퍼지 기초 이론

민 경 찬
(연세대 이과대 수학과 부교수)

1. 서 론

일상생활에서 우리가 정하는 대상 중에 명확하게 그 소속을 정의 할 수 없는 경우가 많다. 예를 들면, "아름다운 여인들의 모임", "동물들의 모임", "키가 큰 사람들의 모임", 또는 "1보다 훨씬 큰 실수들의 모임"이다. 이러한 대상들은 보통 개념의 『집합』을 이룰 수 없다. 그런데 이러한 대상들은 우리의 일상적인 사고에서 중요한 역할을 한다. 1965년 Zaceh[8]는 위와 같이 소속이 명확하지 않은 대상들을 수학적으로 다루기 위하여 『퍼지(fuzzy)집합』의 개념을 도입하였다. 이 퍼지집합 개념은 각 대상이 어떤 모임에 『속한다, 안속한다』라는 이원론적인 논리로 부터, 각 대상을 그 모임에 『속하는 정도』(grade of membership)로 이해함으로써 일반화된 개념이다. 예를 들면, X={−1, 1, 5, 8, 10, 100, 500} 일때 "집합X에서 5보다 훨씬 큰 수들의 모임" A를 일반적인 집합의 개념으로는 분류할 수 없다. $\mu_A(-1)=0$, $\mu_A(1)=0$, $\mu_A(5)=0$. $\mu_A(8)=0.05$, $\mu_A(10)=0.1$, $\mu_A(100)=0.95$, $\mu_A(500)=1$로 정의되는 소속함수(membership function) $\mu_A: X\to[0.1]$로 집합 X의 각 원소들이 "5보다 훨씬 큰 수들의 모임" A에 속하는 정도를 나타냄으로서 이 모임을 수학적으로 표현 할 수가 있다. A가 일반집합일 때는 A를 특성함수 χ_A로 표현할 수 있다. 왜냐하면 $x\in A$이면 $\chi_A(x)=1$, $x\notin A$이면 $\chi_A(x)=0$이다. 그러므로 일반집합은 퍼지집합의 특별한 경우가 된다.

한편 1977년 Sugeno는 "퍼지"의 개념을 아주 새로운 관점에서 사용했다. 집합X에서 위치가 모호한(unlocated) "원소 x가 X의 부분집합 A에 속한다."라는 말의 퍼지한 정도 $g_X(A)$를 나타냄으로서 x와 A와의 관계를 수학적을 표현하게 되는 퍼지측도(fuzzy measure) 개념을 소개하였다. 다음 예를 통하여 퍼지집합과 퍼지측도의 차이점을 소개한다. X는 가구들의 집합이라 하자.

퍼지집합 : A=오래된 가구들의 모임(퍼지집합)이고 가구 x마다 만들어진 년수를 알고 있는 경우, $\mu_A(x)$는 임의로 택한 가구 x의 오래된 정도를 나타낸다.

퍼지측도 : A=200년 이상된 가구들의 모임(일반집합)이고, 가구들의 만들어진 년도를 모르는 경우, $g_x(A)$는 가구 x의 상태를 보고, x가 200년 이상된 가구들의 일반집합인 A에 속하는 정도를 나타낸다. 위의 두개념이 퍼지이론에서 가장 기본적인 관점이 된다. 이 두개념을 합쳤을 때 $gx(A)$는 만들어진 년수를 모르는 가구 x가 오래된 가구들의 모임 A에 속하는 정도를 나타나게 된다.

2. 퍼지집합(fuzzy set)

2.1 기본정의

전체집합 X에 대하여, 부분집합 A는 특성함수 χ_A로 이해된다. $(A=\chi_A^{-1}(1))$

정의 : 집합 X에서 퍼지집합 A는 소속함수 $\mu_A: X\to$

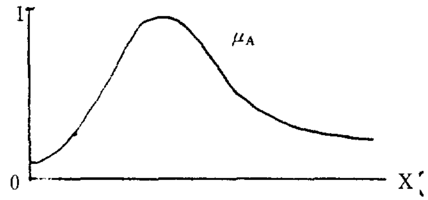
[0,1]로 이해하고, $\mu_A(x)$는 x가 A에 속하는 정도를 의미한다.

