

직교함수에 의한 쌍일차계의 해석 및 상태 추정에 관한 연구

A Study on the Analysis and State Estimation of Bilinear Systems via Orthogonal Functions

安斗守* · 沈在先**
(Doo-Soo Ahn · Jae-Sun Shin)

요 약

일반적으로 시스템의 해석 및 상태추정에 직교함수들을 이용할 때의 문제점으로 Kronecker product에 의해 도입되는 고차 행렬의 역변환이 필요하게 되어 많은 시간을 요하게 되며, 오차에 의해 정확성을 기할 수 없다.

따라서 본 연구에서는 Walsh, Block pulse, Haar 함수등을 이용한 쌍일차계의 상태추정을 위한 방법에 관해 비교 연구하고 새로운 직교함수 단일항 전개에 의한 추정방법을 제시하였다. 다른 방법과 비교해 볼 때 본 연구에 의하면 계산이 간편하고 정의구간에 상관없이 임의적으로 전개항수를 늘릴 수 있게된다. 더욱이 Kronecker 곱에 의한 다루기 힘든 고차 행렬이나 그에 따르는 행렬들의 계산이 필요 없으며, 시간이 절약되고 계산상 용량은 줄어들게 된다.

Abstract- Common problems encountered when orthogonal functions are used in system analysis and state estimation are the time consuming process of high order matrix inversion required in finding the Kronecker products and the truncation errors. In this paper, therefore, a method for the analysis of bilinear systems using Walsh, Block pulse, and Haar functions is devised. Then, state estimation of bilinear system is also studied based on single term expansion of orthogonal functions.

From the method presented here, when compared to the other conventional methods, we can obtain the results with simpler computation as the number of interval increases, and the results approach the original function faster even at randomly chosen points regardless of the definition of intervals. In addition, this method requires neither the inversion of large matrices on obtaining the expansion coefficients nor the cumbersome procedures in finding Kronecker products. Thus, both the computing time and required memory size can be significantly reduced.

1. 서 론

*正 會 員 : 成均館大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
 **正 會 員 : 三陟工專大 電氣科 副教授 · 工博
 接受日字 : 1989年 9月 8日
 1次修正 : 1990年 5月 24日

본 연구에서는 직교함수 중 데이터 처리를 간단히 할 수 있고 컴퓨터 실시간 데이터 처리가 가능

하며 부분적으로 연속인 값을 갖는 구형과 직교 함수들, 즉 Walsh, Block pulse, Haar 함수등을 이용한 쌍일차계의 해석 및 상태 추정에 대해 연구한다. [1~8] 먼저 쌍일차계의 해석을 위한 직교함수의 유한급수 전개에 의한 접근방법 및 단일항 전개에 의한 방법을 비교 고찰하며, [8~9] 다음으로 쌍일차계의 상태추정을 위한 유한급수 전개방법 및 단일항 접근방법을 제시하고자 한다. 여기서 상태 관측자 방정식은 입력에 관계없이 상태관측 오차 방정식을 안정하도록 하는 I. Derese가 제안한 방식에 의해 구성하였다. [10] 본 연구에서는 이러한 상태관측자에 직교함수를 도입하여 상태를 간단한 대수 연립방정식으로부터 쌍일차계의 상태를 관측할 수 있도록 하였다. [7, 9]

또한, 직교함수의 최소 유한급수 전개 즉, 단일항 전개에 의한 새로운 방법을 제시하므로써, 직교함수의 유한급수 전개 접근 방법에서 나타나는 고차행렬의 역변환등의 불편한 점을 극복할 수 있는 알고리즘을 개발하며, 일반적인 비선형계의 해석 및 상태 추정에 적용 가능하도록 하고자 한다.

2. 직교함수

2.1 직교함수의 유한 급수전개

적분가능한 임의의 함수 $f(t)$ 를 정의 구간 $[0, 1]$ 에서 직교함수로 유한 급수 전개하면 다음과 같다. [1~3]

$$f(t) = \sum_{n=0}^{m-1} f_n \phi(n, t) \quad (2-1)$$

$$= \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Phi}(t)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}^T(t) \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_{m-1}]^T \quad (2-2)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\phi(0, t), \phi(1, t), \dots, \phi(m-1, t)]^T \quad (2-3)$$

여기서 T 는 전치를 의미하며 m 은 직교함수의 전개항수이며, f_n 은 직교함수의 n 번째 계수로 다음의 적분 사중오차를 최소화 하도록 결정한다. [1-3]

$$\varepsilon = \int_0^1 [f(t) - \sum_{n=0}^{m-1} f_n \phi(n, t)]^2 dt \quad (2-4)$$

Walsh, Block pulse, Haar 함수들은 직교함수로 $t \in [0, 1]$ 에서 정의되며 각 직교함수의 계수 f_n 은 다음과 같이

$$f_n = \int_0^1 \phi(n, t) f(t) dt \quad (2-5)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

로 결정된다.

