

영구자석전동기의 코깅토크저감을 위한 민감도에 의한 형상 최적화

Shape Optimization for Reduction of Cogging Torque in Permanent Magnet Motor by Sensitivity Analysis

朴 日 韓* · 李 範 澤** · 鄭 炫 教*** · 韓 松 曄§
 (Il-Han Park · Beom-Taek Lee · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

요 약

본 논문에서는 영구자석전동기에서 발생하는 코깅토크를 저감하기 위하여 영구자석의 형상 또는 철자극(iron pole)의 형상을 최적화하는 기법을 다루었다. 코깅토크는 영구자석과 철자극 사이의 상대적 위치변화에 따른 자기에너지변화로 발생되므로 이 자기에너지변화를 목적함수로 취하고 이 목적함수가 최소가 되는 형상을 구하였다. 영구자석 표면 및 철자극의 표면 위치를 설계변수로 취하고 민감도가 높은 위치의 형상을 변화시켰다. 민감도계산은 유한요소법을 이용하였다.

본 방법을 소형직류전동기에 적용한 결과 코깅토크가 원래값의 10분의 1까지 감소하는 결과를 얻었다.

Abstract- In order to reduce the cogging torque in a permanent magnet motor, a method to optimize the shape of permanent magnet and iron pole is presented. Since the cogging torque comes from the irregular system energy variation according to the rotor position, system energy variation is taken as object function and the object function is minimized to optimize the shape. The positions of permanent magnet surface and iron pole surface are chosen as design parameters and sensitivity of object function with respect to the design parameter is calculated. The shape is changed according to sensitivity. Sensitivity can be generated by methods that exploit the FEM formulation. A numerical example shows that the cogging torque is reduced to about 10% of the original value.

*正 會 員 : 서울大 大學院 電氣工學科 卒業 · 工博
 **正 會 員 : 서울大 大學院 電氣工學科 碩士課程
 ***正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
 §正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
 接受日字 : 1990年 2月 2日
 1次修正 : 1990年 9月 24日
 2次修正 : 1990年 10月 29日

1. 서 론

電磁素子(electromagnetic device)의 응용이 광범해짐에 따라 소형화, 경량화, 고성능화, 고효율화 등을 위한 최적설계의 필요성은 증대하고 있다. 하지만 현재까지는 電磁素子の 설계시 주로

퍼미언스법 또는 실험식을 이용하여 기본적인 설계를 한 후 유한요소법등 각종 해석법을 통하여 성능을 평가하고 이것이 설계사양에 미치지 못하면 경험에 의한 시행착오를 거쳐 설계를 변경하여 왔다. 이와같은 설계과정은 서로 복잡한 관계를 갖는 설계변수(parameter)들을 시행착오적인 방법으로 결정하는 것이기 때문에 그 과정이 체계적이지 못하여 많은 시간을 요할 뿐 아니라 설계목적 을 만족하는 최적의 설계변수를 찾는 것 자체가 불확실하게 되는 문제점이 있다.

따라서 본 연구에서는 설계치의 변화가 동작특성에 어떤 영향을 미치는지에 대한 정보 즉 설계 민감도를 기존의 유한요소법을 이용하여 도출하고 [1], 얻어진 설계민감도를 최적화 알고리즘에 도입하여 개선된 설계변수를 반복적으로 찾아낸다. 영구자석전동기에서의 코깅토크는 영구자석과 철자극(iron pole)의 상대적 위치에 따른 시스템에너지 변동에서 발생한다고 볼 수 있기 때문에 영구자석이나 철자극의 형상을 적당히 변형시키면 시스템에너지의 변동을 감소시킬 수 있고 그에 따라 코깅토크도 감소된다는데 착안하였다. 따라서 목적함수를 시스템에너지의 변동으로 하고 이를 최소화하도록 민감도를 이용한 최적화 과정을 수행한다. 이러한 영구자석전동기의 형상최적화 과정은 그림 1의 흐름도에서 볼 수 있다.

