

有限要素法에 의한 非線形 磁界 解析에 共軛 勾配法 適用 研究

A Study on the Application of Conjugate Gradient Method in Nonlinear Magnetic Field Analysis by FEM.

任 達 鎬* · 辛 興 教**
(Dal-Ho Im · Heung-Kyo Shin)

요 약

本 論文은 有限要素法과 Newton-Raphson法에 의한 非線形 磁界 解析時의 計算時間 節減에 관한 研究이다. 이를 위하여 對稱 正定值 行列方程式에만 適用이 可能한 것으로 알려진 共軛勾配法을 이용하여 非線形 反復收斂式을 計算하였다. 그 結果, 系Jacobian이 正定值임을 數學的으로는 證明하지 못하였지만, 이 方法을 適用했을 때 發散하는 경우는 발생하지 않았다. 그리고 計算時間은 直接法 및 過大緩和法을 適用한 경우에 비해 각각 25~55%, 15~45% 節減되었다. 따라서 共軛勾配法の 有用성을 밝힐 수 있었다.

Abstract- This paper is a study on the reduction of computation time in case of nonlinear magnetic field analysis by finite element method and Newton-Raphson method. For the purpose, the nonlinear convergence equation is computed by the conjugate gradient method which is known to be applicable to symmetric positive definite matrix equations only. As the results, we can not prove mathematically that the system Jacobian is positive definite, but when we applied this method, the diverging case did not occur. And the computation time is reduced by 25~55% and 15~45% in comparison with the case of direct and successive over-relaxation method, respectively. Therefore, we proved the utility of conjugate gradient method.

1. 序 論

偏微分方程式으로 표현되는 物理空間의 支配方

*正 會 員: 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

**正 會 員: 慶尙大 工大 電氣工學科 專講

接 受 日 字: 1989年 8月 18日

1 次 修 正: 1989年 10月 20日

程式을 푸는 場의 解析法에는 Laplace變換이나 Fourier變換 또는 變數分離法등을 이용하는 解析的方法, 그리고 有限差分法, 境界要素法등과 같은 數值解析法등 여러가지가 있으나 근년들어와 電子計算機의 大容量化, 高速化에 따라 有限要素法이 가장 강력한 解析手段으로 확립되었다. [1~6] 이러한 有限要素法에 의해 電氣機器의 非

線形 磁氣의 特性을 解析하는 경우에는 대부분의 磁性體의 B-H特性이 磁束密度의 增加에 따라 單純增加特性을 가지므로 Newton-Raphson法이 가장 유리한 것으로 알려져 있다. [1, 2]

그런데 Newton-Raphson法에 의해 非線形代數方程式을 풀 경우 反復收斂式의 計算에 一般적으로 많이 사용되는 Gauss消去法, Cholesky法등의 直接法을 이용하면 各反復計算에 있어서의 演算回數가 未知節點數의 제공(또는 그 이상)에 比例하므로 計算時間이 매우 길어진다는 短點이 있으며, 이는 要素를 細分하면 할수록 더욱 더 큰 問題로 대두되게 된다. [3~6]

이에 따라 本 研究에서는 Newton-Raphson法에 의한 非線形 磁界解析에 있어서의 計算時間을 短縮하기 위하여 線形 正定值 對稱 行列方程式 (Linear Positive Definite Symmetric Matrix Equation)에만 適用이 가능한 것으로 알려진 共軛勾配法(Conjugate Gradient Method)의 適用을 시도하여 종래 주로 사용되어 오던 Cholesky法, Gauss Seidel法 및 過大 緩和法을 適用한 경우와 計算時間, 使用容量등을 比較, 檢討하였다. [7~11]

2. 共軛勾配法과 前處理

線形行列方程式의 解法에는 Gauss消去法, Crout法등의 直接法과 緩和法 및 勾配法(Gradient Method)으로 大별되는 反復法이 있다. [4] 그런데 直接法은 計算論理는 매우 간단하지만 演算回數가 풀어야 하는 行列의 次元의 제공 또는 그 이상에 比例하므로 次元이 커질수록 計算時間이 더욱 더 길어진다는 問題點이 있어 有限要素法에 의해 界를 解析하는 경우와 같이 次元이 매우 커질 경우에는 反復法이 보다 유리하게 된다.