Notation : 퍼지집합 A의 표현방법은 여러가지가 있다.

$A = \{(\mu_A(x),\ x) : x \in X\}$

$A = \int_X (\mu_A(x)|x)$

$A = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(xi)|xi)$ (A가 유한집합 일때)



예 : ① 서론에서 소개한 "집합 X에서 5 보다 훨씬 큰수들의 모임."

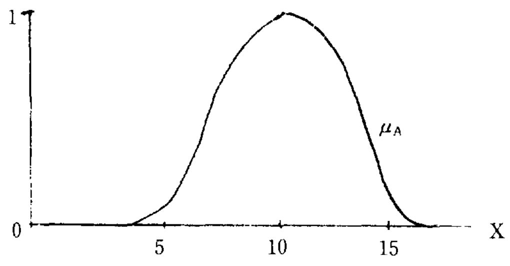
$A = \{(0, -1),\ (0,1),\ (0,5),\ (0.05,8),\ (0.1,10),\ (0.95,\ 100),\ (1,500)\}$

또는 A=

−1	1	5	8	10	100	500
0	0	0	0.05	0.1	0.95	1

② X=R(실수들의 집합), A="10에 가까운 실수들의 모임"

$A = \{(\mu_A(x),\ x) : \mu_A(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}\}$



참고 : 전체 퍼지집합 : $X \Leftrightarrow \mu_A(x) = 1,\ \forall x \in X$

퍼지 공집합 : $\emptyset \Leftrightarrow \mu_\phi(x) = 0,\ \forall x \in X$.

2.2 연산

일반집합의 연산과 같은 개념으로 퍼지집합 사이의 연산을 정의한다.

정의 : 집합 X에서의 퍼지집합 A, B에 대하여,

- 합집합(union) : $A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ \forall_x \in X$
- 교집합(intersection) : $A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\},\ \forall_x \in X$
- 여집합(complement) : $A' \Leftrightarrow \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall_x \in X$
- 부분집합(subset) : $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall_x \in X$
- 같은 집합 : $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall_x \in X$.

주의 : 일반집합론에서와는 달리, $A \cup A' \neq X$, $A \cap A' \neq \emptyset$이다.

예를 들어, 상수함수 $\mu_A = 1/2$을 택하면 $\mu_{A \cup A'} = 1/2$이다.

참고 : 위에 소개한 것 외에 다양한 연산이 가능하다. 예를 들면,

- 확률적 합 : $A + B \Leftrightarrow \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
- 확률적 곱 : $A \cdot B \Leftrightarrow \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
- 유계 합 : $A \uplus B \Leftrightarrow \min\{1,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$
- 유계 곱 : $A \Cap B \Leftrightarrow \max\{0,\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$

이들 사이의 관계는 $A \Cap B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B$, $A \cup B \subseteq A + B \subseteq A \uplus B$.

2.3 기타 중요 개념

a. α-cut : 집합X에서의 퍼지집합 A의 α-cut는 $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$를 의미한다. ($\alpha \in (0,1)$).

퍼지 집합 A는 α-cut들로 표현된다 :

$\mu_A(x) = \sup_{0<\alpha<1} \min\{\alpha,\ \chi_{A\alpha}(x)\},\ \forall_x \in X$, 또한 $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$,

$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$, 그러나 $(A')_\alpha \neq (A_\alpha)'$.

b. 집합 X에서의 퍼지집합 A에 대하여, A의 support는

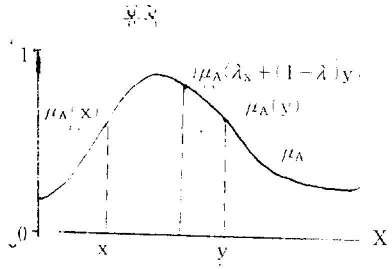
$supp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$,을 의미하고 A의 높이(height)는