영구자석전동기에서의 코깅토크는 주토크(main torque)에 있어서 토크진동을 발생하기 때문에 기계적 진동의 원인이 되고 정속도 운전의 방해가 되며 영구자석전동기의 대형화에 있어서 장애가 된다.

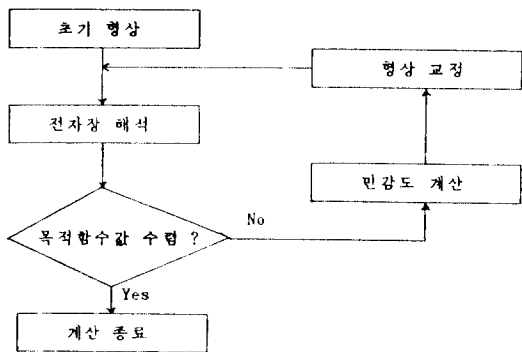


그림 1 형상최적화의 흐름도
Fig. 1 Flow chart of shape optimization

2. 정자계에서의 민감도 계산

電磁素子는 형상변수(자극형상, 공극, 자석형상 등)와 물성변수(투자율, 유전율, 전류밀도 등)에 의하여 그 특성이 결정된다. 이러한 설계변수들의 미소한 변화에 따라 電磁素子의 특성이 어떻게 변화하는가를 알 수 있다면 원하는 특성을 갖는 電磁素子의 설계변수를 쉽게 얻을 수 있을 것이다. 즉 설계변수에 대한 소자특성의 미분치를 설계민감도(design sensitivity)라 할 수 있고 이의 계산이 필요하다. 그리고 본 연구에서는 형상설계에 관심이 있기 때문에 물성변수는 고정된 것으로 가정한다.

최적화 대상의 초기설계치가 주어졌을 때 이를 해석하기 위하여 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$[K][A]=[F] \quad (1)$$

여기서 $[K]$: 시스템 행렬($n \times n$)

$[A]$: 각 절점에서 자기벡터포텐셜($n \times 1$)

$[F]$: 구동벡터($n \times 1$)

n : 미지절점수

위 식(1)을 경계조건을 고려하여 풀면 각 절간에서의 자기벡터포텐셜을 얻을 수 있고 그 값에 의하여 소자의 전기적 특성은 결정된다.

다음은 소자가 최적의 특성을 가질 때 최소값을 갖는 목적함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\varphi = \varphi[p, A(p)] \quad (2)$$

여기서 $[p]$: 설계변수 벡터($np \times 1$)

$A(p)$: 자기 벡터 포텐셜($n \times 1$)

np : 설계변수의 수

즉 식(2)가 최소값을 갖는 설계변수를 찾는 것이 목적이고 설계변수에 대한 목적함수의 변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다. [4]

$$\frac{d\varphi}{d[p]^T} = \frac{\partial \varphi}{\partial [p]^T} + \frac{\partial \varphi}{\partial [A]^T} \frac{d[A]}{d[p]^T} \quad (3)$$

$(1 \times np)$ $(1 \times np)$ $(1 \times n)$ $(n \times np)$

식(3) 우변의 첫항은 포텐셜을 일정하게 놓은 상태에서의 목적함수의 변화율이고 둘째항은 포텐셜의 변화에 의한 목적함수의 변화율이다.

식(3)의 우변 둘째항의 뒷항을 계산하기 위해서는 식(1)을 이용해야 한다. 이는 설계변수에 대한 포텐셜의 변화율은 식(1)에 의하여 결정되기 때문이다. 즉 식(1)의 양변을 설계변수에 대하여 미분하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d[A]}{d[p]^T} = [K]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial [p]^T} [F] - [K] \cdot [\tilde{A}] \quad (4)$$

$(n \times np)$ $(n \times n)$ $(n \times np)$

여기서 $[\tilde{A}]$ 는 식(1)의 해이다.