그리고 反復法에 있어서의 緩和法은 係數行列이 對角優位(Diagonally Dominant)이거나 正定值(Positive Definite)이면 收斂하는 반면 勾配法은 係數行列이 對稱 正定值(Symmetric Positive Definite)이어야 적용이 가능하다. 또한 緩和法은 反復回數가 許用誤差 범위내에 따라 결정되지만 勾配法은 그런 正定值과 함께 次元數 만큼만 反復計算하면 計算機의 라운드 오프 誤差(Round Off Error)내에서 眞值에 收斂하는 특성이 있다. [3~6]

여기서 勾配法의 演算論理를 간략히 살펴본다. [6]

$$Sa - f = o \quad (1)$$

를 만족하는 a 를 구하는 것은 式(1)의 左邊 즉 $Sa - f$ 를 勾配(Gradient)로 갖는 2次汎函數(Quadratic Functional)

$$F(a) = \frac{1}{2} a^T Sa - f^T a + c \quad (2)$$

의 停留條件을 구하는 것과 等價이다. 여기서 S 는 $n \times n$ 對稱 正定值 行列이며, a 및 f 는 $n \times 1$ 벡터, o 은 $n \times 1$ 零벡터이다. 그리고 上添字 T 는 轉置(Transpose)를 나타내며, C 는 常數이다.

反復計算에 의하여 式(2)의 停留條件을 구하기 위하여

$$a^{k+1} = a^k + e_k d^k \quad (k=0, 1, 2 \dots) \quad (3)$$

를 고려하자. 여기서 e_k 는

$$\begin{aligned} e_k &= -d^{kT} g^k / d^{kT} S d^k \\ &= g^{kT} g^k / d^{kT} S d^k \end{aligned} \quad (4)$$

로 택한다. 단, g^k 는 $Sa^k - f$ 이며 k 는 反復回數이다. [5, 6]

式(3)에서의 d^k 를 探索方向(Search Direction)이라 하며 共軛勾配法은 $k+1$ 번째 探索方向 d^{k+1} 을

$$d^{k+1} = -g^{k+1} + r_k d^k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

와 같이 취하는 方法이다. 여기서 r_k 는

$$r_k = g^{k+1T} S d^k / d^{kT} S d^k \quad (6)$$

과 같이 택하며, 특히 $r_k=0$ 으로 취하는 경우를 Steepest Descent法이라 한다. 단, g^0 및 d^0 는 $g^0 = Sa^0 - f$, $d^0 = -g^0$ 를 이용한다. 여기서 a^0 는 初期解(Initial Guess)이다.

그리고 式(3)으로부터 g^{k+1} 를 구하면

$$\begin{aligned} g^{k+1} &= Sa^{k+1} - f \\ &= S(a^k + e_k d^k) - f \\ &= Sa^k - f + e_k S d^k \\ &= g^k + e_k S d^k \end{aligned} \quad (7)$$

가 된다.

이상과 같은 共軛勾配法의 演算順序를 Algorithm化하여 나타내면 表 1과 같다. [7~10]

그런데 共軛勾配法은 最大 未知數만큼 反復計算하면 眞直에 收斂하지만 次元이 커지면 그 反復回數가 늘어나 計算時間이 길어지게 된다. 이러한 點을 해결하기 위하여 前處理(Preconditioning)라는 技法을 사용하게 된다. 즉, 풀고자 하는 方程式의 양변에 對稱 正定值 行列의 逆行列을 곱하여 反復計算回數를 절감하는 것이다. 다시 말해 式

(1)에 共軛勾配法을 適用하는 대신

$$P^{-1}Sa = P^{-1}f = f' \quad (8)$$

에 共軛勾配法을 適用하는 것이다. 여기서 $N \times N$ 對稱 正定值 行列 P 를 前處理行列(Preconditioning Matrix)라 하며, 이 P 가 가져야 할 條件은 다음과 같다. [6]

