

電磁場 解析에의 有限 要素法 應用

임 달 호

(한양대 공대 전기공학과 교수)

1. 序 論

電氣工學에서 제기되는 物理的인 諸般現象은 일반적으로 복잡한 分布特性을 갖는 連續的인 現象으로서 이러한 現象들은 그 物理場을 支配하는 支配方程式에 의해 表現되는 것이 보통이며, 이러한 支配方程式은 偏微分方程式으로 주어지는 것이 一般的이다.

그러나 工學上 직면하게 되는 이와같은 偏微分 方程式들은 항상 여러가지 物理的인 條件들이 附加되기 때문에 Laplace變換이나 Fourier變換, 또는 變數分離法등을 利用하는 解析的인 方法으로 解를 구하는 것은 대단히 어려우며, 또한 不可能한 것도 많이 存在한다. 따라서 최근에는 解析的인 方法을 使用하는 대신 電子計算機를 利用한 有限差分法, 境界要素法, 有限要素法등의 數值解析法을 利用하고 있는 實情이다[1, 2]. 그 중 有限要素法이 複雜한 境界條件의 處理, 재료의 非線形性 및 異媒質性등의 處理가 容易하여 가장 강력한 解析手段으로 確立되었다[3, 4].

有限要素法(Finite Element Method)은 1950년대 構造工學分野에 適用한 것을 母胎로 컴퓨터의 급속한 發達에 힘입어 짧은 歷史에도 불구하고 현재 利用하고 있는 解析技法 中 가장 강력한 手段이 되었으며, 電氣工學分野에 應用된 것은 1970년 P. Silvester교수가 電氣機器의 磁氣의 特性解析에 適用한 것을 始初로 현재는 界變數의 連續性뿐만 아니라

그 1階 導函數까지도 連續인 C1 Problem, 回轉子側(또는 2次側)에서의 過電流分布 現狀, 領域分割에 따른 誤差를 補正하기 위한 適應要素分割法, 計算時間의 短縮을 위한 JCG법, ICCG법 適用, Personal Computer을 利用한 精密機器의 設計, 無限領域問題를 考慮하기 위한 有限-境界要素法의 混合適用研究 등 괄목할 만한 成果를 이루어 管路氣中 送電線의 電界解析, 電磁波 導波路의 傳播問題등에 이르기 까지 電氣工學分野에서 適用되지 않는 分野가 없을 만큼 큰 進展을 보게 되었다[5-15].

따라서 本稿에서는 電氣工學의 諸般分野중 有限要素法이 가장 널리 利用되고 있는 電氣機器의 解析法을 위주로 既述하고 그의 分野는 간단히 소개 정도로만 既述하기로 한다.

2. 有限要素法の 研究開發 現況

電氣機器의 設計 및 特性解析에 있어서 絕緣耐力의 向上, 損失의 輕減, 溫度上昇의 抑制, 機械的 強度의 增加, 小型, 高效率, 高信賴性등을 얻기 위하여 有限要素法이 주로 利用되고 있으며 현재 각 分野에서 이루어지고 있는 研究活動을 소개하면 다음과 같다.

먼저 電氣解析分野를 살펴보면 電氣機器의 絕緣構造設計에 있어서 가장 중요한 것은 電界의 數值解析이며, 電界解析을 수반하지 않은 絕緣設計는 있을 수 없다고 하여도 과언이 아니다. 특히 전계분포가

最適이 되는 電極 및 絶緣物의 形狀과 그 配置를 數值解析에 의해 구하는 方法의 개발은 주목할 만하다. 精電界뿐만 아니라 汚損碍子 등에서는 漏洩電流를 고려한 解析도 행해지고 있다. 또 이온전류장 的 解析도 이루어지고 있으며 絶緣抵抗值가 電界 및 溫度의 函數가 되는 直流 Cable 및 半導體素子에 대해서는 非線形解析이 행해지고 있다[14].

둘째 磁界解析에 있어서는 鐵心내의 磁束分布, 토크 등의 空間的 및 時間的 變化를 구하고 이로부터 鐵心構造의 양, 부를 판정하고 磁損, 勵磁電流 및 임피던스를 計算하는데 有限要素法이 이용되고 있다. 자속은 일반적으로 歪形波가 되며, 局部的인 回轉磁界가 발생하므로 이들을 考慮한 Hysteresis損 및 渦流損의 算定 및 漏洩磁束에 의한 局部過熱과 波形의 歪形, 磁損 등의 計算을 통하여 磁氣回路의 形狀 및 數值決定에 까지도 有限要素法이 이용되고 있다.