식(4)를 식(3)에 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{d\varphi}{d[p]^T} = \frac{\partial \varphi}{\partial [p]^T} + \frac{\partial \varphi}{\partial [A]^T} [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]^T} [F] - [K] \cdot [\tilde{A}] \quad (5)$$

실제 계산상에서 설계변수에 대한 포텐셜의 변화율은 식(4)를 직접 이용하여 계산한 후 식(3)에 대입하면 설계변수 벡터의 크기(np)만큼의 시스템 방정식을 풀어야 하기 때문에 계산시간이 길어진다. 따라서 여기서는 식(5)를 이용하여 시스템 방정식을 한번만 풀어도 되는 방법인 보조변수법(adjoint variable method)을 도입한다. 즉 식(5) 우변의 둘째 항에서 다음과 같은 보조변수 $[\lambda]$ 를 정의한다.

$$[\lambda]^T = \frac{\partial \varphi}{\partial [A]^T} [K]^{-1} \quad (6)$$

위 식(6)을 $[K]$ 가 대칭인 조건을 이용하여 다시 쓰면 다음의 보조방정식이 된다.

$$[K][\lambda] = \frac{\partial \varphi}{\partial [A]} \quad (7)$$

즉 식(7)의 보조방정식을 한번만 풀어서 보조변수 $[\lambda]$ 를 식(5)에 대입하면 설계변수에 대한 목적함수의 변화율(민감도)은 다음과 같다.

$$\frac{d\varphi}{d[p]^T} = \frac{\partial \varphi}{\partial [p]^T} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]^T} [F] - [K][\tilde{A}] \quad (8)$$

결국 시스템방정식(1)과 보조방정식(7)을 풀어 $[\tilde{A}]$ 와 $[\lambda]$ 를 식(8)에서 사용하면 목적함수의 민감도는 구해진다.

3. 목적함수 및 민감도

영구자석전동기에서 코깅토크는 회전자 변위에 대한 전동기내의 자기에너지 변화로 나타낼 수 있다. 즉 자기에너지가 회전자의 위치에 관계없이 일정하면 코깅토크는 소멸하게 된다. 따라서 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{nr} [W_i - W_o]^2 \quad (9)$$

여기서 φ : 목적함수

nr : 시스템에너지가 계산되는 총 회전자 위치수

W_i : 회전자의 i 번째 위치에서의 시스템에너지

W_o : nr 번의 회전자 위치에서 시스템에너지의 평균값

이 목적함수의 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{d\varphi}{dp_j} = 2 \sum_{i=1}^{nr} [W_i - W_o] \frac{dW_i}{dp_j} \quad (10)$$

$j=1, 2, \dots, np$

위 식(10)의 우변의 시스템에너지에 대한 설계변수의 미분을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \frac{\partial W_i}{\partial p_j} + \frac{\partial W_i}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_j} \quad (11)$$

그런데 위식 우변의 둘째항에서의 $\frac{\partial W_i}{\partial A}$ 는 영(zero)이다. 왜냐하면 이는 에너지 범함수의 극치조건을 만족하기 때문이다. 따라서 여기서는 보조변수를 도입할 필요가 없다. 즉 목적함수를 시스템에너지로 표현했기 때문에 보조방정식을 풀 필요가 없게 되었다. 그러므로

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \frac{\partial W_i}{\partial p_j} \quad (12)$$

먼저 철과 공기에서의 에너지 밀도는 다음과 같이 놓는다.

$$U_m = 1/2 \nu \vec{B}^2 \quad (13)$$

여기서 U_m : 자기에너지 밀도

ν : 자기저항률

그리고 한번 착자된 영구자석에서의 에너지밀도는 식(14)와 그림 2로써 모델링한다. 본 연구에서는 페라이트 영구자석을 모델링한 것으로 C는 착자시

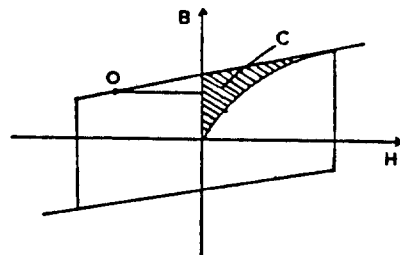


그림 2 B-H curve의 모델링
Fig. 2 B-H curve modelling

필요한 에너지밀도로서 상수값이고 동작점 O에서 추가되는 에너지밀도는 식(14)의 첫 항이 된다.