- 1) S 의 Spectral Radius(最大固有值의 絕對값) 보다 $P^{-1}S$ 의 Spectral Radius가 충분히 작아야 한다.
 - 2) P 및 P^{-1} 를 구하기가 쉬워야 하며 이의 計算에 추가되는 記憶容量이 적어야 한다.
- 이상의 條件을 만족하는 前處理行列을 택하는 方法으로는 SSOR法(Symmetric Successive Over-relaxation), ICCG法(Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method), JCG(Jacobi Conjugate Gradient Method)등 여러가지가 있으나 JCG法이 反復回數는 많지만 각 反復計算에서의 論理가 가장 간단하기 때문에 計算時間은 가장 짧은 것으로 알려져 있다. [7, 8] 이러한 JCG法은 S 이 對角要

㉞ 1 共軛勾配法の Algorithm

Table 1 Algorithm of Conjugate Gradient Method

```

a=a0:g=Sa-f:d=-g
A:b=Sd
e=gTg/dTb
a=a+ed:g=g+eb
IF(Convergence Criterion
  is Satisfied)RETURN
r=gTb/dTb
d=-g+rd
GO TO A
    
```

㉞ 2 JCG法の Algorithm

Table 2 Algorithm of JCG Method

```

a=a0:g=Sa-f
h=p-1g:d=-h:w=gTh
A:b=Sd
e=w/dTb
a=a+ed:g=g+eb
h=p-1g
IF(Convergence Criterion
  is Satisfied)RETURN
v=gTh
r=v/w:w=v
d=-h+rd
GO TO A
    
```

素만을 취한 行列을 前處理行列로 사용하는 方法으로서 Algorithm만을 간단히 표현하면 表 2와 같다. [7, 8]

3. Newton-Raphson法에 의한 非線形 磁界 解析

本 研究는 Newton-Raphson法에 의한 非線形 磁界 解析時 非線形 反復收斂式의 計算에 共軛勾配法의 適用 可能性을 檢討하기 위한 것이다. 이를 위해 가장 간단한 경우로서 單相 外鐵型 變壓器의 非線形 靜磁界를 有限要素法에 의해 解析한다. [12]

變壓器의 靜磁界 分布를 2次元의으로 解析하기 위하여

- 1) 入力電流密度 및 벡터포텐셜은 z軸 方向 成分만을 갖는다. 즉, $J = kJ_z$, $A = kA_z$ 이다.
- 2) 導體는 連續된 斷面積을 가지며, 電流密度는 一定하다.
- 3) 鐵心에서의 Hysteresis効果는 무시하며, 磁化特性은 面積을 갖지 않는 曲線이다.
- 4) 透磁率을 等方性이다.
- 5) 磁界는 準定常磁界로서 變位電流는 무시한다.

라고 假定하고 Maxwell의 電磁方程式으로부터 支配方程式을 구하면 式 (9)가 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (9)$$

단, $A = A_z$, $J = J_z$ 이며, ν 는 磁氣抵抗率이다. 또한 式(9)에 에너지 汎函數의 變分原理 및 1次三角要素를 사용한 有限要素法을 적용하면 要素 Matrix式 및 系方程式은 式(10) 및 (11)과 같이 구해진다.

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial A_i^e} \right\} = \frac{\nu^e}{4\Delta^e} \left[b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e \right] \left\{ A_i^e \right\} - \frac{J^e}{3} \left\{ 1 \right\} \quad (10)$$

$$Sa - f = 0 \quad (11)$$

여기서, Δ^e 는 要素 e 의 面積이며, b_i^e , c_i^e 는 $b_1^e = y_2^e - y_3^e$, $b_2^e = y_3^e - y_1^e$, $b_3^e = y_1^e - y_2^e$, $c_1^e = x_3^e - x_2^e$, $c_2^e = x_1^e - x_3^e$, $c_3^e = x_2^e - x_1^e$ 이고, S 는 $n \times n$, a 및 f 는 $n \times 1$ 行列이다. 단, n 은 全解析領域의 節點數이다. 그리고 各 要素에서의 磁束密度는

$$B^e = \sqrt{(B_x^e)^2 + (B_y^e)^2} \quad (12)$$

$$B_x^e = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\Delta^e} c_i^e A_i^e, \quad B_y^e = \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{2\Delta^e} b_i^e A_i^e$$

