

분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구

Decentralized Optimal Control of Distributed Parameter Systems

安斗守*·李明珪**
(Doo-Soo Ahn · Myung-Kyu Lee)

요 약

본 논문에서는 분산형 연산 과정에 의한 분포정수계의 최적제어를 위한 새로운 방법을 제시하였다. 레젠드라 함수를 기저함수로한 개리킨 접근 방법을 이용하여 근사 모델인 집중정수 모델을 유도하였다. 그러나 분포정수계는 대규모 집중정수 모델로 변형되기 때문에, 얻어진 집중정수 모델의 최적제어 입력을 결정하기 위하여 분산형 제어 방법을 도입하게 되었다. 또한 얻어진 집중정수 모델의 최적제어를 위해 블럭펄스 함수에 의한 접근 방법을 이용하였다. 본 연구에서 제시된 방법은 분포정수계의 최적제어에 있어서 계산상 간편하고 효율적인 잇점이 있다. 마지막으로 몇가지 예를 들어 본 연구방법의 유용성을 입증하였다.

Abstract- This paper presents a new method for the optimal control of the distributed parameter systems by a decentralized computational procedure. Approximate lumped parameter models are derived by using the Galerkin method employing the Legendre polynomials as the basis functions. The distributed parameter systems, however, are transformed into the large scale lumped parameter models. And thus, the decentralized control scheme is introduced to determine the optimal control inputs for the obtained lumped parameter models. In addition, an approach to block pulse functions is applied to solve the optimal control problems of the obtained lumped parameter models. The proposed method is simple and efficient in computation for the optimal control of distributed parameter systems. Illustrative examples are given to demonstrate the validity of the presently proposed method.

1. 서 론

분포정수계는, 시스템구조가 위치나 공간에 따

라 널리 퍼져 있어서, 소규모집중정수 모델로는 그 시스템의 동적 특성을 나타내기가 힘들다. 일반적으로 시스템의 상태는 그 상태를 측정하는 시간이나 위치에 따라 다른 값을 갖게 된다. 즉, 상태변수는 시간과 위치의 함수가 되고 시스템의 물리적인 현상은 편미분 방정식으로 표현되어 분포

*正 會 員: 成均館大 工大 電氣工學科 教授·工博
**正 會 員: 成均館大 工大 電氣工學科 講師·工博
接受日字: 1990年 2月 16日
1次修正: 1990年 9月 6日

정수계로 모델링 된다. 그러나 시스템의 상태가 임의의 한 위치에 대한 대표적인 값이고 그 위치에 대한 정보로 다른 위치에 대한 정보를 충분히 알 수 있다면, 상태변수는 시간만의 함수가 되고 주어진 시스템의 물리적인 현상은 상미분 방정식으로 표현되어 집중정수계로 바뀌게 된다[1, 2].

분포정수계의 예로 장거리 통신선로 및 송전선로, 열처리 시스템, 음성 발생용 진동막 등을 들 수 있다[1-4]. 대부분의 연구에서 분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 간단화 처리하고 있지만 그러나 큰 차원의 대규모 시스템으로 변형되어 제어기나 필터의 설계가 매우 어렵기 때문에 본 연구에서는 이러한 문제점의 해결 방안으로 분산형 제어 이론을 도입하게 되었다.

시스템의 해석, 간단화, 최적제어 및 설계 등의 연구에 블럭펄스(block pulse) 함수 및 월쉬(Walsh), 하알(Haar) 함수 등의 직교함수가 널리 이용되고 있다[4-10]. 직교함수를 이용한 대수적 접근 방식은, 1973년 Corrington[11] 그리고 1975년 Chen과 Hsiao[12]에 의해, 적분을 위한 월쉬 연산 행렬이 정의된 이후로 널리 이용되기 시작했다. 본 연구에서 블럭 펄스 함수를 이용하려 하는 이유는 미·적분 방정식 및 비선형방정식으로 표현되는 시스템의 제반 문제를 대수 연립 방정식으로부터 해결할 수 있고, 계산이 간편하며, 알고리즘 개발이 쉽기 때문이다.

본 연구에서는 분포정수계의 최적제어를 위해 분산형 제어이론을 도입하고 인접한 각 부시스템에 예측원칙을 이용하여 최적제어를 수행하므로써 보다 정확하고 간단한 처리에 의해 분포정수계의 최적제어에 접근하였다. 개러킨 접근법에 기저함수로 레젠드라(Legendre) 함수[13]를 선정하여, 분포정수계에 상응하는 최적한 집중정수 모델을 구성하는 방법을 제시하고, 구성한 대규모 집중정수 모델의 최적제어를 위해 분산형 제어방식을 도입하므로써 분포정수계의 최적제어를 수행하는 방법을 제시하였다. 최적제어의 구현에 있어서, 행렬 리카티(Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하는 문제를 포함하고 있는데 본 연구에서는 블럭펄스 함수를 도입하여 리카티 방정식의 해를 대수연립 방정식으로 부터 결정할 수 있도록 하는 새로운 알고리즘을 개발·합성하므로써 분포정수계의 실시간 최적제어가 이루어지도록 하였다.

2. 분포정수계의 집중정수 모델링

분포정수계의 해석, 제어 및 필터링 등을 위해

간단화 작업이 이루어져 왔는데, 이러한 간단화 작업은 일반적으로 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계를 상미분방정식의 집중정수계로 변환하는 과정이 주를 이룬다. 분포정수계를 집중정수 모델로 변환하는 방법으로 공간분할기법[3, 14], 리쯔(Ritz) 접근방법[1, 15], 개러킨(Galerkin) 접근방법[8, 16] 등이 있다.

본 연구에서는 개러킨 접근 방법에 기저함수로서 레젠드라 함수를 선정하여, 분포정수계를 집중정수계로 모델링 할 때 발생하는 오차와 레젠드라 함수가 서로 직교하도록 하는 시변 계수들로 집중정수 모델의 상태 및 입력 벡터를 구성하였다.