$$U_m = 1/2\mu_o\vec{H}^2 + C$$

$$= 1/2\mu_o\left[\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right]^2 + C \quad (14)$$

여기서 C : 초기자화 에너지 밀도 [2]

\vec{H} : 자계세기

\vec{B} : 자속밀도

\vec{M} : 자화율

따라서 i번째 회전자위에서 시스템에너지는 다음과 같다.

$$W_i = \int_{R_1} U_m dx dy + \int_{R_2} U_m dx dy$$

$$= \int_{R_1} \left[1/2\mu_o\left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right)^2 + C \right] dx dy$$

$$+ 1/2 \int_{R_2} \nu \vec{B}^2 dx dy \quad (15)$$

여기서 R_1 은 영구자석 영역, R_2 는 철과 공기 영역이다.

위식을 국부좌표계(local coordinate)에서 요소에 대한 적분으로 표현하면 다음과 같다.

$$W_i = \sum_{\sigma} \left[\int_{R_1} \left[1/2\mu_o\left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right)^2 + C \right] |G|^e dudv + 1/2 \int_{R_2} \nu \vec{B}^2 |G|^e dudv \right] \quad (16)$$

여기서 $|G|^e$ 는 한 요소의 Jacobian이다.

위 식(16)을 설계변수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dW_i}{dp_j} = \sum_{\sigma} \left[\int_{R_1} \left[\left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial p_j} |G|^e + \left[1/2\mu_o\left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}\right)^2 + C \right] \frac{\partial |G|^e}{\partial p_j} \right] dudv + \int_{R_2} \left[\nu \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial p_j} |G|^e + 1/2\nu \vec{B}^2 \frac{\partial |G|^e}{\partial p_j} \right] dudv \right] \quad (17)$$

위 식(17)에서 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial p_j}$ 가 포함된 항들은 설계변수가 변함에 따라 요소내의 에너지밀도변화에 의하여 기여하는 것들이고, $\frac{\partial |G|^e}{\partial p_j}$ 가 포함된 항들은 설계변수의 변화에 따른 요소의 형상 변화에 의하여 에너지변화에 기여하는 항들이다.

그리고 식(17)을 식(10)에 대입하면 목적함수의 민감도는 구해진다. 이와같이 얻은 민감도는 최적

화 알고리즘에 도입되어 최적의 설계변수를 찾게 된다.

4. 최적화 알고리즘

본 논문에서는 최적화알고리즘으로 각 반복계산에서 최대경사를 탐색방향(search direction)으로 택하였기 때문에 앞 장에서 얻어진 민감도를 그대로 사용한다. 그리고 각 반복계산 마다 진행거리(step size)는 시스템에너지를 설계변수에 대하여 선형화함으로써 최적의 진행거리를 구한다.

즉 정규탐색방향(normalized search direction) [S]는 다음과 같다.

$$[S] = \frac{d\varphi}{d[p]} / \left\| \frac{d\varphi}{d[p]} \right\| \quad (18)$$

$$\text{여기서 } \left\| \frac{d\varphi}{d[p]} \right\| = \left[\sum_{i=1}^{np} \left(\frac{d\varphi}{dp_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

그리고 진행거리는 다음의 과정으로 구한다.

$$\Delta W_i = \frac{dW_i}{d[p]} \cdot l \cdot [S]$$

$$= k_i l \quad (19)$$

여기서

$$k_i = \frac{dW_i}{d[p]} \cdot [S]$$

$$= 2 \left\| \frac{d\varphi}{d[p]} \right\|^{-1} \frac{dW_i}{d[p]} \cdot \sum_{j=1}^{np} [W_j - W_o] \frac{dW_j}{d[p]}$$

즉[S] 방향으로 l만큼 이동했을 때 목적함수는 다음과 같이 l의 2차함수로 표현된다.

$$\varphi' = \sum_{i=1}^{np} [W_i + k_i l - W_o]^2 \quad (20)$$

따라서 위식이 최소가 되는 최적의 진행거리 l_{op} 를 다음식에서 얻을 수 있다.

