

# CAE를 위한 적응유한요소 모델링

주 관 정\* · 최 홍 순\*\*

(\*삼성전기(주) 종합연구소 CAD/CAM실장,

\*\*동 연구원)

## 1. 개 요

공학분야에서 부딪히는 물리현상들은 경계치 문제 (Boundary Value Problem)과 초기치 문제 (Initial Value Problem)로 표현될 수 있다. 특히 전자장 문제, 열전도 문제, Wave propagation 문제, Convecting flow 문제, 기구 연속체의 동력학적인 거동을 해석하는 문제들은 응용공학 연구·개발 부문에 있어서 중요한 과제로 부각되고 있다. 이러한 문제들은 다음과 같은 형태의 지배 방정식으로 표현될 수 있다.

$$c_1 \ddot{u}(x, t) + c_2 \dot{u}(x, t) + Lu = P(x, t) \quad (1.1)$$

윗식에서  $c_1, c_2$ 는 공간좌표 위치 ( $x$ )에 따라 정해지는 상수이고,  $L$ 은 선형미분 오퍼레이터이다.  $P$ 는 input flux등을 의미하는 forcing function 이다.

윗식의 해를 구하는 기법으로서 유한요소법 (FEM), 경계요소법 (BEM), 유한차분법 (FDM) 등이 있으나, 유한 요소법은 다른 방법들에 비해 문제 특성에 따라, 제약을 받지 않고 유연성이 큰 관계로 널리쓰이고 있다[1, 2]. 최근에는 유한요소법에 무한요소(Infinite Element) 타입의 Transfinite Elements 등을 혼합사용하는 연구도 행해지고 있다[3]. 전자장 해석 분야에서 이들 기법을 이용한 컴퓨터 응용설계 (CAE) 소프트웨어로서 상용화 된 것으로는 MSC사의 EMAS, MAGGIE 등을 비롯하여, MAXWELL, FLUX2D, MAGNUS, MAGNA/FIM, MAG-

NET, PETFEM, MEGA, ANSYS, PE2D, CARMEN, TOSCA, WEMAP 등이 있다.

본고에서는, 해의 영역을 유한요소로 분할하는 기법들에 대해 소개하고, 이와 관련된 오차산정에 대해 논하고, 적용예를 제시하기로 한다.

### 1.1 절점 위치의 최적화

유한 요소법의 정확도는 각 요소에 채용된 형상함수의 형태와 사용되는 요소의 갯수 또는 자유도 (Degree of Freedom)수에 의해 좌우되는데, 절점 위치 최적화 기법은 해를 풀기위해 유한요소의 갯수를 고정시키고(자유도의 총이용 갯수를 지정), 가능한 최적의 해를 구하기 위해, 최적의 Mesh Pattern 을 찾아가는 방법이다.

이는 크게 두가지로 나눌 수 있는데, 첫째 방법은 위치를 변수로 보고 해의 영역상에서 수치해석적인 truncation error를 최소화하는 기법이다. 이의 대표적인 것으로서 Moving Finite Element Method가 있다. 이 방법을 사용하면 Finite Element의 형상은 위치와 시간의 함수가 되고, 위치 또한 시간의 함수가 된다.

$$Q^e = Q^e(x(t), t) \quad (1.2)$$

따라서 해는 다음과 같이 Finite Element해를 구하게 된다.

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \cdot N_i(x(t)) \quad (1.3)$$

두번째 방법은 TPE(Total Potential Energy;  $\pi_p$ )를 최소화하는 기법이다. TPE가 Solution( $\mathbf{u}$ )나, 그 밖에 해에 영향을 주는 내부 변수(Internal Variable)들을 미지수로 간주하고 그들 변수에 대해 TPE를 최소화하는 Mesh pattern을 구하게 된다.

$$\pi_p = \pi_p(\mathbf{u}, \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \dots) \quad (1.4)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{u}} = 0, \frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{q}_a} = 0, \frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{q}_b} = 0, \dots \quad (1.5)$$

이들 최적화 방법의 단점들은 3가지로 나타난다.