입의 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 의 곱으로 표현된 경우를 보면

$$g(t) = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (2-6)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}^T(t) \mathbf{G}$$

와 같이 전개된다고 할때 $f(t)$ $g(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t)g(t) = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t) \mathbf{G} \quad (2-7)$$

$$= \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Psi}(t) \mathbf{G}$$

$$= \mathbf{F}^T \Lambda_G \boldsymbol{\Phi}(t)$$

단, $\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t)$ 이며 Λ_G 는

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 가 Walsh 함수인 경우 다음의 관계로부터 결정된다.

$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 의 ij 번째 $\phi_{ij}(t)$ 는 Walsh함수의 특성에 의해

$$\phi_{ij}(t) = \phi_i(t) \phi_j(t) \quad (2-8)$$

$$= \phi_{i_b} \oplus_{j_b}(t)$$

로 표현된다. 여기서 i_b 와 j_b 는 각각 i 와 j 에 대한 2진표현이며 \oplus 는 모듈로 2진 가산(modulo 2 addition)을 의미한다. 따라서 $\boldsymbol{\Psi}(t) \mathbf{G}$ 는 Walsh함수의 4항 전개를 이용할 경우 다음과 같다. [7]

$$\boldsymbol{\Psi}(t) \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) \\ \phi_1(t) & \phi_0(t) & \phi_3(t) & \phi_2(t) \\ \phi_2(t) & \phi_3(t) & \phi_0(t) & \phi_1(t) \\ \phi_3(t) & \phi_2(t) & \phi_1(t) & \phi_0(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & g_0 & g_3 & g_2 \\ g_2 & g_3 & g_0 & g_1 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{bmatrix}$$

$$= \Lambda_G \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (2-9)$$

그러므로 두함수의 곱인 $f(t) g(t)$ 를 Walsh함수 4항 전개를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$f(t)g(t) = \mathbf{F}^T \Lambda_G \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (2-10)$$

단, $\mathbf{F}^T = [f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3]$

$$\mathbf{G}^T = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ g_3]$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T(t) = [\phi_0(t) \ \phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \phi_3(t)]$$

$$\Lambda_G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & g_0 & g_3 & g_2 \\ g_2 & g_3 & g_0 & g_1 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

직교함수의 적분은 역시 직교함수로 표현할 수 있

으며 그 관계는 다음과 같다. [1-3]

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = P\Phi(t) \quad (2-11)$$

P를 적분을 위한 연산 행렬이라 한다. 이 적분을 위한 연산행렬은 미분방정식으로 표현된 시스템을 적분방정식으로 변환하고 직교함수를 도입할 때 적분 연산자로 이용된다.

2.2 직교함수의 단일항 전개

식(2-1)에서 함수 $f(t)$ 를 직교함수의 정의구간 $[0,1]$ 에서 직교함수 m 항을 이용하여 유한급수 전개하면 함수 $f(t)$ 는 부분적으로 연속인 m 개의 상수값으로 근사화 된다. 따라서 직교함수 m 개를 이용한 유한급수 전개시 $[0,1/m]$ 에서의 근사값은 정의 구간을 $[0,1/m]$ 로 하고 직교함수 단일항 전개를 이용할 때의 결과와 같은 효과를 얻을 수 있다.

함수 $f(t)$ 를 $t \in [0,1/m]$ 에서 직교함수의 단일항으로 근사화 시키면 다음과 같다.

단, 직교함수의 정의구간은 $[0,1]$ 이므로 $t \in [0,1/m]$ 을 $\tau \in [0,1]$ 로 스케일링 해야한다.

$$f(t) = f_{(1)}\phi(0, \tau) \quad (2-12)$$

$f_{(1)}$ 은 $t \in [0,1/m]$ 즉 $\tau \in [0,1]$ 에서의 직교함수 단일항 전개에 의한 계수이며 다음과 같다.

$$f_{(1)} = \int_0^1 f(\tau)\phi(0, \tau) d\tau \quad (2-13)$$

직교함수의 적분은 역시 직교함수로 전개될 수 있으므로

$$\int_0^\tau \phi(0, \lambda) d\lambda = P\phi(0, \tau) \quad (2-14)$$

에서 모든 직교함수의 첫번째 항은 $\phi(0, \tau) = 1$ 이므로 식(2-14)에서의 적분 연산 파라미터 P 는 다음과 같다.

$$\int_0^\tau \phi(0, \lambda) d\lambda = \tau = P\phi(0, \tau) \quad (2-15)$$

따라서 P 는 τ 를 직교함수 단일항 전개에 의한 계수와 같으므로

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 \tau\phi(0, \tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \tau d\tau \quad (\because \phi(0, \tau) = 1) \\ &= 1/2 \end{aligned} \quad (2-16)$$

임을 알 수 있다.