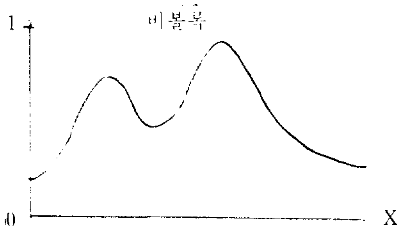
$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$을 의미한다. 그리고 $\mu_A(x) = 1$되는 원소 x가 존재할 때, A는 정상화(normatized)되었다고 한다. 이때, $hgt(A) = 1$이다.

c. 퍼지집합의 cardinal : supp(A) < ∞일때, 퍼지집합 A의 cardinality (크기) $|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$이다.

d. 퍼지 집합의 entropy : 퍼지 집합 A가 얼마나 퍼지한가를 측정하기 위하여 여러가지 개념이 정의된다. 예를들면 유한집합 X에 퍼지 집합 A의 extropy $e(A) = -\sum_{x \in X} [\mu_A(x) \log \mu_A(x) + (1-\mu_A(x)) \log(1-\mu_A(x))]$로 준다. 이때 $e(A)0 \Leftrightarrow$ A는 퍼지 하지 않음

e. 볼록퍼지집합 : X=R (Euclidean space)에서의 퍼지집합 A가 볼록(convex) $\Leftrightarrow \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A x), \mu_A(y)\}, \forall_{x,y} \in X, \forall_\alpha \in [0,1]$ $\Leftrightarrow A_\alpha$가 볼록, $\forall_\alpha \in [0,1]$.





A,B가 볼록하면 A∩B도 볼록하다.

f. 퍼지 수(number) : 퍼지 수 A는 다음 두 성질을 만족하는 실수집합 R에서의 볼록 퍼지집합을 의미한다.

(1) $\mu_A(x_0) = 1$ 되는 점 x_0가 유일하게 존재. (x_0를 A의 평균값이라 부른다).

(2) μ_A는 piecewise 연속.

2.4 다른 종류의 퍼지집합

a. 1967년 Goguen은 퍼지집합의 소속함수의 공역 [0,1]을 일반적인 격자(lattice)L로 대치시켜, L-퍼지집합 개념을 도입하였다. 즉, 집합 X에서의 L-퍼지집합 A는 $\mu_A : X \to L$로 이해한다. [0,1]이 membership scale로 적합하지 않을 때, 필요에 따라 적당한 격자 L을 선택함으로서 퍼지 이론을 적용할 수 있다.

L=[0,1]이면 퍼지집합, L={0,1}이면 일반집합이 된다.

b. type 2 퍼지집합 : L=F([0,1]) (=집합 [0,1]에서의 모든 퍼지집합들의 집합) 일때, 집합 X에서의 L-퍼지집합 A를 type 2퍼지집합이라 부른다. 소속정도 $\mu_A(x)$가 [0,1]에서의 퍼지집합으로 나타난다.

c. level 2퍼지집합을 집합 F(X) (=집합 X에서의 모든 퍼지집합들의 집합)에서의 퍼지집합 A를 의미 한다. 이때 $\mu_A : F(X) \to [0,1]$, 즉 퍼지집합들의 퍼지집합이다.

3. 퍼지측도(fuzzy measure)

3.1 정의 및 예

먼저 일반집합의 퍼지측도를 소개한다.

정의 : $\wp(X)$ = 집합 X의 모든 부분집합들의 집합일 때, 다음 세가지 조건을 만족하는 함수 $g : \wp(X) \to [0,1]$를 퍼지측도라 부른다 :

(1) $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$

(2) $A, B \in \wp(X)$, $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$ (monotonicity)

(3) $A_n \in \wp(X)$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \lim_n g(A_n) = g(\lim_n A_n)$ (continuity)

참고 : 1. 퍼지측도 g를 $\wp(X)$대신 Borel field B위에서도 정의할 수 있다.

2. $g(A \cup B) \geq \max\{g(A), g(B)\}$, $g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\}$.

