플라즈마 내에서의 전자장 해석

황기웅*, 이홍식**, 최경철**, 김윤택**
(*서울대 공대 전기공학과 부교수, ** 동 박사과정)

1. 서 론

플라즈마란 "이온화된 기체"를 말하며, 수억도의 온도를 갖는 초고온 핵융합에 이용되는 플라즈마로부터 최근의 반도체 공정, 신소재 합성등에 이용되는 저온 글로우 플라즈마나 아크플라즈마에 이르기까지 다양한 응용 범위를 가짐으로 해서 이의 생성, 유지, 응용에 있어 좀더 깊은 이해가 필요하게 되었다.

플라즈마는 주로 전기적인 방법에 의해 직류, RF, 초고주파를 이용하거나 전자빔에 의해 생성되어지며, 생선된 플라즈마를 유지하기 위해서 자기장이 사용되어진다. 따라서 플라즈마의 생성과 유지를 위해서는 플라즈마내의 전자장의 이해가 무엇보다도 중요하며, 플라즈마의 경우 우리에게 어려움을 주는 것은 플라즈마 자체가 대전된 입자들로써 구성되며, 전류가 흐를 수 있기 때문에 외부에서 인가된 전자장이 플라즈마의 반응에 의해 변화가 일어날 수 있다는 점이다. 또한 플라즈마의 생성이 매우 짧은 시간에 이루어 진다든지, 플라즈마내에서 매우 복잡한 이온화, 재결합, 여기 반응등이 일어난다든지, 초고온 고밀도 핵융합 플라즈마가 Magnetic Confinement 장치에서 Lawson 조건에 달하지 못하고 쉽게 빠져나가는 등의 현상들은 실험을 통한 이해를 더욱 어렵게 하여, 고속, 대용량 컴퓨터의 이용을 통한 수치해석 방법의 중요성을 더해주고 있으며, 수치해석이 도움이 없이는 핵융합 플라즈마연구가 불가능할 정도로 중요히 이용되고 있다.

본고에서는 플라즈마의 거동을 기술하는데 이용이 되는 MHD(Magneto-Hydro-Dynamic)식에 의한 토카막 평형해석, 차단기내의 아크해석 및 입자 수치해석을 통한 플라즈마 해석 방법이 소개되었다.

2. MHD 식에의한 Plasma 해석법

일반적으로 Plasma는 MHD 식과 Maxwell 식으로 그 운동과 특성을 나타 낼 수 있다. 다음 식은 그 예로서 full resistive MHD 식을 나타낸 것이다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\rho\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}=\vec{J}\times\vec{B}-\nabla P-\nabla\cdot\vec{\Pi_i} \tag{2}$$

$$\frac{n}{\gamma-1}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla T\right)+nT\nabla\cdot\vec{V}$$
$$=\eta J^2+\nabla\cdot(\vec{K}\cdot\nabla T)+V[\frac{4}{3}(\nabla\cdot\vec{V})^2+(\nabla\times\vec{V})^2]-U \tag{3}$$

$$\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}=\eta\vec{J} \tag{4}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla\times B=\mu_0\vec{J} \tag{6}$$

위식은 plasma 모델에 따라 표현식이 조금씩 달리

표현될 수 있다. 이와같은 식들은 해석적으로 풀수가 없다. 때문에 어떠한 plasma 모델에 대해 그 운동과 특성을 알기 위해서는 그모델에 맞는 적당한 수치 해석 기법을 가장 널리 사용되는 방법은 유한 차분법(Finite Difference Method)과 유한 요소법(Finite Element Method)이 있다.

유한 차분법이란 편 미분 방정식을 수치 해석적 또는 해석적으로 풀 수 있도록 간략화 하는 방법이다. 이 유한 차분법에도 정확도, 수렴 정도, 계산 시간 그리고 프로그래밍의 간략화에 따라 여러 방법이 나와 있다. 유한 차분법은 유한 요소법에 비하여 높은 정확도를 갖지만 plasma 경계면의 기하학적 모양에 제약을 받는다. 그에 비해 유한 요소법은 경계면의 기하학적 모양에 제약을 받지 않지만 정확도가 떨어진다. 그러나 유한 요소법은 적용하는 식의 formulation이 간단하고 계산 영역의 조정이 자유롭다.