이다. [1]

式(11)을 Newton-Raphson法에 의해 풀기 위한 反復收斂式은 式(13)과 같다.

$$-\frac{\partial(S^{(k)}\mathbf{a}^{(k)})}{\partial\mathbf{a}^{(k)}}(\mathbf{a}^{(k+1)} - \mathbf{a}^{(k)}) = S^{(k)}\mathbf{a}^{(k)} - \mathbf{f} \quad (13)$$

또한 式(13)의 Jacobian 즉, $\frac{\partial S^{(k)}\mathbf{a}^{(k)}}{\partial\mathbf{a}^{(k)}}$ 는 各要素에 대한 Jacobian

$$\frac{\partial S_e^{(k)}\mathbf{a}_e^{(k)}}{\partial\mathbf{a}_e^{(k)}} = [S_{ij}^e]^k + \left[\frac{\partial\nu^e}{\partial A_j^e} \sum_{i=1}^3 S'_{ii}{}^e A_i^e \right] \quad (14)$$

을 全要素에 대하여 組合하면 구할 수 있다. 여기서 $S_{ij}^e = \frac{\nu^e}{4\Delta^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e)$ 이며, $S'_{ii}{}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e)$ 이다. 式(14)에서 右邊 둘째 項의 $\frac{\partial\nu^e}{\partial A_i^e}$ 는 式(12)로부터

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu^e}{\partial A_i^e} &= \frac{\partial\nu^e}{\partial B^e} \cdot \frac{\partial B^e}{\partial A_i^e} \quad (15) \\ &= \frac{c_i^e \sum_{j=1}^3 c_j^e A_j^e + b_i^e \sum_{j=1}^3 b_j^e A_j^e}{(2\Delta^e)^2 B^e} \cdot \frac{\partial\nu^e}{\partial B^e} \end{aligned}$$

가 된다. 그리고 磁性體의 ν - B 特性을 部分線型으로 近似化하면 ν^e 및 $\frac{\partial\nu^e}{\partial B^e}$ 는

$$\begin{aligned} \nu^e &= \nu_J + (\nu_{J+1} - \nu_J) (B^e - B_J) / (B_{J+1} - B_J) \\ \frac{\partial\nu^e}{\partial B^e} &= (\nu_{J+1} - \nu_J) / (B_{J+1} - B_J) \quad (16) \end{aligned}$$

와 같다. 여기서 J 는 $B_J < B^e \leq B_{J+1}$ 을 만족하는 磁性體의 近似 ν - B 特性의 Data번호이다. [12, 13]

Newton-Raphson法은 式(13)에 의해 구해진 解로부터 各要素의 磁束密度와 그에 해당되는 透磁率을 式(11)에 代入하여 成立할 때까지 反復計算하는 方法이다. 여기서 式(13)의 計算은 線形的으로 이루어지며, 지금까지는 주로 Cholesky法 등의 直接法을 適用했지만, 本 研究에서는 Jacobi-共軛勾配法을 適用한다. [4, 5]