예 : a. 확률측도(probability measure) : 다음 두 조건을 만족하는 함수

$P : \wp(X) \to [0,1]$를 확률(측도)라 부른다 :

(1) $P(X) = 1$

(2) $A_n \in \oint(X)$, $\forall n \neq m$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ 일때

$P(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. (additivity)

참고 : 퍼지측도의 조건(2)는 확률측도의 조건(2) 보다 약한 조건이다. 인간의 사고 활동에 있어서는 확률의 additivity 보다 퍼지측도의 monotonicity가 더 적합하고 자연스럽다.

b. 가능측도(possibility measure) : 다음 세가지 조건을 만족하는 함수

$\Pi : \oint(X) \rightarrow [0,1]$를 가능측도라 부른다 :

(1) $\Pi(\emptyset) = 0$

(2) $A, B \in \oint(X)$, $A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \subseteq \Pi(B)$,

(3) $\Pi(\bigcup_{i \in I} Ai) = \sup_{i \in I} \Pi(Ai)$, (I는 집합).

c. 디락측도(Dirac measure) : 집합 X에서 원소 x_0를 교정했을때,

$\forall A \in \oint(X)$,

$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in A, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 라 하자. 이 함수 μ를 Dirac측도

라 부른다.

d. λ-퍼지측도 : 다음 조건을 만족하는 퍼지측도 $g_\lambda : \oint(X) \rightarrow [0,1]$를 λ-퍼지측도라 부른다 :

$A, B \in \oint(X)$, $A \cap B = \emptyset$ 일때,

$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)$

$(\lambda > -1)$.

참고 : λ-퍼지측도는 확률측도의 additivity를 약화시킨 것으로, $\{g_\lambda(\{x\}) : x \in A\}$로 부터 $g_\lambda(A)$가 계산된다. $\lambda = 0$일 때, g_0는 확률 측도이다.

서론의 마지막 부분에서 소개하였던 퍼지집합의 퍼지측도를 퍼지적분(fuzzy integral)을 이용하여 정의한다.

정의 : 퍼지측도 $g : \oint(X) \rightarrow [0,1]$와 함수 $h : X \rightarrow [0,1]$와 X의 부분집합 A가 주어졌을 때, g에 관한 A위에서의 h의 퍼지적분은

$$\int_A h(x) \circ g(\cdot) = \sup_{0<\alpha<1} \min\{\alpha, g(A \cap H_\alpha)\},$$

$(H_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\})$

주 : 퍼지적분은 Lebesgue적분과 유사하다.

정의 : 퍼지측도 $g : \oint(X) \rightarrow [0,1]$가 주어졌을때, 집합 X에서의 퍼지집합 A의 퍼지 측도는

$$g(A) = \int_X \mu_A(x) \circ g(\cdot) = \sup_{0<\alpha<1} \min\{\alpha, g(A_\alpha)\}.$$

주 : $g(A)$는 "unlocated 된 변수 u가 퍼지집합 A에 속한다"의 확실성 정도를 나타낸다.

3.2 확률(probability)과 가능성(possibility)

어떤 사건(event)이 일어나는지 일어나지 않는지를 확실히 알지 못할때, 그 사건이 일어나는 확실성을 수량적으로 정한 값을 확률이라 한다. 표본공간 X에 대한 확률분포 $P : X \rightarrow [0,1]$는 $\sum_{x \in X} p(x) = \int_X p(x) dx = 1$를 만족하는 함수이고, X의 부분집합인 사건 A에 대한 확률 $P(A) = \sum_{x \in X} p(x) = \int_A p(x) dx$이다. 독립된 사건 A, B에 대하여 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$이다. 주사위를 던졌을때, "표면에 작은수가 나오는 사건"은 퍼지집합으로 표현하여 퍼지사건이라 부른다. 퍼지사건 A에 대한 확률은 다음과 같이 소속함수 μ_A의 기대값으로 준다 :

$$P(A) = E(\mu_A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \cdot p(x) = \int_X \mu_A(x) dp.$$