2.1 유한 차분법의 적용 예

앞의 (1)-(6)식과 같은 다차원 문제를 유한 차분법을 이용할 경우 ADI(Alternation Direction Implicit)방법이 용이하다. 이 ADI 방법은 절대적 안정성을 갖는다. 다음은 ADI 방법에 의해 편미분 방정식을 formulation하는 방법을 설명한다. 예를 들어

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\nabla^2 u=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

위와같은 식은

$$U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}-U_{ij}^{n}=\frac{1}{2}\alpha(\delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+\delta_y^2 U_{ij}^{n}) \tag{8}$$

$$U_{ij}^{n+1}-U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\alpha(\delta_x^2 U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+\delta_y^2 U_{ij}^{n+1}) \tag{9}$$

$$\delta_x U_{ij}=U_{i+\frac{1}{2}j}-U_{i-\frac{1}{2}j} \tag{10}$$

$$\delta_y U_{ij}=U_{ij+\frac{1}{2}}-U_{ij-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\alpha=\frac{\sigma\Delta t}{(\Delta x)^2}\quad(\Delta x=\Delta y) \tag{12}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 i는 x 방향의 mesh 좌표를, j는 y 방향의 mesh 좌표를 나타낸다. 앞에서 언급한 바와 같이 유한 차분법의 경계의 기하학적 모양에 제약을 받는 것은 mesh를 선택할 때 사각형의 mexh를 사용하기 때문이다. 위의 ADI 표현식을 다시 x, y 각 방향에 대해 정리하면

$$-A_{ij}U_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}+B_{ij}U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}-C_{ij}U_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}=D_{ij}^{n} \tag{13}$$

$$-A'_{ij}U_{ij+1}^{n+1}+B'_{ij}U_{ij}^{n+1}-C'_{ij}U_{ij-1}^{n+1}=D_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \tag{14}$$

와 같은 tridiagonal 행렬이 얻어진다. 이 행렬을 적당한 방법으로 풀면 우리가 원하는 해를 구할 수 있다. 앞의 plasma 지배식에 ADI 방법을 적용하면 다