3. 쌍일차계의 해석

3.1 직교함수의 유한급수 전개에 의한 쌍일차계의 해석

다음과 같이 표현되는 쌍일차계에서

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B u(t) + \sum_{i=1}^q A_i x(t) u_i(t) \quad (3-1)$$

$$x(0) = x_o$$

$x(t)$, $u(t)$, $u_i(t)$ 를 직교함수로 다음과 같이 전개된다고 하자.

$$\begin{aligned} x(t) &= X^T \Phi(t) \\ u(t) &= U^T \Phi(t) \\ u_i(t) &= U_i^T \Phi(t) \\ x(t)u_i(t) &= X^T A_{ui} \Phi(t) \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$\text{단, } X^T = \begin{bmatrix} X_{10} & X_{11} & \dots & X_{1m-1} \\ X_{20} & X_{21} & \dots & X_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{no} & X_{n1} & \dots & X_{nm-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} U_{10} & U_{11} & \dots & U_{1m-1} \\ U_{20} & U_{21} & \dots & U_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{r0} & U_{r1} & \dots & U_{rm-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \vdots \\ U_r^T \end{bmatrix}$$

식(3-1)의 양변에 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) - x_o &= A_o \int_0^t x(\tau) d\tau + B \int_0^t u(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^q A_i \int_0^t x(\tau) u_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-3)$$

위 식에 식(3-2)와 적분을 위한 연산행렬을 도입하면 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} X^T \Phi(t) - X_o^T \Phi(t) &= A_o X^T P \Phi(t) + \\ B U^T P \Phi(t) &+ \sum_{i=1}^q A_i X^T A_{ui} P \Phi(t) \end{aligned} \quad (3-4)$$

단, $X_0^T = [x_0, 0, 0, \dots, 0]$

식(3-4) 양변의 $\Phi(t)$ 를 소거하면

$$X^T - X_0^T = A_0 X^T P + B U^T P + \sum_{i=1}^q A_i X^T A_{ui} P \quad (3-5)$$

식(3-5)에서 X^T 는 $n \times m$ 차 행렬이므로 X^T 를 구하기 위해서는 Kronecker 곱이 필요하며 이를 이용하면 다음과 같다. [11]

$$x_c - x_{oc} = P^T \otimes A_0 x_c + \sum_{i=1}^q (A_{ui} P)^T \otimes A_i x_c + P^T \otimes B u_c \quad (3-6)$$

단,

$$x_c = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, u_c = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

식(3-7)에서 x_c 와 u_c 에서의 X_i 와 U_i 는 식(3-2)를 보면 알 수 있듯이 각각 i 번째 상태변수 $x_i(t)$ 와 제어변수 $u_i(t)$ 에 대한 계수 벡터이다. [7] 또한 \otimes 는 Kronecker 곱으로 다음과 같다. $n \times n$ 차 행렬과 $m \times m$ 차인 두 행렬이 각각 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 라고 할 때, $A \otimes B$ 는

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & b_{1n}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \dots & b_{2n}A \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{r1}A & b_{r2}A & \dots & b_{rn}A \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

와 같으며 $A \otimes B$ 의 dimension은 $nm \times nm$ 이다. 식(3-7)에서 x_c 는, $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 가 m 차 column 벡터이므로, nm 차 column 벡터임을 알 수 있다.

식(3-6)을 x_c 에 대해 정리하면

$$x_c = [I - P^T \otimes A_0 + \sum_{i=1}^q (A_{ui} P^T) \otimes A_i]^{-1} (x_{oc} + P^T \otimes B u_c) \quad (3-9)$$

와 같으며 식(3-7) 및 식(3-2)의 관계로부터 상태 벡터인 $x(t)$ 를 구할 수 있다.

3.2 직교함수의 단일항 전개에 의한 쌍일차계의 해석

식(3-1)로 표현되는 쌍일차계에 직교함수의 단

일항 전개를 이용하기 위해서 $\tau = mt$ 로 스케일링 하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(\tau) = \frac{1}{m} A_0 x(\tau) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^q A_i x(\tau) u_i(\tau) + \frac{1}{m} B u(\tau) \quad (3-10)$$

$x(\tau)$, $u(\tau)$ 및 $u_i(\tau)$ 를 직교함수의 단일항으로 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} x(\tau) &= X_{(1)} \phi(0, \tau) \\ u(\tau) &= U_{(1)} \phi(0, \tau) \\ u_i(\tau) &= U_{i(1)} \phi(0, \tau) \end{aligned} \quad (3-11)$$

또한 $\dot{x}(\tau)$ 를 다음과 같이 전개할 때

$$\dot{x}(\tau) = S_{(1)} \phi(0, \tau) \quad (3-12)$$

식(3-12)의 양변에 적분을 취하면 다음과 같다.