일상언어에서 피할 수 없는 부정확성은 확률적(probabilistic)이기 보다는 가능성(possibilistic)에 비추어 이해하는 것이 더 자연스럽다. 집합 $X = \{x \in N : 1 \leq x \leq 20\}$ 일때, "unlocated된 변수 u는 작은 수 이다"라는 정보로 부터 u가 집합 $A = \{3, 4, 5\}$에 있을 가능성 정도를 다음과 같이 계산한다. 먼저 "u는 작은 수 이다"를 나타내기 위한 가능성 분포 π_u를 X에서의 퍼지집합으로 준다. 가능성 분포(possilbility distribution) $\pi_u : X \rightarrow [0,1]$는 $\sup_{x \in X} \pi(x) = 1$을 만족하는 함수이고, u가 A에 있을 가능성 정도(측도) $\Pi(A) = \sup_{x \in X} \pi(x)$이다. 역으로, 가능성 측도가 주어지면, 가능성분포 $\pi(x) = (\{x\})$를 얻게 된다. 집합 A,B에 대하여 $\Pi(A \cap B) = \min\{\Pi(A), \Pi(B)\}$이다. 또한 u가 X에서의 퍼지집합 A(예를 들어, "작지 않은 수들의 모임")에 속할 가능성 측도 $\Pi(A) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \Pi(\{x\})\}$이다.

확률과 가능성의 비교

(1) 사건이 일어날 가능성이 없음 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 사건이 일어날 확률이 없음. 일반적으로 $\Pi \geq P$

(2)

구 분	확 률	가 능 성
정 의 역	σ-algebra	제한없음
공 역	[0,1]	[0,1]
제한사항	$\sum_{x\in X} p(x)=1$	$\sup_{x\in X} \pi(x)=1$
$\cup$	$P(\overset{\cdot}{\cup} A_n)=\sum P(A_n)$	$\Pi(\bigcup_{i\in I} A_i)=\sup_{i\in I} \Pi(A_i)$
$\cap$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (A,B, 독립 사건)	$\Pi(A\cap B)=\min\{\Pi(A)\cdot\Pi(B)\}$

4. 퍼지관계(fuzzy relation)와 퍼지함수(fuzzy function)

4.1 퍼지관계

집합 x,y에서 X×Y의 부분집합 R을 관계라 부른다. 이때 $(x,y)\in R$이면 x와 y는 관계가 있고, $(x,y)\notin R$이면 x와 y는 관계가 없다고 말한다.

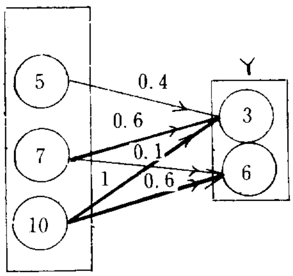
정의 : 집합 X,Y의 카테션곱 X×Y에서의 퍼지집합 R을 집합 X에서 집합 Y로의 퍼지관계라 부른다. 특히, X=Y일때 R을 집합 X에서의 퍼지관계라 부른다.

$\mu_R(x,y)$는 x와 y사이의 관계 정도(the strength of the relation)를 의미한다. 집합 X에서의 퍼지관계 R은 정점(vertex, node)들의 집합 X위에서 호(arc) $(x,y)\in X\times X$가 weight $\mu_R(x,y)$를 갖는 퍼지그래프(fuzzy graph)로 생각할 수 있다. X와 Y가 유한집합이면, 행렬 T_R와 퍼지그래프 Γ_R로 표현될 수 있다.

예 : 집합 X={5,7,10}, Y={3,6}에서 R="x는 y보다 훨씬 큰(x,y)들의 모임"

$$T_R=\begin{array}{c|cc} & 3 & 6 \\ \hline 5 & 0.4 & 0 \\ 7 & 0.6 & 0.1 \\ 10 & 1 & 0.6 \end{array}$$