4. 事例 研究

4.1 解析 모델 및 條件

앞에서 설명한 共軛勾配法을 Newton-Raphson法의 反復收斂式(13)에 適用하기 위하여 그림 1과

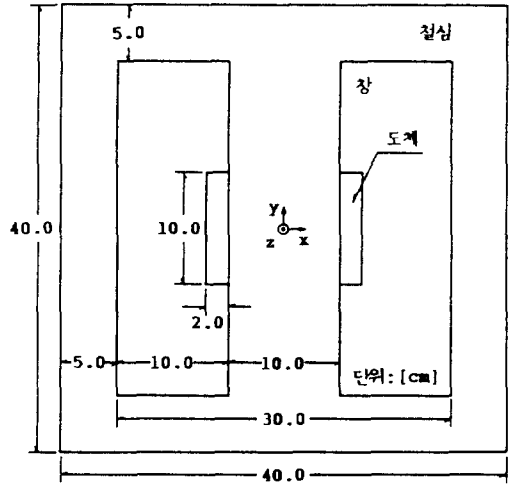


그림 1 解析 모델
Fig. 1 Analyzing Model

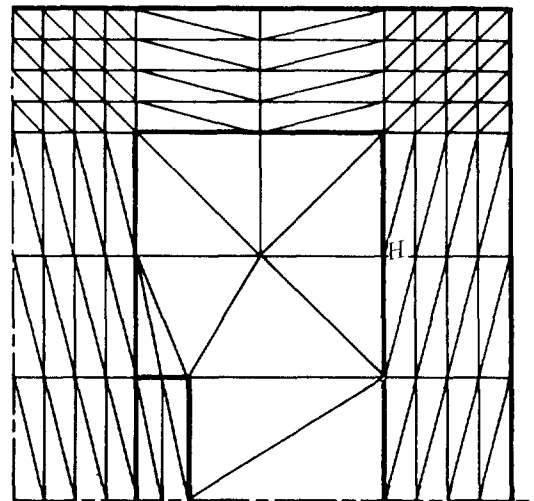


그림 2 要素分割圖
Fig. 2 Element Subdivision

같은 單相 外鐵型 變壓器 모델을 解析對象으로 택하였다.

解析領域은 對稱性을 고려하여 x - y 平面上의 第1象限에 해당되는 領域을 취했으며, 節點數의 變化에 따른 計算時間의 節減效果를 檢討하기 위하여 그림 2, 3과 같이 要素分割하였다. 여기서 要素數는 각각 143개, 374개이며, 節點數는 90개(未知 65개), 216개(未知 176개)이다.

境界條件으로는 $x=0$, $x=20$ [cm] 및 $y=20$ [cm]軸上에 Dirichlet條件($A=0$), $y=0$ 軸上에

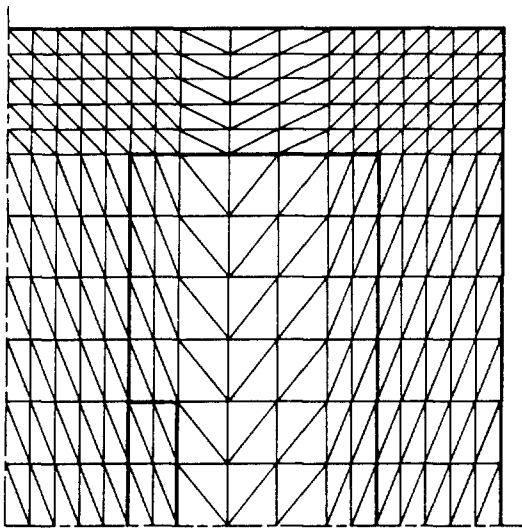


그림 3 요소분割圖 II
Fig. 3 Element Subdivision II

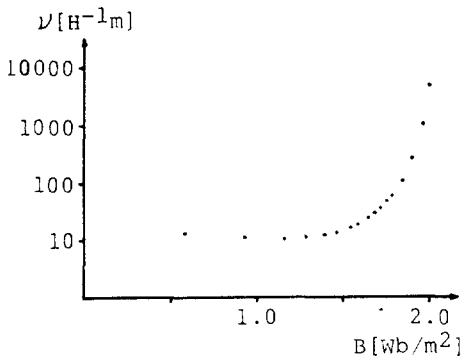


그림 4 鐵心의 ν-B特性
Fig. 4 ν-B characteristic of Core

Neumann條件($\frac{\partial A}{\partial n}=0$)을 주었다.

그리고 鐵心의 特性은 硅素鋼板 0.35[mm](製品名 Z8H)에 대한 것이며, 部分線形近似 區間數는 17개로서 그림 4와 같은 ν-B特性을 갖는다.

또한 入力電流密度는 10⁶[A/m²]로 하였다. 그리고 모든 反復過程에서의 收斂誤差는 Relative Euclidean Forcing Error Norm으로서 0.1[%] 이내로 하였으며, 사용 計算機는 IBM-PC/AT at 10 MHz이다.