세째 應力 등의 解析에 있어서는 熱, 電磁曆, 遠心力 등에 의한 應力分布의 解析, 軸振動 輕減을 위한 振動解析, 熱傳導, 溫度上昇, 通風, 冷却計算 등이 행해지고 있으며 油壓機器用 絶緣物의 含浸過程, 濕氣의 擴算過程 등에 대한 계산도 행해지고 있다.

3. 解析理論[4-13]

電氣機器중 가장 널리 사용되는 것은 鐵心の 磁束을 이용한 磁界形 에너지 變換機器로서 이의 이해를 위해서는 機器의 電磁界解析이 무엇보다도 선행되어야 한다. 이에 따라 본고에서는 有限要素法의 應用에 중점을 두고 電氣機器중에서 가장 대표적인 發電機, 電動機, 變壓器 등의 電磁界解析方法에 대하여 약속한다.

3.1 基本方程式

가. 電界計算의 基本方程式

空間電荷密度가 주어졌을 때 임의의 점에서 發散하는 電束密度 D는 電界에 대한 Gauss법칙의 微分形으로 부터

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1)$$

로 주어진다. 또한 電界의 세기 E와 電束密度 D사이에는

$$D = \epsilon E \quad (2)$$

의 관계가 있다. 여기서 ϵ 는 誘電率이다. 그리고 電界에 대한 Scalar Potential을 V라 하면

$$E = -\nabla V \quad (3)$$

가 성립한다.

식 (2), (3)을 식(1)에 代入, 整理하면

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (4)$$

와 같은 電界에 관한 非線形 Poisson 方程式이 얻어지는데, 이 식(4)가 電氣機器에 있어서의 電界를 解析하기 위한 基本方程式이 된다. 그리고, 二次元 解析의 경우 식 (4)는

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\rho \quad (5)$$

이 된다.

나. 磁界計算의 基本方程式

變位電流가 무시되는 準定常狀態에서 電流密度 J에 의해 發生되는 磁界의 세기 H는 Ampere法則으로부터

$$\nabla \times H = J \quad (6)$$

가 된다. 또한 磁界의 세기 H와 磁束密度 B사이에는

$$H = vB \quad (7)$$

의 관계가 성립한다. 여기서 v 는 磁氣抵抗率, 즉 透磁率의 역수이다.

또한 Gauss의 법칙으로부터

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (8)$$

이므로

$$B = \nabla \times A \quad (9)$$

가 되는 새로운 벡터 A를 定義할 수 있다. 이를 자기 벡터 포텐셜이라 한다. 한편 微小電流素로부터 거리 R만큼 떨어진 지점의 자기 벡터 포텐셜 A는 Biot-Savart의 法則으로부터

$$A = \frac{R}{4\pi} \int_{\text{tot}} \frac{J}{R} dv \quad (10)$$

가 되므로 자기 벡터 포텐셜 A의 方向은 電流密度 J의 方向과 같다. 여기서 J 및 dv는 각각 微小體積素의 電流密度 및 體積이다.

따라서 식 (6)은

$$\nabla \times H = \nabla \times vB = \nabla \times (v \nabla \times A) = J \quad (11)$$

가 되며 여기에 벡터 공식 및 Coulomb-gauge條件을 適用하여 整理하면

$$\nabla \cdot (v \nabla A) = -J \quad (12)$$

이 된다. 식(12)로 주어진 非線形 Poisson方程式이 電氣機器의 磁界解析을 위한 基本方程式이다. 한편 2次元解析의 경우 電流密度的 方向을 z축방향으로 가정하고 식(12)를 整理하면

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (13)$$

가 된다. 식(5)와 식(13)을 비교해보면 V와 A, ε과 v, ρ와 J가 서로 對應되므로 식(13)에 의한 磁界計算過程을 식(5)에 의한 電界計算過程에 그대로 확장 적용할 수 있음을 알 수 있다. 이와같이 有限要素法은 하나의 문제를 풀면 그와 유사한 유형의 문제에 곧바로 적용할 수 있는 凡用性을 지니는 것이 큰 장점이다.

