는 식(8)에 제시한 비동차항이다.

식(11~13)으로 주어진 k_n 에서 가상 마찰계수 β 를 0으로 놓고 $D_{1,2}$ 에 대입하면

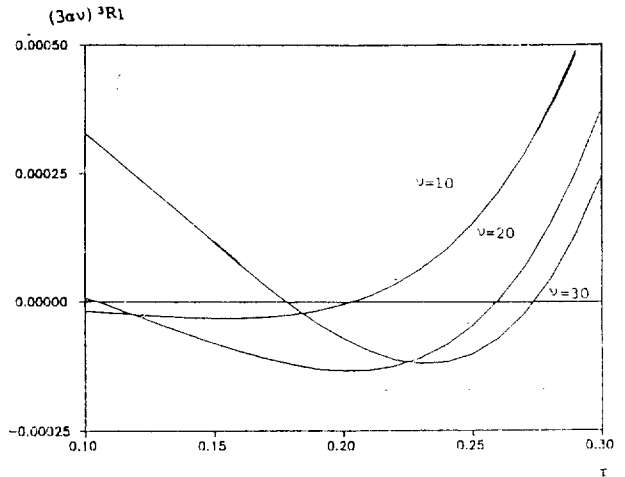
$$\left\{ \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix} \right\} = -6\sqrt{3}i(R^2 + Q^2)^{1/2} \\ = (\tau^2/\alpha^2\nu)[1 \mp 4\tau - 2(\alpha\nu^2/\tau^4)(1 \mp 2\tau) \\ (2 \mp 8\tau - \tau^2) - 27(\alpha^2\nu^4/\tau^4)]^{1/2} \quad (20)$$

을 얻는다. 표면장력을 무시하면 대괄호는 Haskind의 결과와 같이 $[1 - 4\tau]$ 가 되어 $\tau = 1/4$ 에서 특이점이 된다. 표면장력을 포함시키면 대괄호안의 수식은 τ 에 대한 5차식이 되어 일반대수해법으로는 근을 구할 수 없다. 위에서 언급한 바와 같이 α 를 상수($= 7.143 \times 10^{-6} \text{m}^2$)로 놓고, 파수를 파라미터로 대하여 계산한 결과란 Fig. 1a와 b에 도시하였다.

$\nu = 10$ 일때 $\tau = 0.25$ 에서는 물론 $\tau = 0.20$ 에서 D_1 은 0이 되고, D_2 또한 $\tau = 0.25$ 에서 0이 된다. $\nu = 20$ (파장은 0.1nm)일때 D_1 은 $\tau = 0.25$ 에서 거의 0이 되지만 나머지 전 구간에서는 항상 음의 값을 갖는다. 그러나 D_2 는 $\tau = 0.37$ 근처에서 부호가 바뀌면서 0이 된다. 마지막으로 $\nu = 30$ 일때는 D_1 은 그림에 제시한 전 구간에



(b) R_2



(a) R_1

Fig. 2 Variation of R with τ for 3 different ν 's

서 부호의 변화가 없으나, D_2 는 $\tau = 0.46$ 근처에서 0이 된다. D_1 이나 D_2 의 값이 0이 되면 $(R^2 + Q^2)^{1/2} = 0$ 이며, 식(11)~(13)으로부터 특성파수가 다음과 같이 될 수 있다.

$$k = k_{1,4} = k_{2,5} = \tau^2/3\alpha\nu - R^{1/3}, \quad (21)$$

$$k_{3,6} = \tau^2/3\alpha\nu + 2R^{1/3}. \quad (22)$$

이 결과를 식(18)과 (19)에 대입하면 $F_1(z)$ 는

$$F_1(z) = -D_1^{-1} 3R^{1/3} 2\pi(1 + \alpha k^2)e^{-ik(z-\bar{z})} \quad (23)$$

가 된다. 한편 $F_2(\bar{z})$ 의 분자식에서 첫째항과 둘째항은 크기가 같고 부호가 반대이며, 세째항은 0이 되어 $D_2 = 0$ 일때 $F_2(\bar{z})$ 는 부정이 된다.