$$x(\tau) - x(0) = S_{(1)} \int_0^\tau \phi(0, \lambda) d\lambda \quad (3-13)$$

위 식에 식(3-11) 및 (2-15), (2-16)의 관계를 도입하면

$$\begin{aligned} X_{(1)} - x(0) &= 1/2 S_{(1)} \\ X_{(1)} &= 1/2 S_{(1)} + x(0) \end{aligned} \quad (3-14)$$

과 같으며 식(3-12)의 계수인 $S_{(1)}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{(1)} &= \int_0^1 \dot{x}(\tau) \phi(0, \tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= x(1) - x(0) \quad (\because \phi(0, \tau) = 1) \\ x(1) &= S_{(1)} + x(0) \end{aligned} \quad (3-15)$$

식(3-10)을 식(3-11), (3-12) 및 적분을 위한 연산 행렬을 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{(1)} &= \frac{1}{m} A_0 X_{(1)} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^q A_i X_{(1)} U_{i(1)} \\ &\quad + \frac{1}{m} B U_{(1)} \end{aligned} \quad (3-16)$$

위 식에 식(3-14)의 관계를 도입하면

$$\begin{aligned} S_{(1)} &= [I - A_0/2m - 1/2m \sum_{i=1}^q A_i U_{i(1)}]^{-1} [A_0/ \\ m x(0) + 1/m \sum_{i=1}^q A_i U_{i(1)} x(0) + B/m U_{(1)}] \end{aligned} \quad (3-17)$$

와 같다. 그러므로 식(3-17)로부터 $S_{(1)}$ 이 결정되고 식(3-14)로부터 $\tau \in [0, 1]$ 에서의 $x(\tau)$ 즉 $t \in [0, 1/m]$ 에서의 $x(t)$ 에 대한 근사값을 얻을 수 있게 된다. 또한 식(3-15)는 $S_{(1)}$ 으로부터 $x(1)$ 값을 알 수 있게 되는데 이 $x(1)$ 은 다음 구간

의 초기 값으로 이용된다. 따라서 임의의 k 번째 구간에서 직교함수 단일항 전개로

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{X}_{(k)}\phi(0, \tau) \\ \mathbf{u}(\tau) &= \mathbf{U}_{(k)}\phi(0, \tau) \\ \mathbf{u}_i(\tau) &= U_{i(k)}\phi(0, \tau) \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) &= \mathbf{S}_{(k)}\phi(0, \tau) \end{aligned} \quad (3-18)$$

와 같이 전개된다고 하면 다음의 반복적인 계산에 의해 상태벡터 $\mathbf{x}(t)$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{(k)} &= [\mathbf{I} - \mathbf{A}_o/2m - 1/2m \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i U_{i(k)}]^{-1} [\mathbf{A}_o/m \\ \mathbf{x}(k-1) + 1/m \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i U_{i(k)} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}/m \mathbf{U}_{(k)}] \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(k)} &= 1/2 \mathbf{S}_{(k)} + \mathbf{x}(k-1) \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{S}_{(k)} + \mathbf{x}(k-1) \\ k &= 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

4. 쌍일차계의 상태관측

다음식으로 표현되는 n 차 쌍일차계의 상태추정 문제를 고려한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) u_i(t) \quad (4-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (4-2)$$

이 시스템에 대한 상태관측자 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_o \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) u_i(t) + \\ \mathbf{H}_o \mathbf{C} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \sum_{i=1}^q \mathbf{H}_i \mathbf{C} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) u_i(t) \end{aligned} \quad (4-3)$$

와 같으며 관측 이득인 $\mathbf{H}_o, \mathbf{H}_i$ 는 다음과 같은 오차방정식을 안정하게 하도록 결정하여야 한다.

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}_o - \mathbf{H}_o \mathbf{C}) \mathbf{e}(t) + \sum_{i=1}^q (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i) u_i(t) \mathbf{e}(t) \quad (4-4)$$

단, $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))$

여기에서는 I. Derese가 제시한 Lyapunov 함수 접근 방법에 의한 $\mathbf{H}_o, \mathbf{H}_i$ 의 결정 방법을 이용하였다.

4.1 직교함수의 유한급수 전개에 의한 쌍일차계의 상태관측

식(4-3)을 다음과 같이 표현하자.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \hat{\mathbf{A}}_o \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^q \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}}(t) u_i(t) + \\ \mathbf{H}_o \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^q \mathbf{H}_i \mathbf{C} \mathbf{x}(t) u_i(t) \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } \hat{\mathbf{A}}_o &= [\mathbf{A}_o - \mathbf{H}_o \mathbf{C}] \\ \hat{\mathbf{A}}_i &= [\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}] \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{u}(t)$ 를 다음과 같이 직교함수로 m 항까지 유한급수 전개하자.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \hat{\mathbf{X}}^T \Phi(t) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{X}_{10} & \hat{X}_{11} & \dots & \hat{X}_{1m-1} \\ \hat{X}_{20} & \hat{X}_{21} & \dots & \hat{X}_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{X}_{n0} & \hat{X}_{n1} & \dots & \hat{X}_{nm-1} \end{bmatrix} \Phi(t) \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{X}_1^T \\ \hat{X}_2^T \\ \vdots \\ \hat{X}_n^T \end{bmatrix} \Phi(t) \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^T \Phi(t) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{U}^T \Phi(t)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \end{bmatrix} \Phi(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{U}_r^T \end{bmatrix} \Phi(t) \quad (4-7)$$