그리고 誘導機의 경우에는 回轉子捲線에

$$J_1 = \sigma(E + v \times B) \quad (14)$$

와 같은 誘導電流가 발생된다. 여기서 σ는 導電率, v는 回轉子の 速度이다. 또한 電界의 세기와 磁束密度 사이에는

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (15)$$

의 관계가 있으므로

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A) = \nabla \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

즉,

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

가 된다. 따라서 식(14)는

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + v \times A \right) \\ &= \sigma \left\{ -\frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

가 된다. 그런데 同期速度를 v_s, slip를 s라 하면

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma \left\{ -\frac{\partial A}{\partial t} + (1-s)v_s \times (\nabla \times A) \right\} \\ &= \sigma \left\{ -\frac{\partial A}{\partial t} + v_s \times (\nabla \times A) - sv_s \times (\nabla \times A) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

가 된다. 식(17)의 右邊 제1항 σ ∂A/∂t는 回轉子 停止시 磁束密度 B의 時間的 變化에 의해 發生되는 變壓器 起電力에 의한 誘導電流이고, 제2항는 磁束密度 B가 同期速度 v_s로 回轉할 때 回轉子捲線에 發生되는 速度起電力에 의한 誘導電流이므로 결국 이 두 전류는 같은 량이 되어

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma v_s \times (\nabla \times A) \quad (18)$$

가 된다. 따라서 식(17)은

$$\begin{aligned} J_1 &= -\sigma v_s \times (\nabla \times A) \\ &= -\sigma s \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

가 된다.

그러므로 誘導機解析의 경우에 있어서의 基本方程式은 固定子側에서는 식(12), 回轉子側에서는 식(19)에 의해

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \sigma s \frac{\partial A}{\partial t} \quad (20)$$

가 된다.

3.2 變分原理, Galerkin 理論과 要素 Matrix式 [1-9]

3.2.1 變分原理

임의의 汎函數

$$x = \iint_R f(x, y, A, A_x, A_y) dx dy \quad (21)$$

를 고려하자. 여기서 A=A(x, y), A_x=∂A/∂x, A_y=∂A/∂y이다.

汎函數 x의 停留條件을 구하기 위해 變分을 취하여 영으로 놓으면

$$\begin{aligned} \delta x &= \iint \left(\frac{\partial f}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f}{\partial A_x} \delta A_x + \frac{\partial f}{\partial A_y} \delta A_y \right) dx dy \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial f}{\partial A} \delta A - \delta A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) - \delta A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) \right] dx dy + \iint_n \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta A \frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta A \frac{\partial f}{\partial A_y} \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

가 되며, 여기에 Green整理를 適用하면

$$\begin{aligned} \delta x &= - \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} \right] \delta A dx dy + \oint_r \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial A_y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \delta A d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

가 된다. 여기서 P는領域 Γ 를 둘러싸고 있는境界이며, n은境界 Γ 에서外部로 향하는單位法線 벡터이다. 그러므로 식 (23)이 성립하기 위하여는領域 R내에서는

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \quad (24)$$

이며, 또境界 Γ 상에서는

$$\frac{\partial f}{\partial A_x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial A_y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad (25)$$

혹은

$$\delta A = 0 \quad \text{즉 } A = \text{상수} \quad (26)$$

이 만족하여야 한다. 식 (24)을 Euler-Lagrange 方程式, 식 (25)을 自然境界條件 (Neumann Condition), 식 (26)을 固定境界條件 (Dirichlet Condition)이라 한다. 有限要素法에서는 식 (13) 또는 (20)을 직접 푸는 대신 이 식을 Euler-lag range 方程式으로 하는 식 (21) 형태의汎函數를 구하여 最小化原理에 의해 A를 구하게 된다.

3.2.2 Galerkin理論

Galerkin理論은 加重殘差法の 한가지로서 有限要素法에 이를 適用하면 變分原理로부터 구한 결과와 같은 聯立方程式을 얻을 수 있으며, 특히汎函數가 존재하지 않거나 구하기가 까다로운 경우에 매우 유효하다.