- (i) Nonlinear System을 풀어야 하고
- (ii) Finite Element 경계에서의 연속성의 요구가 높고,
- (iii) Element의 왜곡(Distortion)이 심각하다  
(즉, Aspect Ratio가 매우 커질 수 있음)

### 1.2 적응분할(Adaptive Refinement)

처음에 주어진 거친 요소망(Coarse Mesh를 세분(refining)해 나가며, 원하는 정도의 Error 분포와 정밀도를 얻을 때까지 계속된다. Mesh를 세분한다는 것은 mesh의 자유도를 증가시키는 것을 의미하는 데, 그 방법으로는 주어진 mesh를 몇 등분으로 나누어서 mesh 크기를 줄여나가는 방법과, 형상함수(Shape Function)의 차수(Order of Polynomial)를 높여나가는 방법이 있다. 전자를 h-version refinement라고 하며 후자를 p-version refinement라 한다. 적응분할의 경우, 현재 주어진 mesh에 대해 수치적 해를 구하고 이를 근거로 오차추정을 행하는, a-posteriori error estimation이 종종 사용되며, 이를 근거로 어느 부분을(where) 언제(when) 어떻게(how) 세분할 것인가를 결정하며 세분하는 것을 "Adaptive Refinement"라고 한다. h-version과 p-version의 조합형태가 해의 수렴의 관점에서 보면 가장 효율적이나, 프로그램 상에서 난점이 많으므로 문제에 따라 h-version이나 p-version을 택일하고 있다.

시간에 따라 wave front가 이동하는 현상을 파악하려고 할 경우 mesh의 세분영역이 이동하는 방법을 택하곤 하는데, 이 경우에는 요소의 추가 뿐만 아니라, 지움(deletion)도 행해지므로, mesh 데이터의 데이터 처리가 특히 효과적으로 이루어져야 한다.

### 2. 계층적 분할(Hierarchical Refinement)

FEM은 연속체를 이산화함으로써 수치해를 구하는 기법이므로, FEM 해의 수렴도는 이산화 방법에 좌우된다.

FEM해와 엄밀해와의 오차는 간략히 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Error} \approx O(h^p) \quad (1.6)$$

여기서  $h$ : max of element size

$p$ ; order of polynomials in the shape function

tion

근사해의 정확도를 높이기 위해 요소의 개수를 늘리는 방법( $h$ 를 작게)이 h-refinement이고, 더 높은 차수의 요소를 사용하는 방법( $p$ 를 크게)이 p-refinement이다. h-refinement의 mesh 분할형태의 방법으로는, 2분법(Bisection Method) [4], Delaunay법 [5] 등이 있다.

계층적 근사화(hierarchical approximation)란, 만일 미지수  $\mathbf{u}$ 를 유한요소 해라 하면

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i \mathbf{N}_i \quad (1.7)$$

여기에서  $r$ 을  $r+1$ 로 증가시킬때 형상함수  $\mathbf{N}_i, i=1, \dots, r$ 은 변화시키지 않고 추가로  $r+1$ 번째 형상함수를 첨가시키는 경우를 계층적 근사화라 한다. 계층적 분할의 h-type과 p-type의 형상 함수가 그림 1, 2, 3, 4에 표시되어 있다.