다음과 같이 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계에서

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(y, t) = \mathcal{D} \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y, t) \quad (2.1)$$

미분자 \mathcal{D} 가 다음과 같이 공간 위치 y 에 대해 행렬로 주어지는 경우의

$$\mathcal{D} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \quad (2.2)$$

분포정수계는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(y, t) = \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y, t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}(y, 0) = \mathbf{x}_0(y)$$

$$\mathbf{x}(0, t) = 0, \mathbf{x}(y_r, t) = 0$$

$\mathbf{x}(y, 0)$ 는 초기 조건이며, $\mathbf{x}(0, t) = 0, \mathbf{x}(y_r, t) = 0$ 는 경계 조건이다.

$\mathbf{x}(y, t), \mathbf{u}(y, t)$ 는 공간위치와 시간의 함수로 표현되는 2차원 상태 및 입력으로, 각각 n, r 차 벡터이다. $\mathbf{x}(y, t)$ 와 $\mathbf{u}(y, t)$ 를 레젠드라 함수로 다음과 같이 유한 급수전개한다.

$$\tilde{\mathbf{x}}(y, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{a}_i(t) (2i+1) \phi_i(y) \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(y, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\gamma}_i(t) (2i+1) \phi_i(y) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}_i(t) = \begin{bmatrix} a_{1i}(t) \\ a_{2i}(t) \\ \vdots \\ a_{ni}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_i(t) = \begin{bmatrix} \gamma_{1i}(t) \\ \gamma_{2i}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{ri}(t) \end{bmatrix}$$

식 (2.4), (2.5)에서 $\tilde{\mathbf{x}}(y, t), \tilde{\mathbf{u}}(y, t)$ 는 $\mathbf{x}(y, t), \mathbf{u}(y, t)$ 를 N 개의 레젠드라 함수로 유한 급수 전개했을 때의 근사값을 의미한다. $\phi_i(y)$ 는 i 번째 레젠드라 함수이며, $\mathbf{a}_i(t)$ 와 $\boldsymbol{\gamma}_i(t)$ 는 각각 $\mathbf{x}(y, t)$ 와

$u(y,t)$ 를 레젠드라 함수로 전개 할 때의 i 번째 계수 벡터이다. 위 식 (2.4), (2.5)를 식(2.3)에 적용하면 다음과 같은 모델링 오차가 존재한다.

$$e(y,t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{x}(y,t) - A_1 \frac{\partial}{\partial y} \hat{x}(y,t) - A_0 \hat{x}(y,t) - B_0 \hat{u}(y,t) \quad (2.6)$$

이 오차 $e(y,t)$ 를 최소화하기 위해 개러킨 접근방법을 도입하여, 오차와 레젠드라 함수 $\phi_i(y)$ 가 서로 직교하도록 다음을 만족하는

$$\int_0^{y_f} e(y,t) \phi_i(y) dy = 0 \quad (2.7)$$

$\alpha_i(t)$ 와 $\gamma_i(t)$ 를 선정 하므로써, 시간만의 함수인 상미분 방정식의 집중정수계로 모델링한다. 식 (2.6)을 식 (2.7)에 도입하면 다음과 같고

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) \alpha_j(t) \int_0^{y_f} \phi_j(y) \phi_i(y) dy \\ &= - \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) A_1 \alpha_j(t) \int_0^{y_f} \phi_j(y) \frac{d}{dy} \phi_i(y) dy \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) A_0 \alpha_j(t) \int_0^{y_f} \phi_j(y) \phi_i(y) dy \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) B_0 \gamma_j(t) \int_0^{y_f} \phi_j(y) \phi_i(y) dy \quad (2.8) \end{aligned}$$

위식을 레젠드라 함수의 직교성을 이용하여 전개 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_i(t) &= - \sum_{j=0}^{N-1} h_{ij} A_1 \alpha_j(t) + A_0 \alpha_i(t) \\ &+ A_0 \alpha_i(t) + B_0 \gamma_i(t) \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\text{단, } h_{ij} = \frac{(2j+1)}{y_f} \int_0^{y_f} \phi_j(y) \frac{d}{dy} \phi_i(y) dy$$

위 식을 간단한 형태로 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_c(t) &= A \alpha_c(t) + B \gamma_c(t) \quad (2.10) \\ \alpha_c(0) &= \alpha_{co} \end{aligned}$$

$$\text{단, } A = -A_1 \otimes H + A_0 \otimes I, B = B_0 \otimes I, H = [h_{ij}] \quad (2.11)$$

$$\alpha_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \gamma_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_{N-1}(t) \end{bmatrix}$$

식 (2.11)에서 A 는 $nN \times nN$ 행렬이며, \otimes 의 표시는 크로네커 곱(Kronecker product) [12, 17]을 의미한다. 위 식에서 $\alpha_c(t)$ 와 $\gamma_c(t)$ 는 nN 차 벡터이다. 초기조건 $\alpha_c(0)$ 는 분포정수계의 초기조건 $x(y, 0)$ 에 대한 레젠드라 함수의 계수 벡터이다.

다음의 분포정수계에 대한 평가함수로부터

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{y_f} \int_0^{y_f} x^T(y,t) Q x(y,t) \\ &+ u^T(y,t) R u(y,t) dy dt \quad (2.12) \end{aligned}$$

집중정수 모델에 대한 평가함수를 결정한다. 위 식에 식(2.4), (2.5)을 도입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J &= \frac{y_f}{2} \int_0^{y_f} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i^T(t) (2i+1) Q \alpha_i(t) \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i^T(t) (2i+1) R \gamma_i(t) dt \quad (2.13) \end{aligned}$$

따라서 평가함수는 다음과 같이 변형된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{y_f} \alpha_c^T(t) Q' \alpha_c(t) + \gamma_c^T(t) R' \gamma_c(t) dt \quad (2.14)$$

단, $Q' = Q \otimes F, R' = R \otimes F, F = [f_{ij}]$

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ y_f (2i+1) & i = j \end{cases}$$

여기서 Q' 와 R' 는 $nN \times nN$ 행렬이다.