이를 좀 더 자세히 살펴 위하여 보기 위에서와 같은 조건에서 앞에서 정의한 R 을 계산하여 그 결과를 Fig. 2a와 b에 수록하였다. 여기서는 편의상 $k_n(n=1, 2, 3)$ 에 대한 R 을 R_1 으로, 그리고 $k_n(n=4, 5, 6)$ 에 유효한 R 을 R_2 로 표기하였다. 그림에서 발견할 수 있는 사실은 $\tau < 1/4$ 구간에서 D_1 의 값이 0이 되면 R_1 또한 0이 된다는 것이다. 그러나 D_2 가 0이 되거나 D_1 이 $\tau = 1/4$ 근처에서 0이 되더라도 이에 대응하는 R_2 나 R_1 의 값은 0이 아니다. 즉, $\tau = 0.25$ 근처에서 D_1 은 0이나 R_1 은 0이 아니므로 $F_1(z)$ 는 특이함수가 된다. 그러나 $\tau < 0.25$ 구간에서 D_1 의 값이 0인 τ 가 존재하지만 이에 대응하는 R_1 또한 0이 되어 $F_1(z)$ 는 부정성이 되며 모든 특성파수가 $\tau^2/3av$ 로 된다. 한편 파포텐셜 $F_2(z)$ 의 경우 비록 D_2 의 값이 0이 되더라도 분자값 또한 0이 되어 부정성이 된다. 이는 표면장력파가 존재할 수 없음을 뜻한다. 즉, 전진속도가 표면장력파의 최소위상속도인 0.232m/sec가 되면 군속도 또한 이 값과 같아져 파가 존재할 수 없음은 이미 잘 알려져 있다[4]. 위의 계산 예를 포함하여 다른 많은 경우에 D_1 과 D_2 가 $\tau = 1/4$ 가 아닌 다른 τ 에서 0이 될 때, 이에 대응하는 전진속도 $(= \frac{\tau\omega}{\nu})$ 를 계산하면 상술한 표면장력파의 최소위상속도가 됨을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 표면장력을 고려한 선형포텐셜 이론을 이용하여 전진하며 통요하는 2차원 소오스에 의하여 발생하는 자유표면파를 해석하였다. 통요수가 비교적 작은 경우에는 표면장력을 고려하지 않았을 때 나타나는 공진진동수 $\tau = 1/4$ 가 그대로 존재한다. 그러나 통요수가 클 때에는 ($\nu > 20$) 표면장력의 효과가 커져 발생파의 파고가 제한되며 분산된다. 이에 대응하는 전진속도는 중력-표면장력파의 최소 위상속도 보다 작아 공진주파수가 존재하지 않는다. 이에 덧붙여 $\nu < 20$ 인 경우 하나의 $\tau (< 0.25)$ 에서 파포텐셜 $F_1(z)$ 은 부정이며, 파포텐셜 $F_2(z)$ 또한 ν 에 따라 증가하는 하나의 특정한 τ 에서 부정성이 된다. 이는 전진속도가 표면장력파의 최소 위상속도 및 군속도와 같아져 파가 존재할 수 없기 때문이다.

끝으로 논문작성과정에서 토론을 통하여 문제점을 지적하여 주신 황종훈교수, 배광준교수, 이승준교수께 그리고 현상에 대한 올바른 물리적 설명을 주신 심사자에 감사드리며, 또한 본 논문은 한국과학재단에서 지원받은 1987년도 목적기초연구과제 “신박의 유체동

역학적 특성 규명을 위한 기초연구—비선형 해석—”(관리번호 870207)의 제 2 제부과제 “쇄파현상과 쇄파 중에서의 부유체의 운동해석”의 일환으로 수행한 연구의 일부 결과임을 밝히면서 상기 제단에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

[1] Haskind, M.D., “On Wave Motion of a Heavy Fluid”, *Prikl. Mat. Mekhl.*, Vol. 18, 15-26, 1954.
 [2] Dagan, G. and Miloh, T., “Free-Surface Flow Past Oscillating Singularities at Resonant Frequency”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 120, 139-154, 1982.
 [3] Wehausen, J.V. and Laitone, E., *Surface Waves*, Encyclopedia of Physics, Vol. 9, Springer Verlag, 1960.
 [4] Whitham, G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1974.

부 록

식(8)의 제차해는 특성파수를 이용하여 다음과 같이 표시되며

$$F_{1A} = C_1 e^{-i k_1 z} + C_2 e^{-i k_2 z} + C_3 e^{-i k_3 z}, \tag{A1}$$

특별해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$F_{1p} = \sum_{n=1}^3 C_n(z) U_n(z), \quad U_n(z) = \exp(-i k_n z) \tag{A2}$$

이제 잘 알려진 해법에 따라

$$\Sigma C_n'(z) U_n(z) = 0, \tag{A3}$$

$$\Sigma C_n'(z) U_n'(z) = 0 \tag{A4}$$

인 조건을 이용하여 식(A2)를 식(8)에 대입하면

$$\sum_{n=1}^3 C_n'(z) U_n''(z) = f(z) \tag{A5}$$

인 관계식을 얻는다. 따라서 $C_n'(z)$ 에 대한 연립방정식을 풀면 그 해는

$$C_1' = f(U_2 U_3' - U_2' U_3) / D_1 \tag{A6}$$

$$C_2' = f(U_3 U_1' - U_3' U_1) / D_1 \tag{A7}$$

$$C_3' = f(U_1 U_2' - U_1' U_2) / D_1 \tag{A8}$$

이므로, 뒷식을 z 에 대하여 적분함으로써 미지함수 $C_n(z)$ ($n=1, 2, 3$)을 구할 수 있는 데, 식(15~17)에 제시된 $k_n(n=1, 2, 3)$ 의 허수부를 고려하여 해가 수렴하도록 적분구간을 선정하면 식(18)로 표시된 해를 얻는

다. $F_2(\bar{x})$ 도 같은 방법으로 쉽사리 구할 수 있다.

한편 D_1 의 표현식에 식(11)~(13)로 주어진 k_n ($n=1, 2, 3$)을 대입하여 정리하면

$$D_1 = -(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)$$

$$= 3\sqrt{3}i(S-T)(S^2+ST+T^2)$$

$$= 3\sqrt{3}i(S^3-T^3)$$

$$= 6\sqrt{3}i(R^2+Q^3)^{1/2}$$

(A9)

이 된다.