지배방정식(1.1)에 표준적 Galerkin 방법을 적용

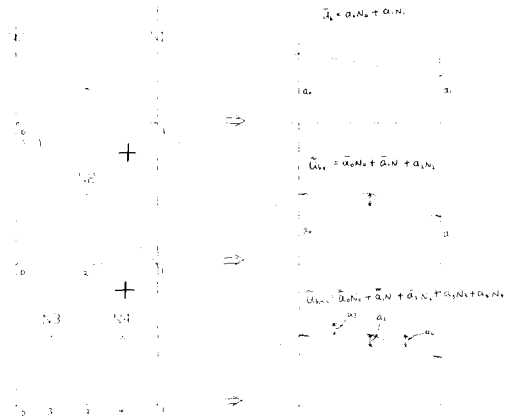


그림 1. 1-D 계층적 h-refinement

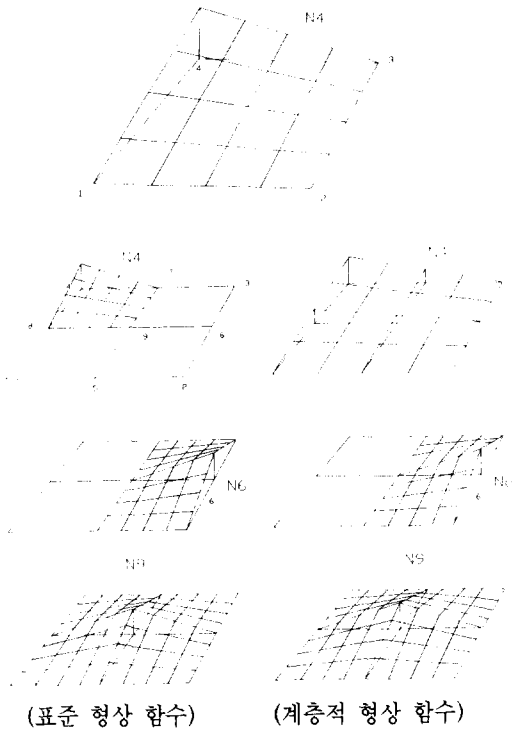


그림 2. 2-D h-refinement

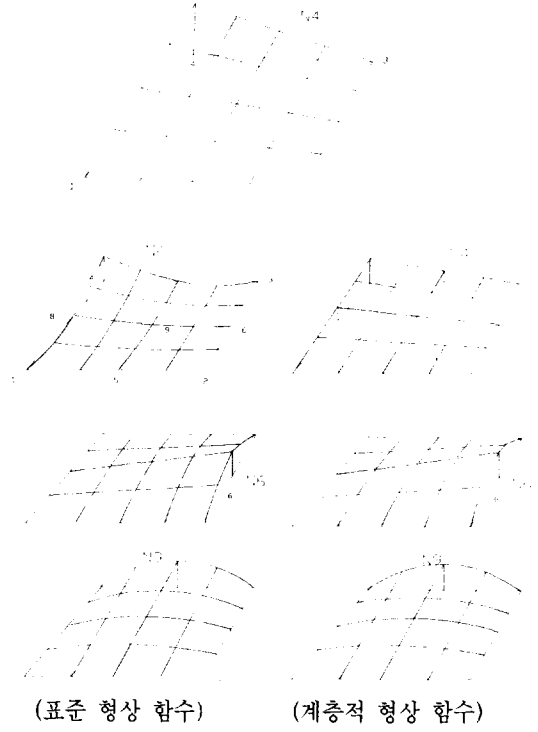


그림 4. 2-D p-refinement

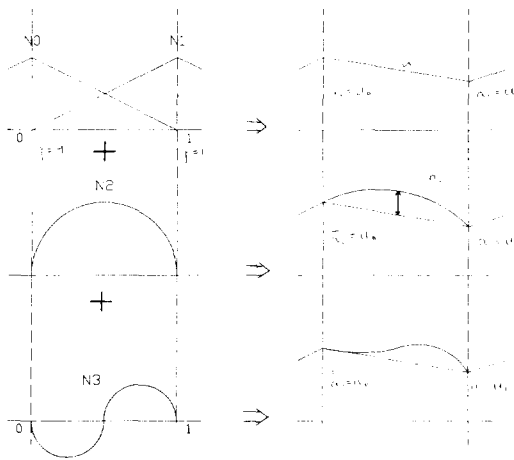


그림 3. 1-D 계층적 p-refinement

하면, 평형 방정식은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{A}_{(n)}\ddot{\mathbf{a}}_{(n)} + \mathbf{B}_{(n)}\dot{\mathbf{a}}_{(n)} + \mathbf{C}_{(n)}\mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{f}_{(n)} \quad (1.8)$$

위 식에서 (n)은 n개의 자유도를 지칭한다. 전자 기장 해석에 관한 문제일 경우, Maxwell 방정식으로부터 형성되는 식(1.8)의 계수 매트릭스  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$

는 각각 dielectric material, conductivity, reluctivity를 나타내는 매트릭스이고, 벡터  $\mathbf{f}$ 는 전류와 전하 형태의 하중항이다.