$\Gamma_R=$



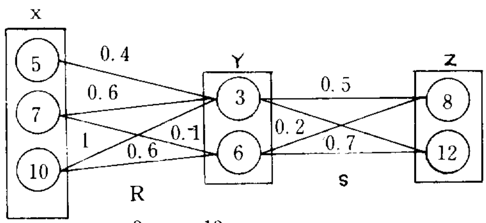
집합 X에서 집합 Y로의 퍼지관계 R과 집합 Y에서 집합 Z로의 퍼지관계 S의 합성(composition) R∘S는 X에서 Z로의 퍼지관계를 의미하며

a. sup-min 합성 : $\mu_{R\circ S}(x,y)=\sup_{y\in Y}\min\{\mu_R(x,y),\ \mu_S(y,z)\}$

b. sup-product 합성 : $\mu_{R\circ S}(x,z)=\sup_{y\in Y}\mu_R(x,y)\cdot\mu_S(x,z)$

주 : sup-min 합성에서 "min" 대신에 여러가지 연산(유계곱 등)을 적용함으로써 다양한 합성을 얻을 수 있다.

예 : sup-min합성

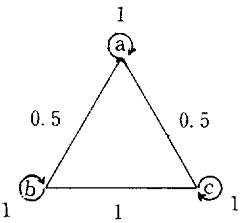


$$T_{R\circ S}=\begin{array}{c|cc} & 8 & 12 \\ \hline 5 & 0.4 & 0.4 \\ 7 & 0.5 & 0.6 \\ 10 & 0.2 & 1 \end{array}$$

정의 : 집합 X에서의 퍼지관계 R을 다음과 같이 부른다.

- 반사적(reflexive) ⇔$\mu_R(x,x)=1$, $\forall_x \in X$
- 대칭적(symmetric) ⇔ $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$, $\forall_{x,y} \in X$
- 반대칭(antisymmetric) ⇔$x \neq y$이고 $\mu_R(x,y)>0 \Rightarrow \mu_R(y,x)=0$, $\forall_{x,y} \in X$
- 전이적(transitive) ⇔$\mu_R(x,y) \geq \mu_{R \circ R}(x,y)$, $\forall_{x,y} \in X$
- proximity ⇔반사적+대칭적
- preorder ⇔반사적+전이적(sup-min 합성)
- 반순서(partial order) ⇔반사적+반대칭+전이적(sup-min합성)
- 유사(similarity) ⇔반사적+대칭적+전이적(sup-min합성)

	a	b	c
a	1	0.5	0.5
b	0.5	1	1
c	0.5	1	1



참고 : (1) R이 유사관계이면 R'은 ultrametric이 된다.
(2) 유사관계의 조건 "전이적"에서 sup-min 합성대신 sup-유계곱합성을 사용할때 likeness 관계라 부르는데, pseud-metric과 깊은 관계가 있다.
(3) 유사관계는 일반집합론에서의 동등관계(equivalence relation)의 일반화로 퍼지 clustering의 기본적인 도구가 된다.

퍼지 관계를 퍼지집합위에서도 정의할 수 있다. 이 개념은 그래프이론에서 유용하다.

정의 : $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$일때, 집합 $X \times Y$에서의 퍼지집합 R이 다음식을 만족하면 퍼지집합 A에서 퍼지집합 B로의 퍼지관계라 부른다.

$$\mu_R(x,y) \leq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\},\ \forall_{(x,y)} \in X \times Y$$

위에 전개한 방법으로, 퍼지집합위에서 퍼지관계 이론을 전개할 수 있다.

4.2 퍼지함수

다루는 문제의 성격에 따라서 여러가지 종류의 퍼지함수를 정의할 수 있다. 사실, 퍼지관계도 퍼지함수의 일종으로 볼 수 있다.

a. $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$일때, 퍼지함수 $f: A \rightarrow B$는 일반함수
$f: X \rightarrow Y$로서 $\mu_A \leq \mu_B \circ f$를 만족함을 의미한다. X는 트럭들의 집합, Y는 속도눈금들의 집합, f(x)는 트럭 x의 속도한계(speed limit), A는 큰 트럭들의 모임이고 B는 낮은 속도들의 집합일때, 퍼지함수
$f: A \rightarrow B$는 "트럭이 클수록, 속도한계는 더 낮아짐"을 의미한다.