고차 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계 역시 위에서와 같은 방식에 의해 집중정수계로 모델링 된다. (부록참고)

3. 분포정수계의 분산형 최적제어

3.1 분산형 최적제어

분포정수계의 최적제어는, 2장에서 언급한 바와 같이, 레젠드라 함수를 기저함수로한 개러킨 접근방법에 의해 모델링한, 집중정수계를 최적제어하는 것과 같다. 분포정수계의 표현방식에 따라 집중정수 모델의 표현은 약간 다를 수 있지만 본 연구에서는 다음과 같이 표현한다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0$$

이에 대한 평가함수는 다음과 같은 수식으로 표현한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{y_f} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt \quad (3.2)$$

본 연구에서 기저함수로 선택한 레젠드라 함수의 전개항수인 N 을 결정할 때는 근사해가 만족할 만한가에 대해 고려해 봐야 한다. 보다 정확한 시스템의 표현 및 정보를 얻기 위해서는 레젠드라 함수의 전개항 수를 증가하면 되지만 이때 얻어지는 집중정수 모델은 복잡한 대규모 시스템으로 표현

된다. 이러한 대규모 시스템에의 설계에 많은 제한 루프를 포함하도록 설계하는 것은 매우 힘들다. 분산형 제어이론은 바로 이러한 어려운 점의 해결 방안으로 전개되어 왔다[18-20].

이러한 시스템의 최적제어를 위해 상호 연결된 n 개의 분산형 제어 시스템으로 다음과 같이 표현한다.

$$\min J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^T \mathbf{x}_i^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{u}_i^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i(t) dt \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i(t) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{z}_i(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \mathbf{x}_j(t)$$

여기서 $\mathbf{x}_i(t)$ 는 i 번째 부시스템에 대한 n_i 차 상태 벡터이고 $\mathbf{u}_i(t)$ 는 m_i 차 제어벡터이며, $\mathbf{z}_i(t)$ 는 다른 부시스템과 상호 연결된 q_i 차 벡터로 전체 시스템의 상태벡터의 선형 조합이다.

$\lambda(t)$ 를 $\sum q_i = q$ 차 라그랑제 곱연산자(Lagrange multiplier)[20], $\mathbf{p}_i(t)$ 를 n_i 차 보조상태 벡터라 할 때 상호 예측원칙을 이용한 하위 레벨에 대한 조정원칙은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_i(t) \\ \mathbf{z}_i(t) \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_i^T \mathbf{p}_i(t) \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{ij} \mathbf{x}_j(t) \end{bmatrix}^k \quad (3.5)$$

$\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{p}_i(t)$ 가 결정되면 이 값들을 순차적으로 $\lambda_i(t)$, $\mathbf{z}_i(t)$ 의 새로운 예측 값으로 이용한다. 이 알고리즘은 다카하라(Takahara)에 의해 제시되었고 수렴성이 증명되었으며[21], 하위 레벨에서는 n 개의 부시스템에 대한 각 시스템의 최적제어를 수행하면 된다.

i 번째 부시스템에 대한 최적제어 벡터는 최대원리에 의해

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i(t) = -\mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{A}_i^T \mathbf{p}_i(t) + \sum_{j=1}^n [\lambda_j^T(t) \mathbf{L}_{ji}]^T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p}_i(t_f) = 0$$

이며, $\mathbf{u}_i(t)$ 를 식(3.4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(t) + \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i(t) \quad (3.8)$$

이제, $\mathbf{p}_i(t)$ 를 다음과 같이 정의할 때

$$\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{K}_i(t) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{s}_i(t) \quad (3.9)$$

$\mathbf{K}_i(t)$ 와 $\mathbf{s}_i(t)$ 를 구해야 하는데 $\mathbf{K}_i(t)$ 는 행렬 리

카티 미분방정식을 만족하는 해이다.

본 연구에서는 행렬 리카티 미분방정식을 직접 다루지 않고 식(3.7), (3.8)을 이용하여 표현한 다음식으로부터 최적제어 벡터를 구한다.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i(t) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{p}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1i}(t) \\ \mathbf{N}_{2i}(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\text{단, } \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \\ -\mathbf{Q}_i & -\mathbf{A}_i^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{1i}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i(t), \quad \mathbf{N}_{2i}(t) = \sum_{j=1}^n [\lambda_j^T(t) \mathbf{L}_{ij}]^T$$

위 식의 상태전이 행렬을 다음과 같다고 하자.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

이 상태전이 행렬을 이용하면 식(3.10)은

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t_f) \\ \mathbf{p}_i(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{p}_i(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1i}(\tau) \\ \mathbf{N}_{2i}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (3.12)$$

또한 식(3.12)에서 $\mathbf{p}_i(t)$ 를 구하면 식(3.9)의 관계로부터

$$\mathbf{K}_i(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{s}_i(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \int_t^{t_f} \Phi_{22}(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

$$\Phi_{22}(\tau) = \Phi_{21}(t_f, \tau) \mathbf{N}_{1i}(\tau) + \Phi_{22}(t_f, \tau) \mathbf{N}_{2i}(\tau) \quad (3.15)$$

임을 알 수 있다. 여기서 $\Phi_{22}(t_f, \tau)$, $\Phi_{21}(t_f, \tau)$ 은 상태전이 행렬의 특성을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t) \mathbf{M}_i \quad (3.16)$$

$$\Phi(t_f, t_f) = \mathbf{I} \quad (3.17)$$

위의 식(3.16), (3.17)로부터 $\Phi_{22}(t_f, t)$, $\Phi_{21}(t_f, t)$ 을 구할 수 있으므로 식(3.13), (3.14)의 $\mathbf{K}_i(t)$ 와 $\mathbf{s}_i(t)$ 를 얻을 수 있게 된다.

또한 다음식으로부터

$$\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{K}_i(t) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{s}_i(t) \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = [\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i(t)] \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{N}_{1i}(t) - \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{s}_i(t) \quad (3.19)$$

$\mathbf{x}_i(t)$ 와 $\mathbf{p}_i(t)$ 를 구할 수 있다. 따라서 i 번째 부시스템에 대한 최적제어 벡터는 다음과 같고

$$u_i(t) = -R_i^{-1} B_i^T p_i(t) \quad (3.20)$$

상위 레벨에서 식(3.5)의 관계를 이용하여 식(3.10)의 N_i 를 개선시키므로서 전체 시스템의 최적제어를 이룬다.