식(1.8)에서 m개의 새로운 자유도를 추가로 늘리면(mesh 세분에 의해)

$$\mathbf{A}_{(n+m)}\ddot{\mathbf{a}}_{(n+m)} + \mathbf{B}_{(n+m)}\dot{\mathbf{a}}_{(n+m)} + \mathbf{C}_{(n+m)}\mathbf{a}_{(n+m)} = \mathbf{f}_{(n+m)} \quad (1.9a)$$

또는

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(n)} & \mathbf{A}_{(n,m)} \\ \mathbf{A}_{(m,n)} & \mathbf{A}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_{(n)} \\ \ddot{\mathbf{a}}_{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(n)} & \mathbf{B}_{(n,m)} \\ \mathbf{B}_{(m,n)} & \mathbf{B}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{(n)} \\ \dot{\mathbf{a}}_{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{(n)} & \mathbf{C}_{(n,m)} \\ \mathbf{C}_{(m,n)} & \mathbf{C}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{(n)} \\ \mathbf{a}_{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{(n)} \\ \mathbf{f}_{(m)} \end{Bmatrix} \quad (1.9b)$$

식 (1.8)의  $\mathbf{A}_{(n)}$ ,  $\mathbf{B}_{(n)}$ ,  $\mathbf{C}_{(n)}$ 와  $\mathbf{f}_{(n)}$ 은 식 (1.9b)에 그대로 이용할 수 있으므로 다시 계산하지 않고 추가된 부행렬만 계산 하면 된다.

### 3. 오차 산정

#### 3.1 오차 원인

오차는 크게 3가지로 분류된다.

- (a) 수학적 모형화 오차
- (b) 이산화 오차
- (c) 수치해석적 오차

3.1.1 수학적 모형화 오차

- (a) 재질특성 모형화: 구조 방정식, 재질 상수
- (b) 경계 조건의 모형화: essential b.c. (fixed, free, adiabatic 등)
- (c) 외력조건 모형화

3.1.2 이산화 오차

- (a) 공간 이산화: 요소 크기, 요소 형태
- (b) 시간 이산화: 안정도(Stability), 일관성(consistence)

3.2 오차

Mesh의 생성은 error measure에 근거하게 되는데, 이에는 SED(strain Energy Density)나 residual force 등이 이용된다.

근사해와 엄밀해간의 오차 벡터를  $e$ 라고 하면, 정적문제(stationary problems)의 경우 오차  $e$ 는 아래와 같은 부등식을 만족한다.

$$\|e\| \leq ch^\alpha; \alpha = \min(k+1-m, r-m) \quad (1.10)$$

- 여기서  $k$ : order of finite element
- $r$ : 엄밀해의 regularity
- $m$ : weak form에 나타나는 order of derivatives
- $c$ :  $k$ 와 요소크기에 따라 정해지는 상수

Time dependent인 경우는 더욱 복잡한 형태를 취하게 되는데

$$\|e\| \leq c_1(\|u\|)h^\beta + c_2\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|, \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|\right)h^\gamma$$

$$\beta = k+1-m$$

$$\gamma = \min(2(k+1-m), k+1)$$

식 (1.10)이나 (1.11)에 있어서, Norm의 type은 2-Norm, Max Norm, Energy Norm 등을 취할 수가 있으나, 풀려고 하는 문제의 종류에 따라 선택할 수 있다.

Energy Norm이 계산하기에는 노력이 들지만 대부분의 경우에 만족할 만한 좋은 결과를 보여준다.