b. X,Y가 집합일때, 함수 $f: X \rightarrow F(Y)$를 X로부터 Y로의 퍼지화(fuzzifying)함수라 부른다. X로 부터 Y로의 퍼지화 함수 f가 퍼지관계 R은 수학적으로 동치인 개념이다. 즉 일대일 대응관계이다 ; 이 관계는 $\mu_{f(x)}(y)=\mu_R(x,y)$, $\forall_{(x,y)} \in X \times Y$, 이다. 그러므로, 퍼지화 함수의 합성도 퍼지관계의 sup-min 합성으로 정의된다 :

$$\mu_{g \circ f(x)}(Z)=\sup_{y \in Y}(\mu_{f(x)}(x),\ \mu_{g(y)}(Z)).$$

c. X,Y가 집합일때, 일반함수 $f: F(X) \rightarrow F(Y)$를 생각할 수 있다.
합성도 일반적인 방법으로 가능하다. 예를들어, X=책방에 있는 모든 책들의 집합, $Y=(0,\ \infty)$일때, "좋은책"→"비싼값", "나쁜책"→"싼값"이라는 관계를 함수 f로 나타낼수 있다.

d. 일반함수의 퍼지확장 : X,Y가 집합일때, 일반함수 $f: X \rightarrow Y$로 부터 함수$f: F(X) \rightarrow F(Y)$로 확장할 수 있다 :

$$\mu_{f(A)}(y)=\begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

두개의 확장된 함수의 합성은, 원래의 두 함수 합성의 확장이 된다.

4.3 확장원리(extension principle)

일반 집합론에서의 개념은 퍼지이론으로 일반화 시키는 데 가장 중요한 도구중의 하나가 확장원리이다. 이 원리는 일반 수학적 개념과 퍼지관점에서의 개념과의 관계를 명확히 제시한다.

정의 : 집합 X_i에서의 퍼지집합 $A_i(i=1,\ 2)$의 카테션

곱(cartesian product)은 다음과 같이 정의되는, 집합 $X_1 \times X_2$에서의 퍼지집합 $A_1 \times A_2$를 의미한다 :

$$\mu_{A_1 x A_2}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)\}$$

정의(확장원리) : 집합 X_i에서의 퍼지집합 $A_i(i=1,2)$와 함수 $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$가 주어졌을때, 집합 Y에서의 퍼지집합 B가 다음과 같이 정의된다 :

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}, & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

주 : 정의역을 두개의 카테션 곱으로 부터 일반적인 n개의 곱으로 일반화 할 수 있다.

참고 : (1) n=1일때의 확장원리는 2)−d의 일반함수의 퍼지확장을 의미한다.

(2) 확장원리는 퍼지관계 합성의 특별한 경우이다.

$B = (A_1 x A_2) \circ R$, (이때 R은 일반관계 (crisp relation) :

$$\mu_R(x_1,\ x_2,\ y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = f(x_1,\ x_2) \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) 확장원리를 가능성의 관점에서 이해 할 수 있다(참조 u가 X에서 퍼지집합 A에 속할 가능성 측도). 이 외에도 퍼지관계, 퍼지 함수들의 합성등 여러가지 방향에서 확장원리가 매우 중요하게 사용된다.

참 고 문 헌

[1] D. Dubois and H. Prade, Outline of fuzzy set theory : an introduction, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. North-Holland (1979), 27-48.

[2] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press(1980).

[3] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, J. of Math. Anal. & Appl., v. 18(1967), 145-174.

[4] A. Kaufmann, Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Academic press(1975).

[5] G.J. Klir and T.A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall(1988).

[6] C.V. Negoita and D.A. Ralescu, Applications of Fuzzy Sets to System Analysis, Birkhäuser-Verlag(1975).

[7] R.K. Ragade and M.M. Gupta, Fuzzy set theory : Introduction, Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland (1977), 105-131.

[8] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information & Control 8(1965), 338-353.

[9] L.A. Zadeh et al.(Ed.), Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press(1975).

[10] H.J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Kluwer-Nijhoff (1985).