$$\frac{d\varphi'}{dl} = 0 \quad (21)$$

$$l_{op} = \left[\sum_{i=1}^{nr} k_i (W_i - W_o) \right] / \left[\sum_{i=1}^{nr} k_i^2 \right] \quad (22)$$

5. 적용사례

해석모델은 그림3과 같은 2개의 영구자석과 3개의 철자극이 있는 직류 전동기를 택하였다. 설계변수는 철자극표면과 영구자석 표면의 각각 10개와 13개 절점위치의 반경이다. 실제계산을 유한요

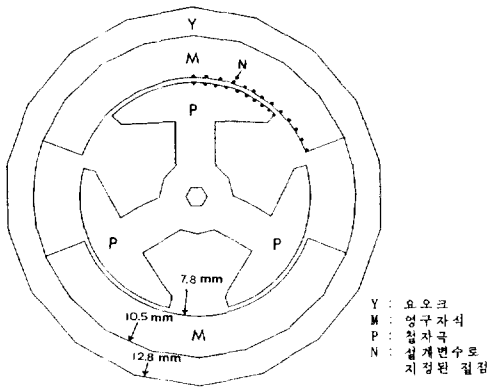


그림 3 해석모델
Fig. 3 Analysis model

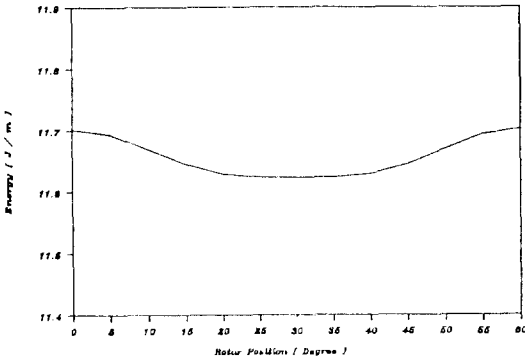


그림 4 초기설계시 시스템 에너지의 변화
Fig. 4 System energy variation at initial design

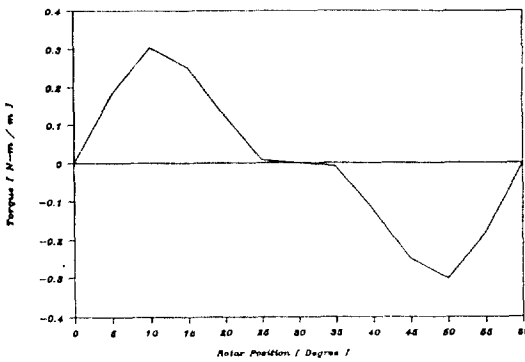


그림 5 초기설계시 코깅토크의 변화
Fig. 5 Cogging torque variation at initial design

소법으로 하였는데 요소는 삼각형이고 형상함수는 2차함수이며 미지수의 수는 약 1700개로 하였다. 그리고 시스템에너지가 계산되는 회전자 위치의

총 수는 7개로 회전자가 5°씩 돌며 계산된다. 이는 시스템에너지가 60°마다 같은 모양으로 반복되고 60°내에서도 대칭이기 때문에 30°내에서의 계산으로 충분하다. 설계변수의 구속조건은 철자극 표면에서는 반경이 줄어드는 방향으로만 변형되고 영구자석 표면에서는 반경이 늘어나는 방향으로만 변형된다. 즉 그림 3에서 철자극과 영구자석이 깎이는 방향으로만 변형된다. 최적화하기 전 그림 3의 초기설계시에서의 회전자 위치에 대한 시스템 에너지 변화와 그 때의 코깅토크의 변화는 그림 4와 그림 5에서 볼 수 있다. 그리고 코깅토크의 계산은 가상변위법을 이용하였다. [3]