식 (4-5)의 양변에 적분을 취하고 식(4-6), (4-7) 및 적분을 위한 연산 행렬을 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^T &= \hat{\mathbf{A}}_o \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{P} + \mathbf{B} \mathbf{U}^T \mathbf{P} + \sum_{i=1}^q \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{X}}^T \Lambda_{ui} \mathbf{P} \\ &+ \mathbf{H}_o \mathbf{C} \mathbf{X}^T \mathbf{P} + \sum_{i=1}^q \mathbf{H}_i \mathbf{C} \mathbf{X}^T \Lambda_{ui} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (4-8)$$

윗 식에서 $\hat{\mathbf{X}}^T$ 를 구하기 위해 Kronecker 곱을 도입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{P}^T \otimes \hat{\mathbf{A}}_o \hat{\mathbf{x}}_c + \mathbf{P}^T \otimes \mathbf{B} \mathbf{u}_c + \sum_{i=1}^q (\Lambda_{ui} \mathbf{P})^T \\ &\otimes \hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}}_c + \mathbf{P}^T \otimes (\mathbf{H}_o \mathbf{C}) \mathbf{x}_c + \sum_{i=1}^q (\Lambda_{ui} \mathbf{P})^T \\ &\otimes (\mathbf{H}_i \mathbf{C}) \mathbf{x}_c \end{aligned} \quad (4-9)$$

즉,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_c &= [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T \otimes \hat{\mathbf{A}}_o - \sum_{i=1}^q (\Lambda_{ui} \mathbf{P})^T \otimes \hat{\mathbf{A}}_i]^{-1} \\ &[\mathbf{P}^T \otimes (\mathbf{H}_o \mathbf{C}) \mathbf{x}_c + \sum_{i=1}^q (\Lambda_{ui} \mathbf{P})^T \otimes (\mathbf{H}_i \mathbf{C}) \mathbf{x}_c] \end{aligned} \quad (4-10)$$

단,

$$\hat{x}_c = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{bmatrix} \quad x_c = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad u_c = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix}$$

식(4-10)으로부터 \hat{x}_c 를 구할 수 있으므로 식(4-6)에서 쌍일차계의 상태 추정치인 $\hat{x}(t)$ 를 결정할 수 있다.

4.2 직교함수의 단일항 전개에 의한 쌍일차계의 상태관측

3-2절에서와 같이 식(4-5)의 관측차 방정식에 직교함수 단일항 전개를 이용하면 직교함수의 유한급수 전개시 나타나는 처리가 매우 어려운 Kronecker 곱이 필요없이, 간단한 반복적인 계산에 의해 상태추정치를 얻을 수 있다.

직교함수의 단일항 전개를 도입하기 위해 식(4-5)를 $\tau = m\tau$ 로 스케일링 하면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = \tilde{A}_o \hat{x}(\tau) + \tilde{B} u(\tau) + \sum_{i=1}^q \tilde{A}_i \hat{x}(\tau) u_i(\tau) + \tilde{H}_o C x(\tau) + \sum_{i=1}^q \tilde{H}_i C x(\tau) u_i(\tau) \quad (4-11)$$

단, $\tilde{A}_o = [A_o - H_o C] / m$
 $\tilde{B} = B / m$
 $\tilde{A}_i = [A_i - H_i C] / m$
 $\tilde{H}_o = H_o / m$
 $\tilde{H}_i = H_i / m$

$\dot{\hat{x}}(\tau)$, $\hat{x}(\tau)$, $u(\tau)$ 및 $x(\tau)$ 를 직교함수 단일항으로 다음과 같이 전개하고

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(\tau) &= \hat{S}_{(k)} \phi(0, \tau) \\ \hat{x}(\tau) &= \hat{X}_{(k)} \phi(0, \tau) \\ x(\tau) &= X_{(k)} \phi(0, \tau) \\ u(\tau) &= U_{(k)} \phi(0, \tau) \end{aligned} \quad (4-12)$$