3.2 블럭펄스 함수를 이용한 분산형 최적제어

블럭펄스 함수의 적분은 m 개의 블럭펄스 함수로 다음과 같이 전개된다.

$$\int_0^t \phi(\tau) d\tau = P\phi(t) \quad (3.21)$$

$$\phi^T(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)]$$

여기서 P 를 블럭펄스 함수에 대한 적분을 위한 연산행렬[6]이라하며, 미분 방정식으로 표현되는 시스템을 적분방정식으로 변환하고 블럭펄스 함수를 도입할 때 적분연산자로 이용한다. 식(3.21)에서 k 번째 블럭 펄스 함수의 적분은 $0 \leq t \leq t_j$ 에서 다음과 같이 전개된다[4, 6]

$$\int_0^t \phi_k(\tau) d\tau = \frac{t_j}{m} \sum_{i=k+1}^m \phi_i(t) + \frac{t_j}{2m} \phi_k(t) \quad (3.22)$$

마찬가지로 관계로 k 번째 블럭펄스 함수의 역방향 적분은 다음과 같다.

$$\int_{t'}^t \phi_k(\tau) d\tau = -\frac{t_j}{m} \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(t) - \frac{t_j}{2m} \phi_k(t) \quad (3.23)$$

이러한 블럭펄스 함수의 특성을 이용하여 먼저 각 부시스템에 대한 최적제어를 수행하고 상위 레벨에서 전체 시스템의 최적제어 벡터를 결정하는 문제를 다룬다. 편의상 첨자 i 를 생략하고 식(3.10)를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} p(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

이 시스템에 대한 상태전이 방정식은 식(3.16), (3.17)과 같고 양변에 역방향 적분을 취하면 다음과 같다.

$$I - \Phi(t_j, t) = \int_{t'}^t \Phi(t_j, \tau) M d\tau \quad (3.25)$$

여기서 $x(t)$ 를 블럭펄스 함수로 다음과 같이 전개한다.

$$x(t) = \sum_{j=1}^m X_j \phi_j(t) \quad (3.26)$$

X_j 는 $x(t)$ 의 j 번째 블럭 펄스 함수의 계수를 의미한다. 같은 관계로 ϕ_j 를 $\Phi(t_j, t)$ 의 j 번째 블럭펄스 함수의 계수라할 때 식(3.23)의 관계를 도입하

면 계수 Φ_j 는 다음과 같이 유도된다. [4]

$$\Phi_m = [I - \frac{t_j}{2m} M]^{-1}$$

$$\Phi_j = \Phi_{j+1} [I + \frac{t_j}{2m} M] [I - \frac{t_j}{2m} M]^{-1} \quad (3.27)$$

단, $j = m-1, m-2, \dots, 1$

식(3.13)의 $K(t)$ 에 대한 j 번째 블럭펄스 계수 K_j 는 다음과 같으며

$$K_j = -(\Phi_{22})_j^{-1} (\Phi_{21})_j \quad (3.28)$$

식(3.14)에 블럭펄스 함수를 도입하면 식(3.23)에 의해 $s(t)$ 에 대한 블럭펄스 계수 S_j 는 다음과 같이 결정된다.

$$S_m = -\frac{t_j}{2m} (\Phi_{22})_m^{-1} \Omega_m$$

$$S_j = S_{j+1} + \frac{t_j}{2m} [(\Phi_{22})_j^{-1} \Omega_j + (\Phi_{22})_{j+1}^{-1} \Omega_{j+1}]$$

$$(j = m-1, m-2, \dots, 1) \quad (3.29)$$

$$\text{단, } \Omega_j = [(\Phi_{21})_j N_{1j} + (\Phi_{22})_j N_{2j}]$$

위 식에서 N_{1j}, N_{2j} 는 각각 $N_1(t), N_2(t)$ 의 j 번째 블럭펄스 함수의 계수를 의미한다. 또한 $x(t)$ 는 식(3.19)의 양변에 적분을 취하고 식(3.22)의 블럭 펄스 함수의 특성을 도입하면 $x(t)$ 의 블럭펄스 계수는 다음과 같다. [4]

$$X_1 = M_{n1} [x(0) + V_1]$$

$$X_{j+1} = M_{nj} [M_{pj} X_j + V_{j+1} + V_j], \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.30)$$

$$\text{단, } M_{nj} = [I - \frac{t_j}{2m} [A - BR^{-1} B^T K_j]]^{-1}$$

$$M_{pj} = I + \frac{t_j}{2m} [A - BR^{-1} B^T K_j]$$

$$V_j = \frac{t_j}{2m} [N_{1j} - BR^{-1} B^T S_j]$$

따라서 $p(t) = K(t)x(t) + s(t)$ 이므로 $p(t)$ 의 계수 P_j 는 식(3.28)~(3.30)로부터

$$P_j = K_j X_j + S_j \quad (3.31)$$

이며, i 번째 부시스템에 대한 제어벡터 $u(t)$ 를 블럭 펄스 함수로 다음과 같이 전개하면

$$u(t) = \sum_{j=1}^m U_j \phi_j(t) \quad (3.32)$$

$u(t)$ 의 계수 U_j 는 다음과 같다.

$$U_j = -R^{-1} B^T P_j \quad (3.33)$$

위 식에서 U_j 는 i 번째 부시스템의 최적제어 벡터

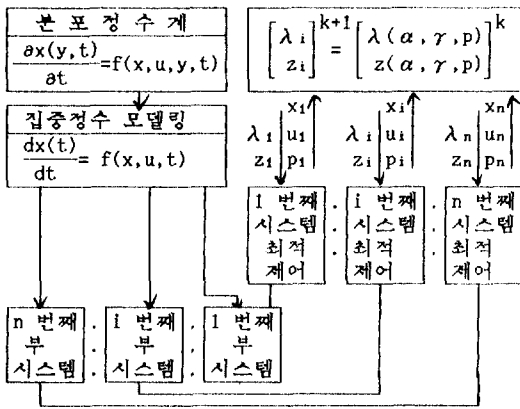


그림 1 분포정수계의 분산형 최적제어 계통도
 Fig. 1 Systematic Diagram for Decentralized Optimal Control of Distributed Parameter System