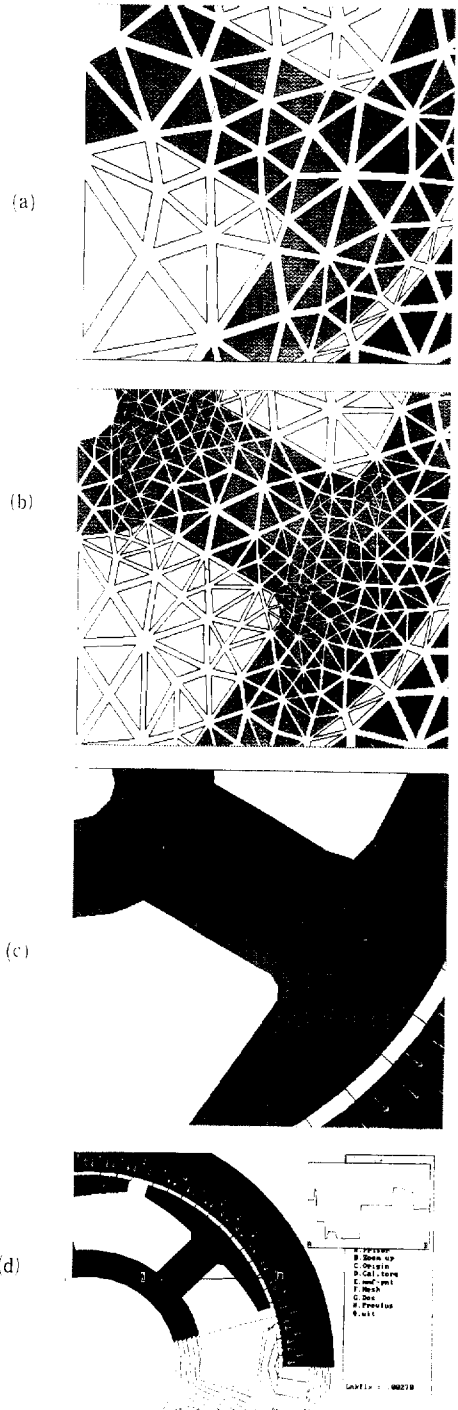


그림 5. (a) 모터해석을 위한 초기 요소망  
 (b) 최종 적응분할 요소망  
 (c) (b) 요소망에서의 자속 분포  
 (d) HDD Spindle 모터의 해석

## 4. 응용예

### 4.1 전자기장 문제

그림5에 2극 DC 모터의 적용예를 나타내었다. 그림5 (a)에 초기 요소분할의 일부를 나타내고 있고, 그림5 (b), (c)에 이분법에 의한 적용요소 분할의 최종결과 mesh와 자속분포를 나타내었다. 자속의 변화가 심한 곳과 굴곡이 있는 곳에 요소세분이 많이 이루어졌음을 관찰 할 수 있다. 그림 5. (d)에는 하드 디스크의 스피들 모터의 해석예를 보인다.

### 4.2 탄성체 동력학 문제

그림6(a)에 보여진 바와 같이 pulse loading을 받는 탄성 구조물을 4개의 4절점 사각요소로 초기 모델링을 했다. 분할방법은 h-refinement를 택했으며 이분법을 적용하였다. 계수 행렬 A, B, C, f의 형성은 hierarchical formulation을 사용하므로써 계산 시간을 절약했다. 그림6 (b)는 최종 분할된 mesh를 나타내 보이며 이에 따른 z 방향 Max. Stress를 그림 6 (c)에 등고선도로 도시했다.

이와 같은 mesh 형태는 Energy Norm[6]을 기준으로 얻어진 결과로서 Stress의 변화치가 큰 곳도 세분화된 mesh를 제공함을 확인할 수 있다.