식(4-11)에 식(4-12)를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{(k)} &= [I - \tilde{A}_o / 2 - 1/2 \sum_{i=1}^q \tilde{A}_i U_{i(k)}]^{-1} \\ & [\tilde{A}_o \hat{x}(k-1) + \sum_{i=1}^q \tilde{A}_i U_{i(k)} \hat{x}(k-1) + \tilde{B} U_{(k)} \\ & + \tilde{H}_o C X_{(k)} + \sum_{i=1}^q (\tilde{H}_i C) X_{(k)} U_{i(k)}] \quad (4-13) \\ \hat{X}_{(k)} &= 1/2 \hat{S}_{(k)} + \hat{x}(k-1) \\ \hat{x}(k) &= \hat{S}_{(k)} + \hat{x}(k-1) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

따라서 유한급수전개에 의한 결과식(4-10)과 단일항 전개에 의한 상태관측 알고리즘을 비교해 보면 알 수 있듯이 단일항 전개에 의하면 식(4-10)에서 나타나는 Kronecker 곱에 의한 고차 행렬의 역변환이나 행렬의 곱이 필요없이 간단한 반복적인 계산 즉, 식(4-13)에 의해 상태 추정치인 $\hat{x}(t)$ 를 얻을 수 있다.

5. 시뮬레이션

5.1 쌍일차계의 해석

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + A_1 x(t) u_1(t) + B u_2(t) \quad (5.1)$$

$$x(0) = x_o \quad (5.2)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (5.3)$$

단,

$$A_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$u_1(t) = \cos(t)$$

$$u_2(t) = 0.5$$

이 시스템에 대한 직교함수를 이용하여 구한 결과가 그림 1-그림 5까지 나타나 있다. 그림 1, 2, 3은 각각 Walsh, Block pulse, Haar함수의 16항 전개에 의한 결과로 상태 변수를 나타내고 있다.

또 그림 4, 5는 본 연구에서 단일항 전개에 의한 결과로 그림 4는 $m=16$ 으로, 그림 5는 $m=128$ 로 했을 때의 결과를 보여준다.

5.2 쌍일차계의 상태 관측

식(5.1) - (5.3)에서 고려한 시스템의 상태 관측을 고려한다.

관측 오차 방정식을 안정하게 하도록 관측 이득 행렬인 H_o , H_1 을 각각 다음과 같이 하였을 때,

$$H_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

단일항 전개에 의한 결과가 그림 6과 같다.

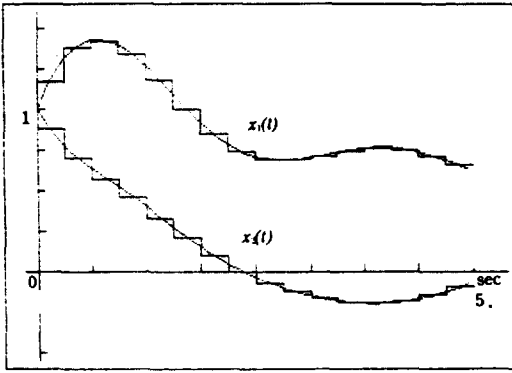


그림 1 Walsh함수 16항 전개에 의한 결과
Fig. 1 The results of the expansion of Walsh function with $m=16$.

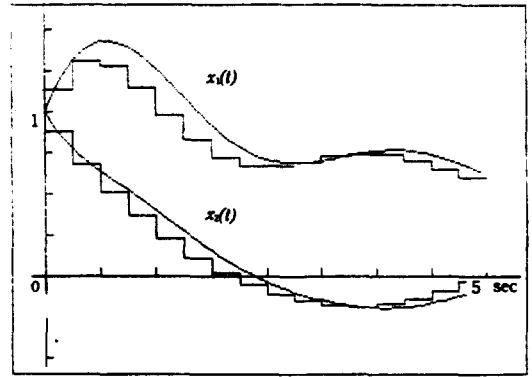


그림 4 $m=16$ 로 했을 때 단일항 전개에 의한 결과.
Fig. 4 The results of the single term expansion with $m=16$.

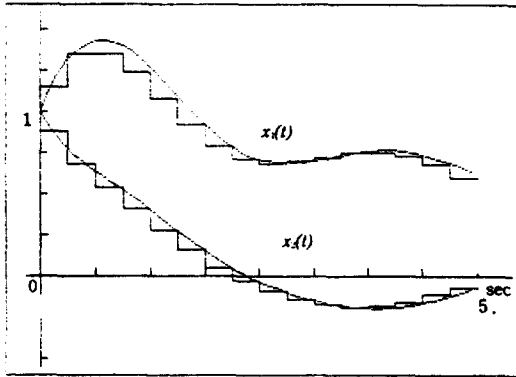


그림 2 Block pulse 함수 16항 전개에 의한 결과
Fig. 2 The results of the expansion of Block pulse function with $m=16$.