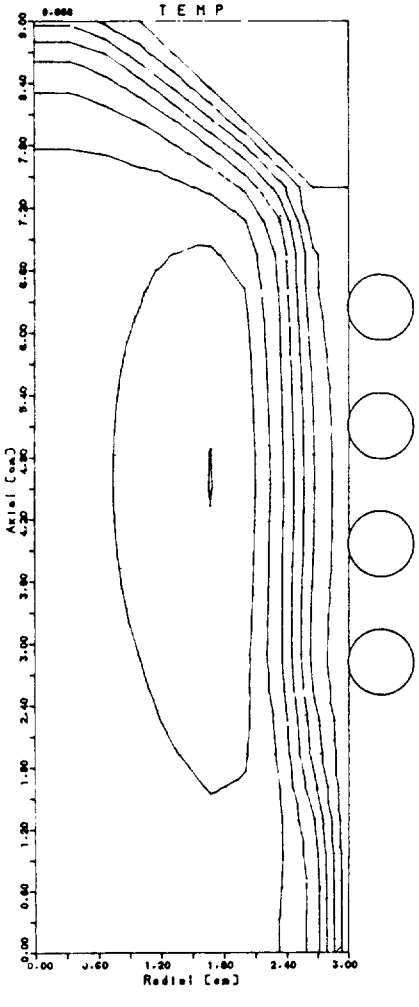

그림1. Inductively-Coupled RF Plasma의 온도분포

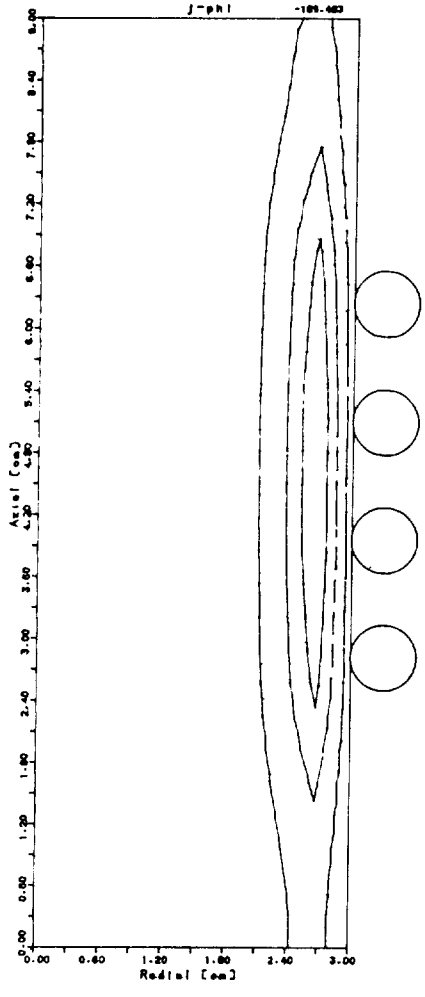

그림2. Inductively—Coupled RF Plasma의 J_ϕ의 분포

소 복잡한 형태의 tridiagonal 행렬이 얻어진다. 이와 같은 방식이 유한 차분법에서 가장 보편화된 방식 중 하나이다.

유한 차분법은 plasma중 경계의 기하학적 형태가 간단한 문제, 예를 들어 간략화한 차단기 아크모델, RF열 플라즈마, non-LTE인 글로우 plasma등에 적용할 수 있다.

다음 그림 (1)과 (2)는 Inducitvely-Coupled RF Plasma의 온도와 전류 분포를 MHD 식을 이용하여 해를 구한 결과를 나타낸 그림이다.

2.2 유한요소법 적용 예

수치해석의 대상이 확대됨에 따라 복잡한 형태의 경계를 갖는 문제에 대한 수치해석 기법이 요구된다. 이러한 요구조건을 만족시키는 대표적인 기법으로 유한요소법이 있다. 유한요소법은 미분형태의 식 (15)에 test 함수를 양변에 곱하고 해석영역에 대하여 적분을 취하여 식 (16)과 같이 적분형태의 식으로 고친 것이다.

$$Lv = f \qquad L : \text{operaton} \tag{15}$$

$$\int_\Omega uLv d\Omega = \int_\Omega uf d\Omega \tag{16}$$

식 (16)에서 L에 2계 미분항이 있을 때는 Green정리를 이용하여 1계 미분항의 곱과 경계 적분항으로 고친다. 식(15)를 만족하는 해는 C^2함수이어야 하나 식(16)을 만족하는 함수는 C^1 함수이므로 해가 될 수있는 함수공간이 넓어진다. 식(16)의 각 변수와 test 함수를 basis 함수로 취하면 식(17)과 같이되고 basis 함수는 식(18)을 만족해야 한다.

$$\int_\Omega P_i L P_j d\Omega = \int_\Omega P_i f d\Omega \tag{17}$$

$$P_i(\overrightarrow{X_j}) = \delta_{ij} \qquad i,\ j = 1,\ \cdots,\ n \tag{18}$$

적분은 각 요소에 대한 적분의 합으로 나타난다. 2차원인 경우 삼각형 또는 사각형의 요소를 사용하고 해의 값들이 주어지는 nde는 각 요소의 경계를 포함한 내부에 위치한다. 특히 삼각형요소에 선형 basis 함수를 사용하면 각 요소의 꼭지점이 node가 되다.

이와같이 구성된식은 식 (19)과 같은 행렬식이 되

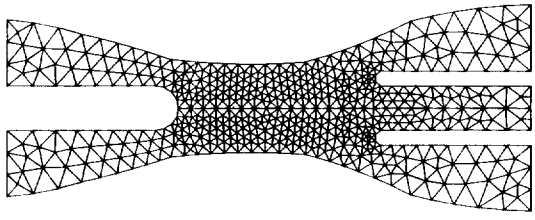

그림3. 해석영역에 발생된 요소

고 이식의 해를 구하는 방법은 잘 알려져 있다.

$$[A]\vec{V}=\vec{F} \tag{19}$$

$$[A]=\int_{\Omega} P_i L P_j d\Omega,\ F_j=\int_{\Omega} P_i f d\Omega$$

차단이 내의 아크에 대한 해석을 살펴보면, 우선 해석영역을 결정하고 요소를 영역내에 발생시켜야 한다. 그림 (3)과 비교적 아크의 현상이 중요한 부분에 대하여 요소를 많이 발생시켜 해의 정밀도와 계산의 효율성을 높일 수 있다. 앞의 MHD 식을 식 (19)과 같이 고쳐서 아크의 변수들을 구하면 된다.