## 5. 맺음 말

응용공학 문제들은 일반적으로 시간의 존장에 관련된 문제들이다. 해결하고자 하는 문제의 공간영역이 크고, 시간영역이 또한 큰 것이 보통인데, 이럴수록 유한요소법이나 그 밖의 다른 이산화 방법을 이용할 경우 자유도를 줄임으로서 수치해석상의 문제의 크기를 줄이는 문제는 중요한 과제가 아닐 수 없다. 고주파 성분에 대한 영향을 파악해 내기 위해서는 유한요소의 수 또는 자유도의 수를 늘려야 하므로 한없이 문제의 크기가 커질 수 있기 때문이다. 따라서 분할의 기준이 되는 오차(error)의 산정은 어떻게 구할 것인지 하는 문제 또한 중요한 연구과

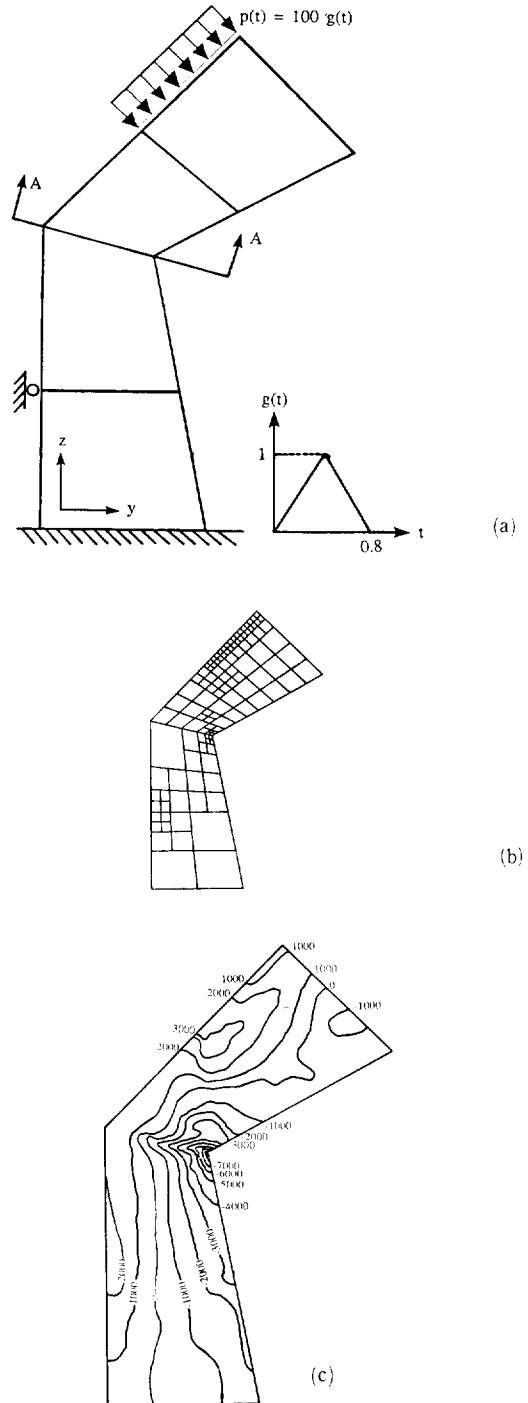


그림 6. (a) pulse loading을 받는 평면 탄성체  
(b) 적용유한요소분할  
(c) Z방향 최대응력분포

제가 된다.

서두에서도 언급했듯이 공학문제 전반에 걸쳐서 응용가능한 연구분야이므로, 적응요소분할에 대한 연구가 활성화 되길 기대한다.

#### 참 고 문 헌

- [1] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Ed, McGraw Hill, 1977
- [2] P. P. Silvester and R. L. FERRARI, Finite elements for electrical engineers, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1983
- [3] Z. J. Cendes and J. F. Lee, "The transfinite element method for modelling MMIC devices," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 36, 12, 1639-1649, 1988.
- [4] 최홍순, 최경, 정현교, 한송엽, "적응분할을 위한 오차 추정에 관한 연구", 전기학회 논문집 37권 3호, pp. 141~145, 1988.
- [5] Z. J. Cendes, D. Shenton and H. Shahnasser, "Magnetic field computation using Delaunay triangulation and Complementary finite element methods", IEEE Transactions on Magnetics, MAG-19, 6, 2551-2554, 1983.
- [6] K. J. Joo and E. L. Wilson, An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis, 30, 6, 1319-1339, 1988.