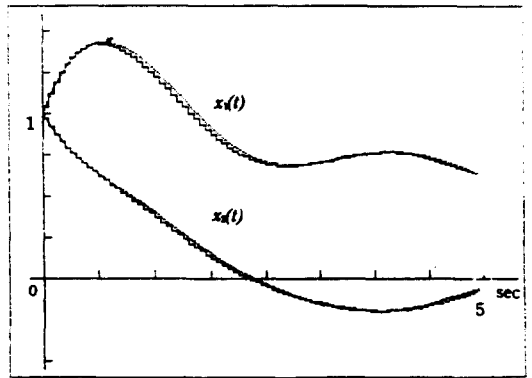


그림 5 $m=128$ 로 했을 때 단일항 전개에 의한 결과
Fig. 5 The results of the single term expansion with $m=128$.

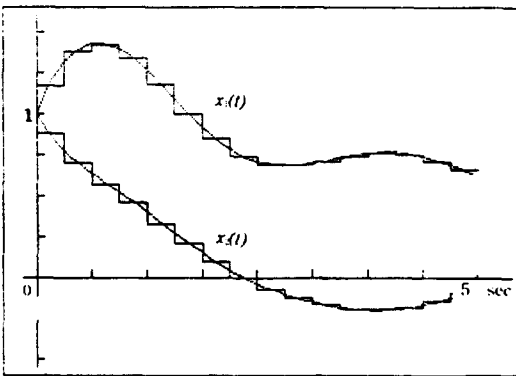


그림 3 Haar 함수 16항 전개에 의한 결과
Fig. 3 The results of the expansion of Haar function with $m=16$.

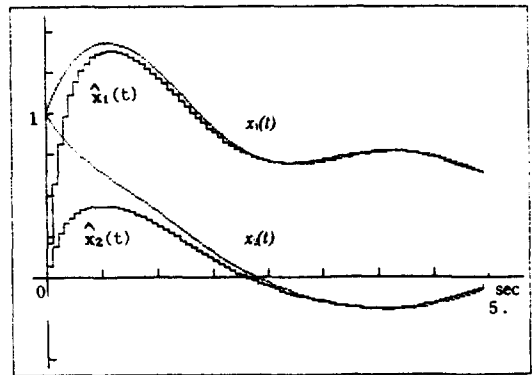


그림 6 $m=128$ 로 했을 때 단일항 전개에 의한 상태추정
Fig. 6 The results of the state estimation based on the single term expansion with $m=128$.

이 그림은 $m=128$ 로 했을 때의 결과이며, 점선은 상태 응답 값이고 부분적으로 연속인 사선으로 나타난 그림은 본 연구의 단일항 전개에 의해 추정된 상태 응답을 나타낸다.

시뮬레이션 5-1절은 시스템 해석에 대하여 각 직교함수의 결과를 비교하였으며 5-2는 단일항 전개에 의한 시스템의 상태추정에 관하여 연구하였다. 시뮬레이션 5-1에서의 Walsh, Block-pulse, Haar함수의 16항 전개를 보면 직교함수 중 Walsh와 Haar함수의 결과는 시스템의 응답값이 원함수와 근접하고 있어 세부구간을 늘릴 경우 더욱 정확한 결과를 얻었다.

반면 Block-pulse함수는 두 함수에 비하여 정확도는 떨어지나 선형계의 경우는 오히려 정확도가 높아짐을 볼 때 본 연구에서 Block pulse함수의 적용결과가 만족스럽지 못한 것은 시스템의 쌍일차계의 응답특성에 기인된 결과라고 추정된다.

일반직교 함수를 정의 구간 $[0, 1)$ 에서 전개항수 16개로 하는 것은 단일항 접근방법에서 정의구간을 $[0, 1/16)$ 로 하고 여기에 직교함수의 전개항수를 1개로 이용하는 것과 같다. 직교함수를 이용할 때의 세부구간은 $1/16$ 이다. 물론 단일항 전개 방법에 의한 결과가 만족스럽지 못하지만 단일항 전개에 의한 방법은 정의구간에 관계없이 원하는 대로 확장이 가능한 잇점이 있다. 즉, 직교함수를 이용하여 $[0, 5)$ 구간을 해석할 때 전개항을 16으로 한다면 세부구간은 $5/16$ 가 된다. 따라서 $[0, 5/16)$ 사이의 값이 대표값 하나로 결정되고 시스템의 응답변화가 심하다면 전개항은 16으로 해서는 그 시스템의 특성을 알 수 없을 때가 많다. 그러므로 전개항수를 증가하여야 하는데 그 전개항수는 직교함수가 2^n 개로 하나의 완전한 집합을 이루므로 32항, 64항, 128항으로 전개하여야 한다. 시스템이 2차이고 전개항수를 128로 하면 $2 \times 128 = 256$ 즉 256×256 행렬의 역변환이 따르게 되어 계산시간이 느리고 컴퓨터의 용량을 많이 차지하게 된다. 그러나 단일항 전개에 의한 방법을 적용하면 2×2 의 행렬의 역변환과 반복계산에 의해 간단하게 결과를 얻을 수 있다. 즉 큰 차원의 행렬의 역변환이 필요없이 적은 차원의 행렬의 역변환에 의해 쉽게 정보를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그런데 단일항 전개를 이용하는 경우 세부구간을 다른 직교함수들을 이용하는 접근에서처럼 똑 같게 한다면 단일항 전개에 의한 방법의 결과가 만족스럽지는 않으나 세부구간을 작게하면 다른 방법보