Galerkin理論의 原理를 살펴보면

$$\mathcal{L}(\phi) - f = 0 \quad (27)$$

로 표현되는 偏微分方程式의 界變數 ϕ 를

$$\phi = \sum_{i=1}^N N_i \phi_i \quad (28)$$

로 近似化하면

$$\mathcal{L}(\phi) - f = R \neq 0 \quad (29)$$

가 된다. 여기서 \mathcal{L} 은 微分演算子이면, R은 殘差이다. 이 殘差 R을 全解析領域 Q에서 영 또는 最小가 되게 하는 加重函數 W_q 를 가정하면

$$\int_Q [L(\phi) - f] W_q dQ = \int_Q R \cdot W_q dQ = 0 \quad \text{또는 最小} \quad (30)$$

를 얻을 수 있다. Galerkin理論은 식(28)에서의 補間函數 N_q 를 加重函數로 사용하는 방법으로서

$$\int_Q [L(\phi) - f] N_q dQ = 0 \quad (31)$$

로부터 ϕ_b 를 未知數로 하는 多元聯立方程式을 구하여 이를 푸는 방법이다.

3.2.3 要素 Matrix式과 界方程式

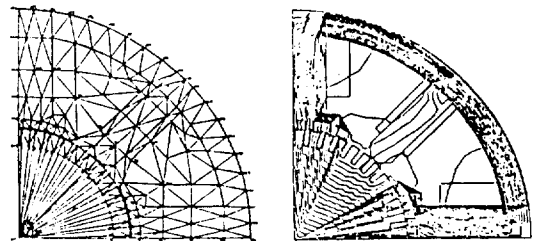
解析하고자 하는 電氣機器를 모델로하여 解析領域을 要素分割한 후, 각 要素에 대해 變分原理 또는 Galerkin理論을 適用하여 要素 Matrix식을 구하고 이를 全解析領域에 대해 組合하면 大次元 Matrix 方程式을 구할 수 있다. 이를 電子 計算機에 의해 풀어 각 節點을 Potential을 구하면 等포텐셜도등 얻고자하는 결과를 얻을 수 있다.

3.3 發生토크

電氣機器의 發生 토크를 計算하는 방법에는 Maxwell Stress Tensor法과 假想變位の 原理가 주로 이용되고 있다. 本稿에서는 Maxwell Tensor法에 의한 토크演算過程을 간략히 기술하면 다음과 같다.

(1) 有限要素法을 이용하여 磁氣 벡터 포텐셜 및 要素 磁束密度를 구한다.

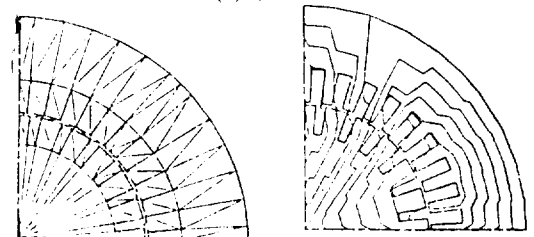
$$B_x = \sum_{i=1}^N 1/2 \Delta \cdot c_i A_i, \quad B_y = \sum_{i=1}^N 1/2 \Delta \cdot b_i A_i \quad (32)$$