에 대한 \$j\$번째 블럭펄스 계수이므로 전체 시스템에 대한 최적제어 벡터를 얻기 위해서는 상위 레벨에서 \$N_{1i}\$와 \$N_{2i}\$를 개선시켜 나가야 한다. 이를 위해 식(3.5)의 상호 예측원칙을 블럭펄스 함수로 전개시키면 다음과 같다.

$$[(\lambda_i)_j]^{k+1} = -[C_i^T(P_i)]^k \tag{3.34}$$

$$[(Z_i)_j]^{k+1} = \sum_{r=1}^n [L_{ir}(X_r)]_j^k \tag{3.35}$$

$$\text{단, } \lambda_i(t) = \sum_{j=1}^m (\lambda_i)_j \phi_j(t)$$

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^m (Z_i)_j \phi_j(t)$$

또한 식(3.10)에서 \$N_{1i}(t)\$, \$N_{2i}(t)\$를 다음과 같이 블럭 펄스 변환하고

$$(N_{1i})_j = C_i(Z_i)_j \tag{3.36}$$

$$(N_{2i})_j = \sum_{r=1}^n [(L_{ir}^T)_j(L_{rj})_i]^T \tag{3.37}$$

식(3.34), (3.35)을 이용하여 계수 \$\lambda_i, Z_i\$를 새롭게 수정하므로써 식(3.36), (3.37)의 \$N_{1i}, N_{2i}\$를 각각의 부시스템에 전달하여 최적제어에 접근시킨다. 이에 대한 개략적인 분포정수계의 최적제어에 대한 계통도를 그림 1에 나타냈다. 이상에서와 같이 각 부시스템의 제어벡터가 전체 시스템의 최적제어 벡터인가를 확인하기 위하여 다음과 같은 오차함수를 정의 한다.

$$\epsilon = \frac{t_f}{m} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E_{1i}^T E_{1i}} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E_{2i}^T E_{2i}} \right] \tag{3.38}$$

$$\text{단, } E_{1i} = [(N_{1i})_j]^{k+1} - (N_{1i})_j^k$$

$$E_{2i} = [(N_{2i})_j]^{k+1} - (N_{2i})_j^k$$

이 전체 시스템에 대한 상호작용 오차를 충분히 적게하는 제어 벡터가 전체 시스템의 최적제어 벡터이다. 그런데 최적 제어 벡터 \$u(t)\$는 레젠드라 함수의 계수 벡터이므로 분포정수계의 최적제어 및 상태벡터를 알기 위해서는 재합성 과정이 필요하다.

\$u(t)\$ 및 \$x(t)\$는 식(3.1)에 대한 최적 제어 및 상태벡터이고, 식(3.1)은 분포정수계에 대한 집중정수계의 일반적인 표현식이다. \$u(t)\$ 및 \$x(t)\$는 식(2.10)의 \$\alpha_c(t)\$와 \$\gamma_c(t)\$이므로 식(3.4), (3.5)의 과정에 의해 분포정수계의 최적 제어 벡터 및 상태 벡터를 결정한다.

4. 적용예

4.1 고정된 금속판의 열교환

길이 \$y_f\$인 금속판을 분포적으로 가열시키는 경우 \$x(y,t)\$를 금속판의 온도라 하고 \$u(y,t)\$를 분포적으로 가해지는 가열 입력이라 할 때 금속판의 온도분포는 다음과 같은 확산방정식의 분포정수계로 표현된다[13, 22].

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + u(y,t) \tag{4.1}$$

$$x(y,0) = 1 + y \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=y_f} = 0. \tag{4.3}$$

식(4.2)는 초기조건으로 \$t=0\$인 순간에 금속체의 온도 분포이며, 식(4.3)은 경계조건으로 \$y=0, y=y_f\$에서의 온도의 변화율을 나타낸다.

여기서 다음의 평가함수 \$J\$를

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^{y_f} x^2(y,t) + u^2(y,t) dy dt \tag{4.4}$$

$$\text{단, } t_f = 1, y_f = 4$$

최소화하는 제어변수 \$u(y,t)\$를 구하는 문제를 고려한다.

식(4.1)을 \$N=5\$ 즉 레젠드라 함수의 5항 전개에 의해 집중정수계로 모델링하면 다음과 같은 5차 선형 집중정수계가 된다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.5}$$

$$x(0) = x_0$$

단,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & 0 & -1.7 & 0 \\ 0 & 0 & -3.75 & 0 & -6.75 \\ 0 & -0.75 & 0 & -10.5 & 0 \\ 0 & 0 & -3.75 & 0 & -22.5 \end{bmatrix}$$

$$B = I, \quad x_0 = [3 \ 2/3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