5.1 철자극 표면만 변형될 경우

한 철자극 표면의 반쪽에 10개의 절점 위치에

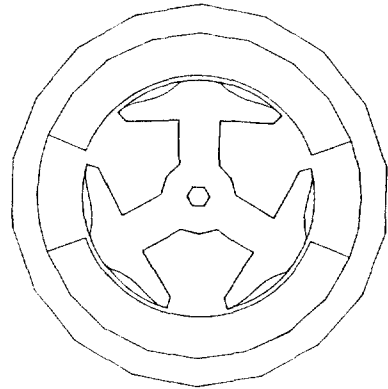


그림 6 철자극의 변형된 모양(15번 반복계산 후)
Fig. 6 Deformed shape of iron pole (after 15 iterations)

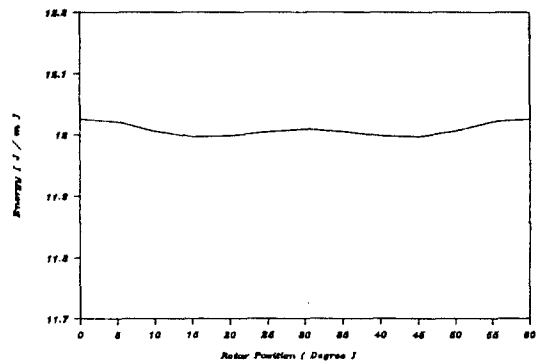


그림 7 시스템 에너지 변화(15번 반복계산 후)
Fig. 7 System energy variation (after 15 iterations)

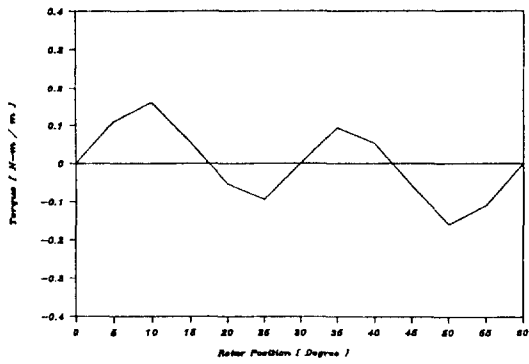


그림 8 코깅토크의 변화(15번 반복계산 후)
Fig. 8 Cogging torque variation (after 15 iterations)

대한 반경의 값을 설계변수로 하였고 이 설계변수는 절점의 반경이 초기설계치의 반경보다 적어야 한다는 구속조건을 주었다. 최적화과정에서 15번의 반복계산에서 철자극의 모양이 수렴하였는데 그림 6과 같이 변형된다. 그리고 이때의 시스템 에너지와 코깅토크는 그림 7 및 그림 8과 같다. 최대 코깅토크값은 초기설계치의 약 반으로 감소한 것을 볼 수 있다.

5.2 영구자석 표면만 변형될 경우

한 영구자석 표면의 반쪽에 13개의 절점에 대한 반경의 값을 설계변수로 하였고 절점의 반경이 초기설계치의 반경보다 커야한다는 구속조건을 주었다. 15번 반복계산한 후 영구자석 표면의 모양이

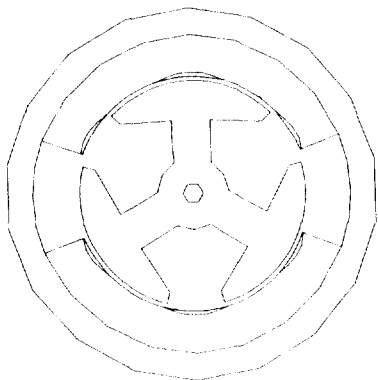


그림 9 영구자석의 변형된 모양(15번 반복계산 후)
Fig. 9 Deformed shape of permanent magnet (after 15 iterations)