3. 입자 수치해석(Particle Simulation)에 의한 플라즈마 해석법

각 입체에 미치는 로렌츠 힘과 운동방정식을 이용하여 입자의 궤적을 구하면 시간에 따른 위치와 속도 공간의 입자 분포를 구할 수 있다. 이 분포로부터 원하는 물리량을 도출하는 것이 입자 수치해석이다. 로렌츠 힘을 구하기 위해서는 플라즈마 내의 전자장을 알아야 하는데 평형상태에서의 값을 이용하는 방법과입자 자체에 의해 발생되는 전자장을 고려하는 방법이 있다.

전자의 방법은 플라즈마 내부의 전자장 상태를 MHD식을 통하여 유한요소법 또는 유한차분법으로 미리 구해둔 다음 입자의 운동이 전자장을 변화시키지 않는다는 가정에 선회 중심궤적 운동 방정식 등을 통하여 입자(이온, 전자)의 거동을 추적하는 방

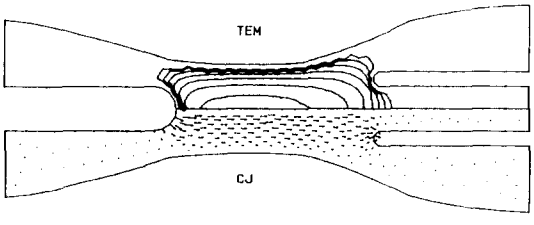

그림4. 차단기 아크의 온도와 전류분포

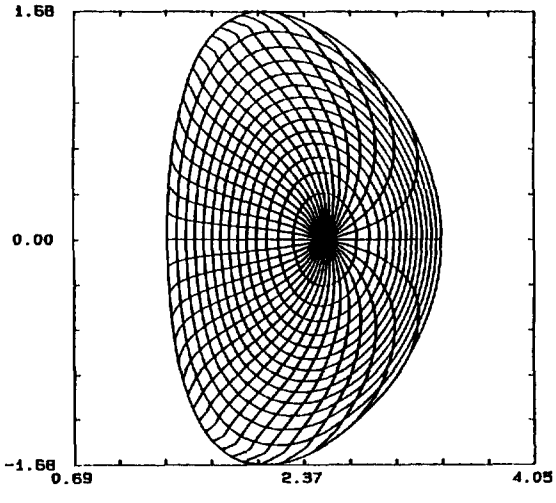

그림5. 평형상태의 자장분포

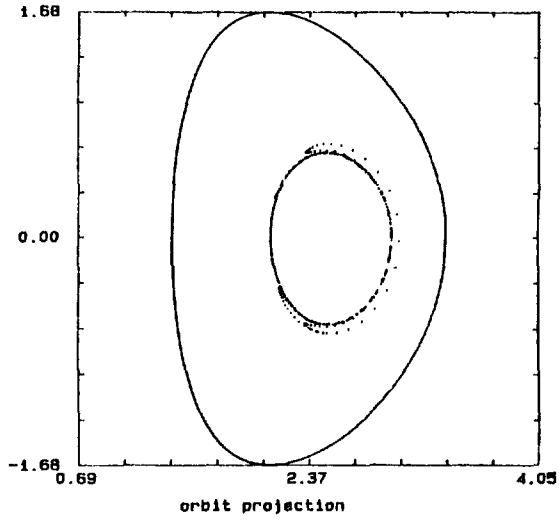

그림6. 입자의 궤적

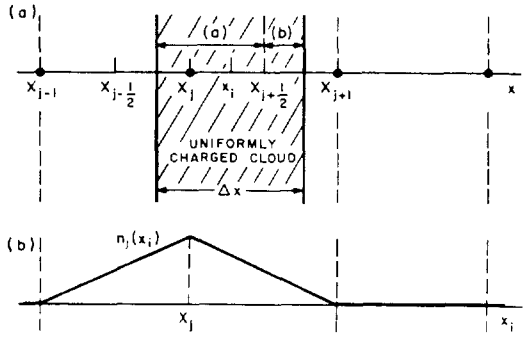

그림7. 입자수치 해석에 사용되는 입자의 분포함수 예
a) 1차 분포
b) 1차 분포일 때의 밀도

법으로 중성입자, 빔 가열, 전자파 가열, 자장의 섭동이 플라즈마 밀폐에 미치는 영향 등의 해석에 몬데칼로 법과 병행하여 사용되고 있다.