또한, 식(4.4)의 분포정수계에 대한 평가함수를 집중포정수계의 평가함수로 모델링하면 다음과 같

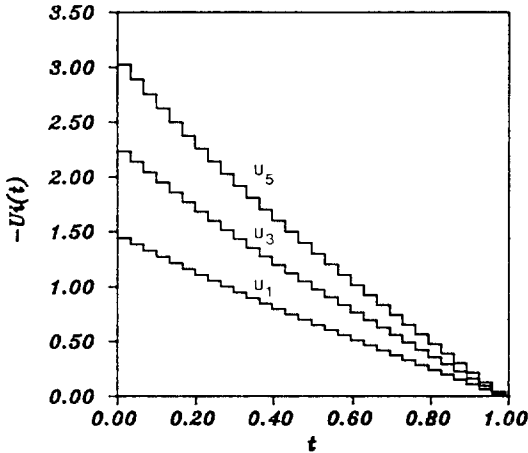


그림 2(a) 본 연구 방법에 의한 적용예 4.1의 최적제어

Fig. 2(a) Optimal Control of Example 4.1 by the Proposed Method

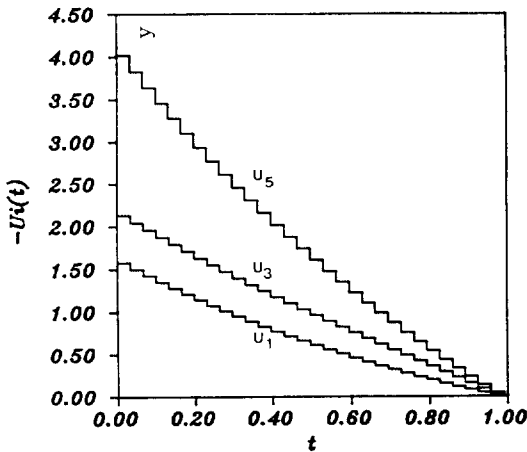


그림 2(b) 공간분할기법에 의한 적용예 4.1의 최적제어

Fig. 2(b) Optimal Control of Example 4.1 by a Spatial Discretization Technique

다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (4.6)$$

$$Q = R = y_f \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

식(4.5)에서 $\mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{u}(t)$ 는 각각 $x(y,t)$ 와 $u(y,t)$ 를 레젠드라 함수로 전개할 때의 시변 계수로 구성되는 상태 벡터이다. 집중정수계로 모델링한 식(4.5)를 2개의 부시스템으로 분할하고 블럭펄스 함수 30항 전개에 의한 최적제어 벡터는 그림 2(a)와 같다. 그림 2(b)는 공간분할기법에 의해 집중정수계로 모델링한 블럭펄스 함수를 이용하여 분산형 최적제어를 수행한 결과이다. 그림에 표시된 U_1, U_3, U_5 는 각각 $y_1=0, y_3=2, y_5=4$ 인 경우의 $u(y_i,t)$ 의 값을 나타낸다. $y_2=1, y_4=3$ 일 때의 $u(y_i,t)$ 는 생략하였다.

4.2 관벽과 유체간의 열교환

등온 관을 통과하는 유체를 가열시키는 경우 관벽과 유체간의 열교환에 관한 모델은 유체 온도를 $x_1(y,t)$, 벽면 온도를 $x_2(y,t)$ 라고 하면 다음의 분포정수계와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(y,t) = \begin{bmatrix} -v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{x}(y,t) + \begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \mathbf{x}(y,t) + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \mathbf{u}(y,t) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}(y,0) = \mathbf{x}_0(y), \quad \mathbf{x}(0,t) = 0, \quad \mathbf{x}(y_f,t) = 0$$

$$\text{단, } \mathbf{x}(y,t) = \begin{bmatrix} x_1(y,t) \\ x_2(y,t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0(y) = \begin{bmatrix} 1+y \\ 1+y \end{bmatrix}$$

v 와 c 는 각각 유체의 속도와 열전도율을 나타내며, $u(y,t)$ 는 가열 입력로 스팀의 온도이다. $v=1, c=2$ 라고 할 때 다음과 같은 평가함수에 대한 분포정수계의 최적제어를 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{y_f} \int_0^{y_f} \mathbf{x}^T(y,t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(y,t) + R u^2(y,t) dy dt \quad (4.8)$$

$$\text{단, } Q = I, \quad R = 1, \quad t_f = 1, \quad y_f = 6.0$$

$N=5$ 즉 $x_1(y,t)$ 와 $x_2(y,t)$ 에 대하여 각각 레젠드라 함수 5항 전개를 이용하여 모델링하면 다음과 같은 10차 상미분방식의 집중정수계가 된다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4.9)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\text{단, } x(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

$$x_i(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix}, \quad u_i(t) = \begin{bmatrix} u_{1i}(t) & u_{2i}(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 5/3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 7/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = I, \quad x_0 = [4 \ 4 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

또한 분포정수계의 평가함수를 다음과 같이 변형한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x^T(t) Q' x(t) + u^T(t) R' u(t) dt \quad (4.10)$$

$$Q' = Q \otimes F, \quad R' = R \otimes F$$

식(4.9)의 10차 집중정수모델을 5개(각 2차계)의 부시스템으로 분할하여 얻은 최적제어 벡터를 그림 3(a)에 나타냈다. 그림에서 U_1, U_3, U_5 는 각각 $u(0,t), u(3,t), u(6,t)$ 즉 $y \in [0, y_f]$ 의 y 가 각각 $y_1=0, y_3=3, y_5=6$ 일 때의 $u(y_i, t)$ 를 나타낸다. $y_2=1.5, y_4=4.5$ 일 때의 $u(y_i, t)$ 는 생략하였다.

5. 검토 및 고찰

적용예 4.1의 경우에 대한 집중형 최적제어 해는 Sage[22]와 Wang과 Chang[13]에 의해 얻어 진바 있다. Sage는 공간분할기법에 의해 분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 최적제어를 수행하는 일반적인 방법을 보였으며, Wang과 Chang은 레젠드라 함수의 특성을 이용하여 레젠드라 계수들을 상태벡터로 구성되는 집중정수 모델을 구성하고, 이 모델에 레젠드라 함수를 적용하여 집중형 최적제어 해를 얻었다.

그림 2(a), (b)는 적용예 4.1의 분포정수계를 각기 다른 방법으로 집중정수계로 모델링한 후 같은

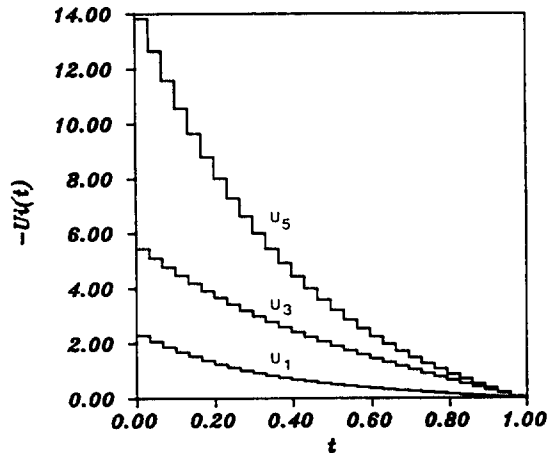


그림 3(a) 적용예 4.2의 최적 제어 $u(y_i, t)$
Fig. 3(a) Optimal Control $u(y_i, t)$ of Example 4.2