영구자석전동기의 코깅토크저감을 위한 민감도에 의한 형상 최적화

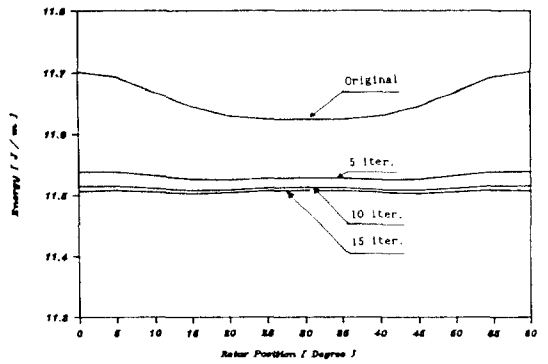


그림 10 반복계산에 따른 시스템 에너지의 변화
Fig. 10 System energy variation with iteration number

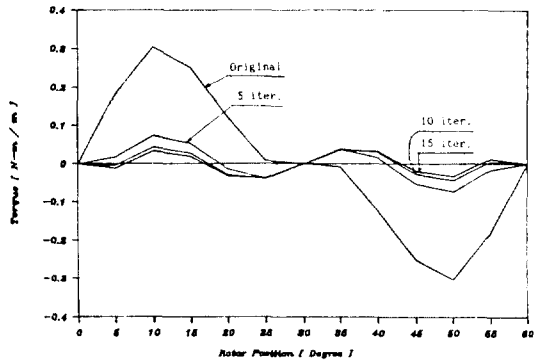


그림 11 반복계산에 따른 코깅토크의 변화
Fig. 11 Cogging torque variation with iteration number

수렴하였는데 그림9와같이 변형된다. 그림 10은 반복계산 수에 따른 시스템에너지의 변화를 나타내는데, 반복계산수의 증가에 따라 시스템에너지가 상당히 평탄해지는 것을 볼 수 있다. 그리고 이때 코깅토크의 반복계산 수에 따른 변화는 그림 11에서 볼 수 있는데 반복계산 수의 증가에 따라 최대 코깅토크는 감소하고 고조파성분만 남게 됨을 볼 수 있다. 15번의 반복계산 후에 최대 코깅토크는 초기설계치의 약 10%정도가 되었다.

5.3 철자극 표면과 영구자석 표면이 동시에 변형될 경우

5.1경우와 5.2경우의 각 설계변수를 동시에 설계변수로 하여 최적형상을 계산하여 보았다. 그

결과는 그림 9와 대동소이하게 나타났는데 이것은 영구자석쪽이 민감도가 높기 때문에 철자극은 거의 변형되지 않음을 뜻한다. 따라서 코깅토오크도 그림 11과 비슷한 결과를 얻었다.

본 연구에서 해석모델로 사용된 영구자석전동기의 형상최적화에 있어서 위의 세 가지 경우를 종합해 보면 영구자석의 표면을 변형하는 것이 코깅토오크 저감에 효과적임을 알 수 있었다.

6. 결 론

본 연구에서는 영구자석 전동기의 코깅토오크 저감을 위한 영구자석 또는 철자극의 형상을 최적화하는 기법을 다루었다. 영구자석 전동기에서의 코깅토오크는 회전자 위치에 따른 전동기내의 자기에너지의 변화때문에 발생하므로 이 자기에너지를 목적함수로 정의하고 이 자기에너지가 회전자의 위치에 관계없이 일정하게 되는 영구자석 또는 철자극의 형상을 구하였다.

형상을 구하기 위한 알고리즘은 민감도법을 이용하였고 구체적인 계산은 유한요소법을 사용하였다. 소형영구자석전동기에 적용하여 본 결과 코깅토오크를 10분의 1까지 저감시킬 수 있었다.

본 연구를 통하여 민감도법은 전기기기의 형상

설계에 매우 유용한 기법임을 확인하였고 앞으로는 고전압기기의 전극설계등 많은 분야에서 이용될 수 있으리라고 믿는다.

본 연구는 한국과학재단의 연구비지원에 의하여 이루어졌음을 알려드립니다.

참 고 문 헌

- [1] H.M. Adelman and R.T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems" AIAA Journal, Vol. 24, No. 5, MAY 1986.
- [2] B.D. Cullity, Introduction to Magnetic Materials, Addison Wesley, pp. 229~223, 1972
- [3] J.L. Coulomb, "A Methodology for the Determination of Global Electro-mechanical Quantities from a Finite Element Analysis and Its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness" IEEE Trans. MAG-19, No. 6, Nov. 1983
- [4] S. Gitosusastro, J.L. Coulomb and J.C. Sabonnadiere, "Performance Derivative Calculations and Optimization" IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 25, No. 4, July 1989