4.2 解析結果 및 檢討

Newton-Raphson 反復收斂式(13)에서 Jacobian 은 對稱의 條件은 만족하지만 正定值가 되는지는

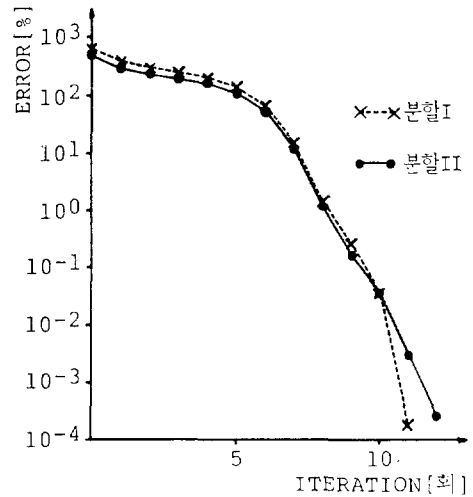


그림 5 非線形 收斂過程
Fig. 5 Procedure of Nonlinear Convergence

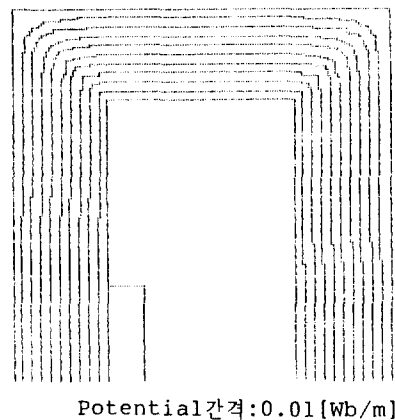


그림 6 磁束分布圖
Fig. 6 Flux Distribution Characteristics

數學的으로 證明할 수는 없었다. 그러나 共軛勾配法을 適用하여 計算한 結果 各 非線形 反復過程에서의 線形解가 發散하는 경우는 발견하지 못하였다.

本 解析 모델의 非線形 收斂過程은 그림 5와 같았으며, 그림 6은 非線形 收斂이 일어졌을 때의 磁束分布圖이다.

그리고 表 3, 4는 各 方法에 따른 計算時間, 使用容量을 나타낸 것이며, 그림 7은 反復法을 이용한 경우의 各 非線形 反復 Step에 있어서의 反復 計算回數를 나타낸 것이다.

이상의 解析 結果를 檢討해 보면

- 1) JCG法을 이용하면 容量의 增加는 무시할 수 있으면서도 計算時間의 節減效果는 매우 크

표 3 計算時間

Table 3 Computation Time

분할법	Method	Computation Time [sec]		
		Compile & Link	Run	Total
I	Cholesky	30.76	500.59	531.35
	S.O.R($\omega=1.8$)	31.91	462.63	494.54(93.07)
	J.C.G	32.24	373.82	406.06(76.42)
II	Cholesky	32.79	9859.24	9892.03
	S.O.R($\omega=1.8$)	33.26	8079.85	8113.11(82.02)
	J.C.G	34.03	4247.77	4281.80(43.29)

()는 Cholesky법에 대한 백분율

표 4 使用容量

Table 4 Used Memory Size

분할법	Method	사용 용량 (KByte)		
		Program	Memory	Total
I	Cholesky	74.6	47.09	121.69
	S.O.R($\omega=1.8$)	74.77	47.36	122.13(100.36)
	J.C.G	76.56	48.63	125.18(102.87)
II	Cholesky	108.85	221.95	330.8
	S.O.R($\omega=1.8$)	109.31	222.56	331.86(100.33)
	J.C.G	113.21	226.0	339.21(102.54)

()는 Cholesky법에 대한 백분율

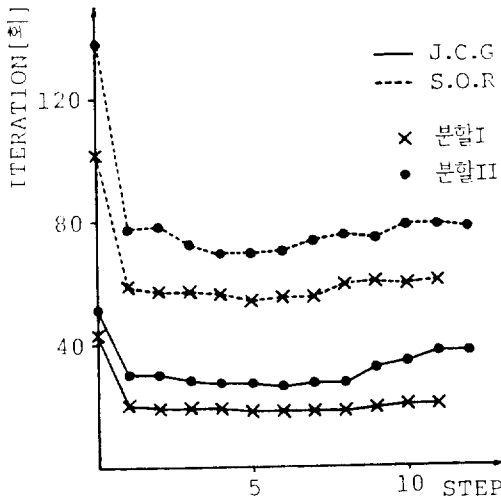


그림 7 反復法の 反復回數

Fig. 7 Iteration Numbers of J.C.G. and S.O.R. Method

다.