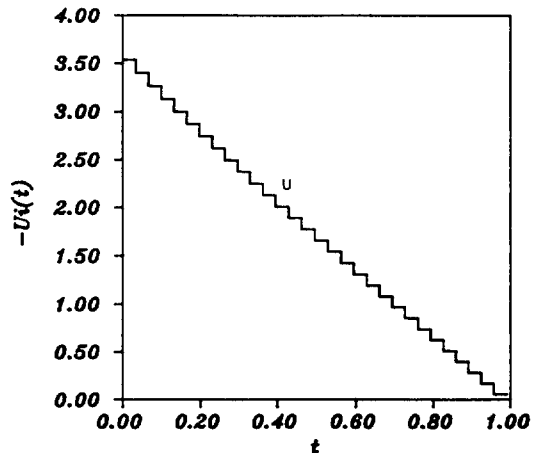


그림 3(b) 적용예 4.2의 집중형 최적제어 $u(t)$
Fig. 3(b) Lumped Optimal Control $u(t)$ of Example 4.2

조건, 즉 3.2절의 블럭펄스 함수에 의한 분산형 최적제어에 의해 구한 최적제어 입력을 나타낸다.

그림 2(a)는 본 연구 방법에 의한 결과이며, 그림 2(b)는 공간분할기법에 의해 얻은 집중정수 모델에 블럭펄스 함수를 이용하여 분산형 최적 제어 이론을 도입한 결과이다. 그림 2(a)와 그림 2(b)를 비교해보면 서로 큰차이를 보이고 있는데 이러한 차이는 분포정수계를 집중정수계로 변형시킬 때의 모델링에 의해 발생하는 차이임을 알 수 있다.

표 1 $M=30$ 이 때 오차의 수렴 정도 및 평가 함수 값(적용예 4.1)

Table 1 Convergence of Error and Value of Performance when $M=30$ (Example 4.1)

N	본 연구방법에 의한 결과	공간분할기법 분산형 제어
1	.6642714E+00	.8715859E+00
2	.5279482E-01	.2582077E+00
3	.2093566E-02	.1326187E-01
4	.4434884E-04	.6046331E-03
5	.8626682E-06	.3056944E-04
6	.6090438E-07	.1566628E-05
7	.0000000E+00	.6456489E-07
J	.1500095E+02	.1541927E+02

표 2 $M=30$ 일 때 오차의 수렴 정도 및 평가 함수 값(적용예 4.2)

Table 2 Convergence of Error and Value of Performance when $M=30$ (Example 4.2)

N	분산형 입력일 경우	집중형 입력일 경우
1	.9815517E+01	.1601277E+02
2	.4574696E+00	.8626028E+00
3	.3636854E-02	.0000000E+00
4	.3293208E-04	
5	.1021473E-05	
6	.0000000E+00	
J	.8002122E+02	.1115493E+03

표1은 본 연구 방법에 의한 결과의 공간분할 기법에 의해 구한 집중정수 모델에 블럭펄스 함수를 적용하여 분산형 최적제어를 수행한 결과로, 하위 레벨의 반복계산 횟수와 오차의 수렴 여부를 나타낸다. 두 방법 모두 1회 반복시마다 오차가 큰 폭으로 감소됨을 알 수 있다.

표에서 J 는 평가함수 값을 나타내며 $m=30$ 즉 블럭펄스 함수 30항 전개에 의한 결과이다. 본 연구 방법에 의한 결과와 비교해볼 때 공간분할기법에 의해 얻어진 집중정수 모델에 블럭펄스 변환에 의한 분산형 최적제어를 수행한 방법에서 약 2.7%-약 3%정도의 손실이 발생한 것을 알 수 있다.

그림 3(a)는 적용예 4.2에 대한 결과로 제어 입력이 공간 위치와 시간의 함수 즉 $u(y,t)$ 인 경우이고, 그림 3(b)는 는 적용예 4.2의 변형된 예로,

가해지는 입력인 스템의 온도가 시간만의 함수 즉 $u(t)$ 인 경우에 대한 분산형 최적제어의 결과이다. 실제로 가해지는 스템 온도를 시간만의 함수로 간주하게 될때 분포정수계는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(y,t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{x}(y,t) + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(y,t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.1)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{y_f} \left[\int_0^{y_f} \mathbf{x}^T(x,t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(x,t) dy \right] + u^2(t) dt \quad (5.2)$$

표2는 식(4.7)로 표현되는 분포정수계와 식(5.1)로 표현되는 분포정수계에 블럭펄스 함수 30항 전개 하위 레벨의 반복 연산과 오차의 수렴 정도 및 평가함수 값을 나타낸다.

분산형 입력의 경우(즉 적용예 4.2의 경우) 6회의 반복연산으로 오차가 0에 수렴하였고, 이 때의 평가함수 값은 80.02122이었다. 집중형 입력의 경우 즉 식(5.1)로 표현되는 분포정수계의 경우 평가함수 값은 111.5493이었다. 집중형 입력의 경우 3회 반복연산에 의해 오차가 0에 수렴하고 있지만 분산형 입력의 경우와 비교해볼 때 평가함수 값이 상당히 큰것을 입력을 시간만의 함수로 할 때 시스템이 제대로 제어되지 못함을 의미한다.

본 연구에서는 잡음이나 외란이 없는 이상적인 분포정수계에 한정하였지만 잡음이나 외란의 도입시 분포정수계의 최적제어 와 상태 제환시 상태값의 적정한 측정 위치 선정의 문제점 등은 앞으로 계속 연구 되어야 할 것이다.

6. 결론

본 연구에서 분포정수계의 제어를 위해, 새로운 분산형 최적제어 방법을 제시 하였다.

개리킨 접근기법을 이용하여 집중정수 모델을 결정한 다음, 분산형 제어 이론을 도입하고 상호 인접한 부시스템에 대한 예측원칙을 이용하여 각 부시스템의 최적제어를 수행하고, 이를 합성함으로써 분포정수계의 최적제어에 접근할 수 있게 하였다.

본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 집중정수 모델링으로, 개리킨 접근기법을 이용 레젠드라 함수를 도입하므로써 집중정수 모델링시 근사 오차를 최소화 하도록하는 근사 모델을 얻을 수 있었다. 공간분할 기법에 의한 모델링과 비교해 볼 때 에너지 손실이 적고, 근사 오차가

더욱 적음을 알 수 있었다.

