

WALSH函數의 接近에 의한 分布定數系의 파라메타 推定

An Approach to Walsh Functions for Parameter Estimation of Distributed Parameter Systems.

安斗守*·裴鍾一**
(Doo-Soo Ahn · Jong-Il Bal)

要 約

本 研究에서는 實系를 線形分布定數系로 모델링하고 線形分布定數系로 表現된 모델의 入·出力 데이터로부터 그 系의 内部構造를 決定하는 問題, 즉 系의 파라메타를 推定해 내는 問題에 關하여 研究하였다.

먼저 線形偏微分方程式으로 表現된 系를 두 變數에 對하여 連續적으로 積分을 取하여 積分方程式으로 變換하고 Walsh函數와 積分을 위한 Walsh演算行列을 導入하여 積分方程式을 簡單한 代數聯立方程式으로 부터 推定해 낼 수 있도록 하는 알고리즘을 開發하는데 目的이 있으며, 또한 高速 Walsh變換을 利用함으로써 實時間 데이터 處理에도 利用 可能함을 보였다.

Abstract- In this paper, we consider the problem of parameter estimation, i.e., defining the internal structure of a linear distributed parameter system from its input / output data. First, a linear partial differential equation describing the system is double-integrated with respect to two variables and then transformed into an integral equation. Next the Walsh Operation Matrix for Walsh functions and their integration are introduced to transform the integral equation into algebraic simultaneous equations. Finally, we develop an algorithm to estimate the parameters of the linear distributed parameter system from the simple linear algebraic simultaneous equations. It is also shown that our algorithm could be effective in real time data processing since it uses the Fast Walsh Transform.

1. 序 論

*正 會 員: 成均館大 工大 電氣工學科 教授·工博

**正 會 員: 釜山工業大 電氣工學科 助教授·工博

接受日字: 1989年 7月 10日

1次修正: 1990年 5月 16日

2次修正: 1990年 6月 26日

本 研究는 分布定數系의 파라메타 推定에 關한 研究로 2個의 變數로 나타나는 入·出力 데이터를 利用하여 시스템의 파라메타를 決定하기 위하여 Walsh函數의 接近 方法을 考察한다.

分布定數系는 시스템의 特性을 나타내는 狀態變數가 2個 以上の 獨立變數로 構成되어 시스템의 物理的 現象이 偏微方程式으로 記述되는 시스템을 말한다.

分布定數系의 解析 및 制御 等の 研究에 Walsh 函數, Block Pulse 函數, Laguerre 函數 等과 같은 直交函數가 널리 利用되고 있는데 偏微分方程式으로 記述되는 시스템 特性을 直交函數를 利用함으로써 線形代數聯立方程式에 의해 決定할 수 있는 점이 根據한다.

本 研究에서는 直交函數인 Walsh 函數의 特性을 利用하여 偏微分方程式으로 表現되는 分布定數系를 線形代數聯立方程式으로 變形하는 方法을 提示하고 最小自乘誤差法을 利用하여 分布定數系의 파라메타를 推定할 수 있는 알고리즘을 開發하고자 한다.

2. Walsh 函數에 의한 데이터 處理

2.1 Walsh 函數의 構成

Walsh 函數는 定義區間[0, 1]에서 ±1인 2個의 값만을 取하는 正規直交函數이며 $N=2^l$ 個의 完全集合(Complete set)을 이룬다.

이 函數는 다음과 같은 性質이 있다. [1]

$$\int_0^1 \text{WAL}(i,t) \text{WAL}(j,t) dt = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2-1)$$

이를 各 細部區間에 對하게 考慮하면 다음과 같다.

$$\sum_{t=0}^{N-1} \text{WAL}(i,t) \text{WAL}(j,t) = \begin{cases} N & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2-2)$$

$$\text{WAL}(i,m) = \text{WAL}(m,i) \quad (2-3)$$

式(2-3)은 Walsh 函數가 對稱特性을 보여준다.

Walsh 函數의 ordering 은 Sequency order, Dyadic order, Natural order의 세가지로 區別한다. [2]

Sequency order는 Fourier 級數와 比較될 수 있는데 Fourier 級數에서의 sine, cosine 函數들이 Sequency order의 홀수번째의 SAL과 짝수번째의 CAL에 各各 對應되며 스펙트럼分析이나 Filtering 等の 問題가 隨伴되는 通信이나 信號處理 等に 利用되고, Dyadic order는 Paley order라 하며 Rademacher 函數의 連續的인 곱에 의하여 얻어지며, Natural order는 Hadamard order라 하며

Hadamard 行列의 連續的인 Kronecker 곱에 의하여 얻어지고 計算上의 效率性때문에 시스템理論과 映像處理 等に 주로 應用된다. [3]

本 研究에 應用하는 order는 시스템理論에 많이 利用되고 있는 Paley order의 函數 [PAL(n,t)]이다.