(a) 直流機

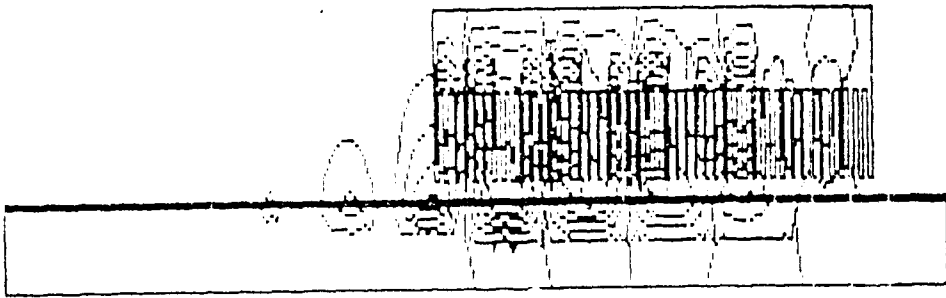


(b) 同期機

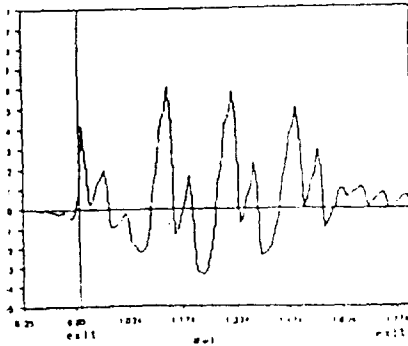


(c) 誘導機

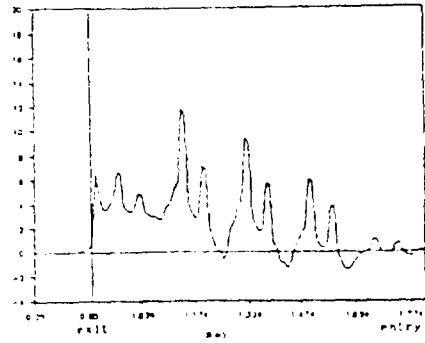
그림 1. 一般 電氣機器 解析 例



(a) 磁束分布圖

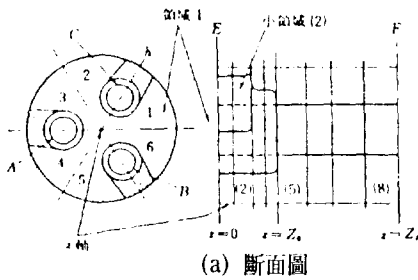


(b) 推力分布

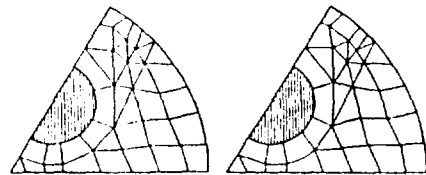


(c) 垂直力分布

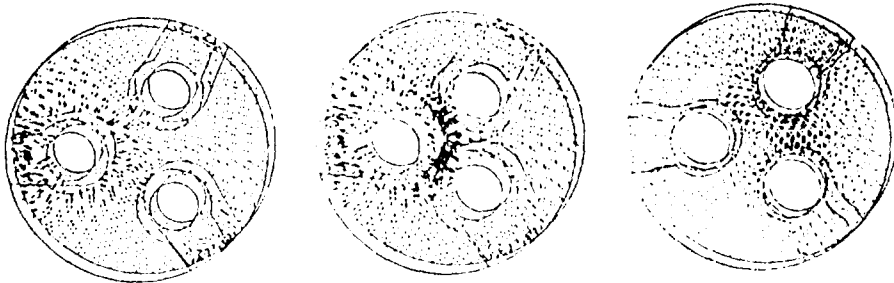
그림 2. 線形 誘導 電動機 解析 例



(a) 斷面圖



(b) 要素分割圖



(c) 電界分布

그림 3. Cable의 電界解析 例

- (2) 공극에서의 積分經路를 선택한다.
- (3) 각 공극요소의 表面應力 P를 計算한다.

- $$P = 1/\mu_0(n \cdot B)B - 1/2\mu_0 B^2 n$$
- (4) 전체 토크를 計算한다.

(3)

$$T = \sum \Delta Ti = \sum ri \times Pi \Delta li \quad (34)$$

4. 解析例 [2, 3, 5, 14]

그림 1은 一般 回轉機器의 解析例를 나타낸 것으로서 (a), (b), (c)는 각각 直流機, 同期機, 誘導機의 예이며 그림 2는 최근 磁氣浮上列車의 구동원으로 脚光을 받고 있는 線形 誘導 電動機의 解析例로서 (a) 磁束分布圖를 (b) 및 (c)는 發生推曆 및 垂直力의 空間的 分布를 나타낸 예이다. 그림 3은 銅 또는 알루미늄 파이프 등의 導體를 에폭시 수지제에 柱狀(또는 圖板狀)의 spacer로 지지하고 sheath내에는 SF₆가스를 封入한 管路氣中 送電 Cable의 전계 해석예를 나타낸 것이다. (a), (b), (c)는 각각 斷面, 要素分割圖, 電界分布를 나타낸 예이다. 그림 4는 主열등으로 인한 溫度上昇을 有限要素法으로 解析한 예로서 同期電動機의 磁極部位에서 起動時 溫度變化를 实测치와 比較하여 나타낸 것이다.