2) 분포정수계의 최적제어 문제로, 분포정수계의 최적제어의 해는 구하기 매우 어렵고 또한 구한다하더라도 2개의 독립변수로 표현되는 상태의 제한에 의해 결정되기 때문에 계산상 처리가 매우 어렵게 된다. 이러한 문제의 해결로 1) 에서 얻어진 집중정수 모델에 최적제어 이론을 도입하였다. 대규모 집중정수 모델을 여러개의 부시스템으로 분할하여 각 부시스템을 최적제어하므로써, 분포정수계의 최적제어를 보다 간단하고 정확하게 수행할 수 있었다.

3) 위 2)항에서의 최적제어 입력을 설정하기 위해 블럭 펄스 함수를 도입하고 반복적인 연산 알고리즘을 개발하여 분포정수계의 최적제어의 실시간 처리가 가능하도록 하였다. 부시스템의 계산량이 적기 때문에 각 부시스템의 최적제어 처리 속도가 빠르고, 전체 시스템의 최적제어에 대한 오차의 수렴 속도가 빠름을 알 수 있었다.

따라서 분포정수계의 시뮬레이션, 제어기의 설계 및 실시간 데이터 처리 그리고 시스템의 최적 운용에 도움이 되리라 기대한다.

본 연구는 1989년도 한국과학재단 박사학위 논문 연구비의 지원에 의해 이루어졌음

부록

고차 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계는

$$\frac{\partial}{\partial t} x(y,t) = \mathcal{D}x(y,t) + b_0 u(y,t) \quad (A.1)$$

$$x(y,0) = x_0(y), f[x(0,t), x(y,t)] = 0$$

다음과 같은 집중정수계로 모델링 된다.

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = A\alpha(t) + B\gamma(t) \quad (A.2)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad (A.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} (2j+1) & \\ & y, & g_{ij} \end{bmatrix}, B = b_0 I$$

단,

$$g_{ij} = \int_0^{y_j} \int_0^{y_j} \mathcal{D} \psi_j(y) dy \frac{d}{dy} \psi_j(y) dy$$

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_{N-1}(t) \end{bmatrix}$$

식(A.3)의 $\alpha(0)$ 는 분포정수계의 초기조건에 대한 레젠드라 함수의 계수이다.

분포정수계의 평가함수 역시 레젠드라 함수의 특

성을 도입하면

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^{y_f} q x^2(y,t) + r u^2(y,t) dx dy dt \quad (A.4)$$

다음과 같은 집중정수계의 평가함수로 변형된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \alpha^T(t) Q' \alpha(t) + \gamma^T(t) R' \gamma(t) dt \quad (A.5)$$

$$\text{단, } Q' = qF, R' = rF, F = [f_{ij}]$$

참 고 문 헌

- [1] G.R. Spalding, "Modeling techniques for distributed parameter systems", Control and Dynamic Systems, Academic Press, pp.105 ~130, 1982.
- [2] S.G. Tzafestass, "Design of distributed parameter optimal controllers and filters via Walsh-Galerkin expansions", Control System Lab. Uni. of Pateras, Greece, pp. 201~217, 1978.
- [3] D.J. Cooper, "Comparision of linear distributed parameter filters to lumped approximants", AIChE J., Vol. 32, pp. 186~194, 1986.
- [4] 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 성균관대학교 공학박사 학위 논문, 1989.
- [5] G.B. Mahapatra, "Solutions of optimal control problem of linear diffusion equations via Walsh function", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 25, pp. 319~321, 1980.
- [6] N.S. Hsu, "Analysis and optimal control of time varying linear systems via block-pulse functions", Int. J. Control, Vol. 33, pp. 1107 ~1122, 1981
- [7] M. Ohikita, "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations", IEEE Trans. Circuit and System, Vol. 33, pp. 853~862, 1986.
- [8] 안두수, 심재선, 이명규, "월쉬 급수 전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구", 대한전기학회 논문지 35권 3호, pp. 95~101, 1986.
- [9] 안두수, 채영무, 이명규, "Haar 함수를 이용한 시스템 동정에 관한 연구", 대한전기학회 논문지 36권 4호, pp. 287~292, 1987.
- [10] 안두수, 배종일, 이명규, "선형계의 차수 및 파라미터 추정을 위한 Walsh 함수 접근에 관

- 한 연구”. 대한전기학회 논문지 38권 2호, pp. 137~143, 1989.
- [11] M.S. Corrington, “Solution of differential and integral equations with Walsh functions”, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. 20, pp. 470~476, 1973.
- [12] C.F. Chen and Hsiao, “A state space approach to Walsh series solution of linear systems”, Int. J. Systems Science, Vol. 6, pp. 833~858, 1975.
- [13] M.L. Wang, R.Y. Chang, “Optimal control of linear distributed parameter systems by shifted Legendre polynomials”, Trans. of ASME Vol. 105, pp. 222~226, 1983.
- [14] R.K. Cavin III, “Distributed parameter system optimum control design via finite element discretization”, Automatica, Vol. 13, pp. 611~614, 1977.
- [15] Finlayson, B.A, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, NewYork, 1972.
- [16] Y. Yoshimura, “Identification on heat transfer system using the Galerkin method”, Int. J. System Science, Vol.13, pp. 247~255, 1985.
- [17] S. Barmett, “Matrices in control theory”, Van Nostran Reinhold, 1971
- [18] N.R. Sandell etc., “Survey of decentralized control methods for large scale systems”, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 23, pp. 108~128, 1978.
- [19] T.C. Xinogalas, “Hierarchical computation of decentralized gains for interconnected systems”, Automatica, Vol. 18, pp. 473~478, 1982.
- [20] M.G. Singh, “Multilevel feedback control for interconnected dynamical systems using the prediction principle”, IEEE Trans. System, Man, and Cybernetics, Vol. 6, 233~239, 1976.
- [21] Y. Takahara, “A multilevel structure for a class of dynamical optimization problem”, M.S. Thesis, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1965.
- [22] A.P. Sage, “Optimal systems control”, Prentice-Hell, N.J., 1977.