다 원함수에 가까워짐을 알게된다. 다른 직교 함수를 이용하는 접근 방법보다는 단일항 전개에 의한 방법이 더 효율적인 것은 Kronecker곱과 곱행렬에 의한 고차행렬의 역변환이 필요없고, 컴퓨터용량이 적고 계산시간이 단축되는 잇점이 있기 때문이다. 시뮬레이션 5-2절에서의 그림 5-6은 단일항 전개에 의한 상태추정치를 나타내고 있다. 구간 $[0, 5)$ 에서 세부구간을 $5/128$ 로 했을 때의 결과이다.

6. 결론

본 연구에서는 Walsh, Block pulse, Haar함수의 유한 급수 전개 및 단일항 전개에 의한 방법에 관해 비교 고찰 하였다.

또한 각 직교함수의 유한 급수 전개 및 단일항 전개에 의한 쌍일차계의 상태추정 방법을 제시 하였으며 적용예를 통하여 직교함수의 유용성을 입증하였다.

직교함수의 유한급수 전개에 의한 방법은 잡음에 둔감하고 또 1회 계산에 의해 전 구간에 대한 정보를 파악할 수 있지만 그러나 단점으로 Kronecker곱에 의해 고차 행렬의 역변환이 필요하게되어 컴퓨터계산이 길고 오차의 누적을 피할 수가 없으며, 적분을 위한 연산 행렬이 필요하여 비선형계나 선형시변계의 경우 곱 행렬이 도입 되어야 하는 불편한 점이 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 직교함수의 단일항 전개에 의한 접근방법을 제시하였으며, 직교함수의 유한급수 전개에 의한 방법과 비교해 볼 때, 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

1. 적분을 위한 연산 행렬의 정의가 불필요하다.
2. 선형시변계나 비선형계의 처리시 나타나는 곱 행렬이 필요없다.
3. Kronecker곱에 의한 고차 행렬이 계산 없이도 원하는 시스템의 응답을 쉽고 간단하게 구할 수 있다.
4. 구해진 해는 계수의 형태를 취하지 않으므로 직교함수의 유한급수 전개에 의한 방법에서와 같이 시스템의 응답을 구하기위한 추가적인 계산이 필요없다.
5. 세부구간 처리가 용이하여 정확한 응답을 간편하고 빠르게 구할 수가 있었다.

참 고 문 헌

- [1] W.L. Chen and Y.P. Shin "Analysis and optimal control of time-varying linear systems via Walsh functions," INT. J. Control. vol. 27, no. 6, pp. 917~932, 1978.
- [2] W.L. Chen and B.S. Jeng "Analysis of piecewise constant delay systems via block-pulse functions" INT. J. Systems Sci, vol. 12, no. 5, pp. 625~633, 1981.
- [3] P.R. Roeser and M.E. Jernigan "Fast Haar transform algorithms" IEEE Trans. Computers, vol. c-31, no. 2, pp. 175~177, 1982.
- [4] 안두수 "주파수 영역에서 Walsh 함수에 의한 전달함수의 간단화" 전기학회 논문집, vol. 31, no. 8, pp. 33~38, 1982.
- [5] 안두수, 심재선, 이명규 "Walsh급수 전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구", 전기학회 논문집 vol. 35, no. 3, pp. 95~101, 1986.
- [6] C.H. Chen and C.H. Hsiao "A state space approach to Walsh series solution of linear systems", INT. J. Systems Sci vol. 6, no. 9, pp. 838~858, 1975.
- [7] V.R. Karanam and P.A. Frick "Bilinear system identification by Walsh functions," IEEE Trans. Automatic control, vol. AC-23. no. 4, pp. 709~713, Aug, 1978.
- [8] Y. Funahashi "A class of state observers for bilinear systems," INT. J. Systems Sci, vol. 9, no. 11, pp. 1199~1205, 1978.
- [9] W.L. Chen and Y.P. Shih "Parameter estimation of bilinear systems via Walsh functions," J. Franklin Institute, vol. 305, no. 5, pp. 249~257, 1978.
- [10] I. Derese, P. Stevens and E. Noldus "Observers for bilinear systems with bounded input", INT. J. Systems Sci, vol. 10, no. 6, pp. 649~668, 1979.
- [11] Richard J. Weider and R.J. Mulholland "Kronecker product representation for the solution of the general linear matrix equation," IEEE Trans Automatic Control, vol. AC-25, no. 3, pp. 563~564, 1980.