그림 (5)는 Ideal MHD식을 FEM에 의해 구한 평형상태의 자장분포이다. Ideal MHD식의 평형식은, 앞의 (2)식의 좌측 첫번째 항과 두번째 항 그리고 우측의 세번째 항을 없앤 M om en tum의 평형식과 (6) 식 그리고 $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$로 이루어진다. 임의의 단면을 갖는 우너통형, 축대칭 토로이드의 형상에서는 적어도 하나의 축을 무시할 수 있고 stream function $\Psi = rA_\phi$를 도입하여 평형 방정식을 하나의 미지수로 표현한 식(20)의 Grad-Shafranov 식으로 줄일 수 있다.

$$\nabla \cdot (r^{-2} \nabla \Psi) = -\mu_0 \mathbf{J}_\phi / r \qquad (20)$$

$$\mathbf{J}_\phi = rP'(\Psi) + \frac{1}{r\mu_0} g(\Psi) g'(\Psi)$$

$$g(\Psi) = r\mathbf{B}_\phi$$

Ψ가 구해지면 자장과 폴로이달 전류 j_p는 각각

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + g(\Psi) \nabla \phi \qquad (21)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{\mu_0} g'(\Psi) \nabla \Psi \times \nabla \phi \qquad (22)$$

로 부터 구할 수 있다.

그림 (6)은 앞에서 FEM으로 구한 평형 상태에 입자 궤적 수치 해석을 도입, 입자들의 궤적을 나타낸 그림이다.

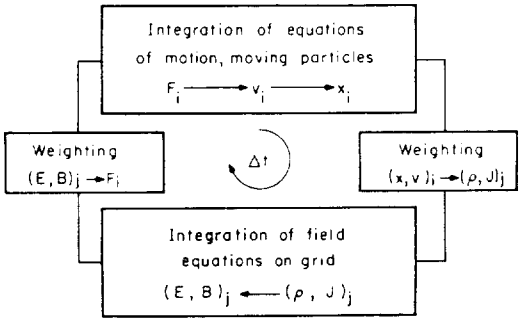

그림8. 입자수치 해석 프로그램에서의 계산순서

후자의 방법은 유한한 크기의 입자를 가정하는 Finite Size Particle 방법에 Grid Method를 적용하는 방법으로 그림 (7)과 같이 점전하가 아닌 주어진 Grid에 분포된 전하가 된다. 이런 가정하에서 그림 (8)에 나타난 것과 같이 순차적으로 변수의 값을 구한다. 전자장은 FFT(Fast Fourier Transform)을 사용하여 구한다.

4. 결 론

플라즈마를 도전성 유체라고 생각한다면 외부에서 인가된 전자장이 있을 때 전기장에 의해 전류가 생성이 되고, 이전류에 의해 자기장이 다시 생성되기 때문에 플라즈마 내에서는 self-consistence 한 전자장을 구한다는 것은 상당히 난해한 문제가 될 수 있다.

초고온 핵융합 플라즈마의 연구는 대용량 컴퓨터를 이용한 수치 해석적인 방법이 없이는 불가능할 정도로 중요하게 이용되고 있다. 최근에 그 이용 범위가 급속도로 널리 퍼지고 있는 저온 플라즈마의 경우, 내부에서 일어나는 복잡한 전리, 재결합, 여기 반응 등에 대한 이해가 없이 이용되고 있으나 더욱 정교한 제어가 요구되면서 이들 반응에 대한 이해가 필요하게 되었다. 이를 위해서 최근에 모델링에 관한 연구가 시도되기 시작하고 있다.

최근에 컴퓨터 용량 및 연산 속도의 급속한 증가가 종래에 불가능하게 여겨졌던 플라즈마 현상을 수치해석을 통해 이해가 가능하게 도와 주고 있으며 앞으로 플라즈마 연구에 있어서 그 중요성이 더욱 커지리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] Toshiko Tajima, "Computational Plasma Physics : With Application to Fusion and Astrophysics", Addison Wesley, 1989

[2] Charles K. Birdsall, A. Bruce Langdon, "Plasma Physics", McGraw-Hill, 1985

[3] Dale A. Anderson, John, C. Tannehill, Richard H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, 1984.

[4] Graham F. carey, J. Tinsley Oden, "Finite Elements,"Vol 1-2, Prentice-Hall, 1986