2) 그리고 이러한 計算時間의 節減效果는 未知數가 많아지면 많아질수록 즉, 精密演算을 위해 要素를 細分하면 할수록 더욱 增大된다.

3) 따라서 電氣機器의 Inductance計算이나 過渡場 解析등과 같이 매우 많은 回數의 非線形 收斂을 필요로 하는 解析時에는 本 研究에서 의 Algorithm이 매우 有用할 것이다.

라는 點들을 알 수 있다.

마지막으로, 非線形 反復式(13)에서의 Jacobian은 式(11)에서의 係數行列 S와 마찬가지로 Band性 및 Sparse性을 가지므로 既存의 Band Matrix나 Sparse Matrix의 演算 Algorithm을 本 研究에서 의 共軛勾配法에도 適用할 수 있을 것으로 생각되며, 그리하면 計算時間이 더욱 더 줄어들 것으로 기대된다. [2~6]

5. 結 論

本 研究는 Newton-Raphson法에 의해 非線形 磁氣의 特性을 解析할 경우의 計算時間의 節減을 위하여 線形 對稱 正定值 係數行列을 갖는 方程式에만 適用가능한 것으로 알려진 共軛勾配法을 非線形 反復收斂式의 計算에 適用한 것이다.

Jacobian이 正定值임을 數學的으로는 證明하지는 못하였으나, 適用 結果, 發散하는 경우는 생기지 않았으며, 使用容量의 增加는 무시할 수 있을 정도로 작으면서도 計算時間은 대폭 短縮되었다. 그리고 그 단축효과는 次元數가 많을 수록 더욱 크다는 點을 확인하여 이의 適用이 매우 有用함을 밝혔다.

앞으로 電氣機器의 過渡特性解析이나 Inductance計算등에의 適用이 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] 任 達鎬, “電氣系의 有限要素法,” 東明社, 1986.
- [2] P.P. Silvester, R.L. Ferrari, “Finite Elements for Electrical Engineers,” Cambridge Univ. Press, 1983.
- [3] 鷺津久一郎, 他, “有限要素法ハンドブック—I. 基礎編,” 培風館, 1981.
- [4] J.L. Morris, “Computational Methods in Elementary Numerical Analysis,” John Wiley & Sons, Ltd., 1983.
- [5] G.F. Carey, J.T. Oden, “Finite Elements: Computational Aspects(Vol. III),” Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [6] O. Axelsson, V.A. Barker, “Finite Element

Solution of Boundary Value Problems—Theory and Application,” Academic Press, Inc., 1984.

- [7] 名取 賣, 野寺 隆, “大規模行列計算における反復解法,” 情報処理, vol. 28, no. 11, pp. 1425~1459, 1987.
- [8] A. Jennings, G.M. Malik, “The Solution of Sparse Linear Equations by the Conjugate Gradient Method,” IJNME, vol. 12, pp. 141~158, 1978.
- [9] 朱 寛正, “有限要素 適應分割解析을 위한 先調整 共軛勾配法들의 比較研究,” 電算構造工學, vol. 1, no. 2, pp. 121~130, 1988.
- [10] 中田 高義, 藤原 耕二, “有限要素法で”用いら
- れる大次元マトリクスのICCG解法と問題點の検討, 静止器研究會資料, SA-84-55, pp. 55~64, 1984.
- [11] A. Jennings, “Matrix Computation for Engineers and Scientists,” John Wiley & Sons, Ltd., 1977.
- [12] 任 達鎬, 辛 興教, “電氣機器의 非線形 磁氣的 特性 解析 方法에 관한 研究,” 電氣學會論文誌, vol. 35, no. 3, pp. 102~107, 1986.
- [13] P. Silvester, M.V.K. Chari, “Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems,” IEEE Trans., vol. PAS-89, no. 7, pp. 1641~1651, 1970.