5. 結論

本稿에서는 有限要素法에 의한 電磁場 數値解析例를 간략히 既述하였다. 짧은 歷史에도 불구하고 有限要素法이 오늘날처럼 各광을 받게 된 것은 많은 숨은 공로자들의 勞苦가 있었기 때문이다. 앞으로 産學協同등의 배전의 노력을 경주한다면 先進外國에서 처럼 小型精密모터등의 設計 및 製作등의 CAD화

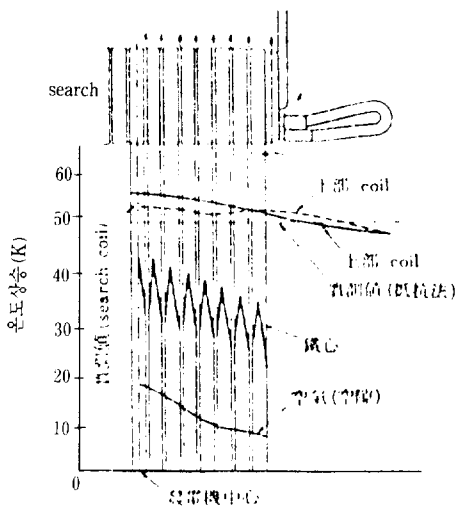


그림 4. 溫度分布 解析例

도 그리 멀지 않으리라 생각하며 최근의 技術이나 研究動向에 대해서는 IEEE의 주관하에 격년으로 개최되는 “COMPUMAG”등의 문헌을 참고하면 될것이며 관련 종사자들의 健闘를 빕니다.

참고 문헌

- [1] 山村, 外, “電氣工學における有限要素法”, 電氣學會雜誌, vol. 98, no. 3, pp.161-186, 1977.
- [2] 有限要素法による電氣機器の電磁界解析法調査專門委員會, “有限要素法による電力機器の電磁界解析の現狀”, no. 118, 1981.
- [3] 任達鎬, “電氣機器의 解析技術”, 電氣學會誌, vol. 35, no. 9, pp.611-619, 1986.
- [4] 任達鎬, “電氣係의 有限要素法”, 動明社, 1987
- [5] M. V. K. Chari, P. P. Silvester, “Finite Elements in Electrical and Magnetical Field Problem”, John Wiley & Sons Inc, 1980.
- [6] 中田高義, 高校則雄, “電氣工學の 有限要素法”, 森北出版, 1982.
- [7] 任達鎬, 金生洙, 金奎卓, “C-1 有限要素法에 의한 磁界解析에 관한 研究”, 電氣學會 論文誌 vol. 37, no. 1, pp.18-24, 1988.
- [8] 任達鎬, 金晔洙, 辛興教, “電流벡터 포텐셜을 이용한 渦流分布의 有限要素解析에 관한 研究”, 電氣學會 論文誌 vol. 37, no. 12, pp.839-846, 1988.
- [9] 韓松擘, 李基植, 鄭炫教, 外, “정자력 계산을 위한 적용 유한 요소법”, 電氣學會 論文誌 vol. 38, no. 2, pp.100-105, 1989.
- [10] 任達鎬, 辛興教, “有限要素法에 의한 非線形 磁界解析에 公厄 勻配法 適用 研究”, 電氣學會 論文誌 vol. 39, no. 1, pp.22-28, 1989.
- [11] 金燦五, “境界要素法과 有限要素法에 의한 變壓器의 磁氣的 特性解析에 관한 比較研究”, 博士學位論文, 漢陽大學校, 1985.
- [12] 中田, 外, “半無限要素를 用いた開領域解析法의 改良”, 電氣學會 全大論文誌, no. 662, 1983.
- [13] A. A. Abdel Razek, et al, “Conception of and Air-Gap Element for the Dynamic Analysis of the Electromagnetic Field in Electric Machines”, IEEE Trans., vol. MAG-18, no. 2, pp. 655-659, 1982.
- [14] T. Misaki, et al, “Optimization of Three-Dimensional Electrode Contour Based on Surface Charge Method and Its Application to Insulator Design”, IEEE PES Meeting, no. 82, SM 462-, 1982.
- [15] 村田, “電子計算機と有限要素法”, 日本應用磁氣學會誌, vol. 5, no. 5, pp.266, 1981.