2.2 離散Walsh 變換 및 係數決定

區間[0, 1) 사이에서 積分 可能한 函數 $X(t)$ 는 다음과 같은 Walsh 函數로 展開될 수 있다.

$$X(t) = X_0 \text{PAL}(0,t) + X_1 \text{PAL}(1,t) + X_2 \text{PAL}(2,t) + \dots + X_n \text{PAL}(n,t) \quad (2-4)$$

X_n 은 函數 $X(t)$ 를 Walsh 函數로 展開하였을 때 Walsh 函數의 係數이며 X_n 을 求하기 위하여 다음 式으로 주어지는 最小自乘誤差가 零이 되어야 한다.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [X(t) - \sum_{n=0}^m X_n \text{PAL}(n,t)]^2 dt = 0 \quad (2-5)$$

式(2-4)의 兩邊에 PAL(n,t)를 곱하고 式(2-5)를 滿足하도록 定義區間에 對하여 積分하면 係數는 다음과 같은 式으로 決定된다.

$$X_n = \int_0^1 \text{PAL}(n,t) X(t) dt \quad (2-6)$$

2個의 獨立變數의 函數 $X(z,t); z,t \in [0, 1)$ 를 생각해 보자.

$X(\vec{z},t)$ 는 2重Walsh 函數로 展開할 수 있다고 假定하면 다음과 같은 式으로 쓸 수 있다. [4]

$$X(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} X_{ij} \text{PAL}(i,z) \text{PAL}(j,t) \quad (2-7)$$

한편 PAL(0, z), PAL(1, z), PAL(2, z), ...는 Walsh 函數이고 變數 z 와 $X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11}, \dots$ 은 다음 式과 같은 2重Walsh 函數 展開式의 係數이다.

$$X_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 X(z,t) \text{PAL}(i,z) \text{PAL}(j,t) dt dz \quad (2-8)$$

$X(z,t)$ 의 近似値는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(z,t) &\cong \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} X_{ij} \text{PAL}(i,z) \text{PAL}(j,t) \\ &= \text{PAL}_M^T(z) X_{MN} \text{PAL}_N(t) \quad (2-9) \\ &= \text{PAL}_N^T(t) X_{MN} \text{PAL}_M(z) \quad (2-10) \end{aligned}$$

函數가 데이터로 주어졌을 때 Fourier 級數의 境遇와 마찬가지로 Walsh 函數도 다음과 같은 離散公式(Discrete formula)을 생각할 수 있다. [5]

$$X_k^* = \sum_{n=0}^{m-1} \text{PAL}_{kn} X_n \quad k=0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2-11)$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{m-1} \text{PAL}_{nk} X_k^* \frac{1}{m} \quad n=0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2-12)$$

$$\mathbf{X} = \text{PAL} \cdot \mathbf{X}^* \cdot \frac{1}{m} \quad (2-13)$$

여기서 **PAL**은 Walsh行列이다.

2.3 高速Walsh函數에 의한 데이터 處理

離散Walsh函數變換으로 부터 얻어진 式(2-13)의 係數 **X**는 **PAL**과 **X***의 곱에 의해서 算出되며 **PAL**은 ±1만을 取하는 行列이므로 信號흐름線圖로 圖示하고 그림 2-1과 같다.

그림에서 實線은 +, 點線은 -를 나타낸다.

$$\begin{aligned} X_0 &= X_0^* + X_1^* + X_2^* + X_3^* + X_4^* + X_5^* + X_6^* + X_7^* \\ X_1 &= X_0^* + X_1^* + X_2^* + X_3^* - X_4^* - X_5^* - X_6^* - X_7^* \\ X_2 &= X_0^* + X_1^* - X_2^* - X_3^* + X_4^* + X_5^* - X_6^* - X_7^* \\ X_3 &= X_0^* + X_1^* - X_2^* - X_3^* - X_4^* - X_5^* + X_6^* + X_7^* \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} X_4 &= X_0^* - X_1^* + X_2^* - X_3^* + X_4^* - X_5^* + X_6^* - X_7^* \\ X_5 &= X_0^* - X_1^* + X_2^* - X_3^* - X_4^* + X_5^* - X_6^* + X_7^* \\ X_6 &= X_0^* - X_1^* - X_2^* + X_3^* + X_4^* - X_5^* - X_6^* + X_7^* \\ X_7 &= X_0^* - X_1^* - X_2^* + X_3^* - X_4^* + X_5^* + X_6^* - X_7^* \end{aligned}$$

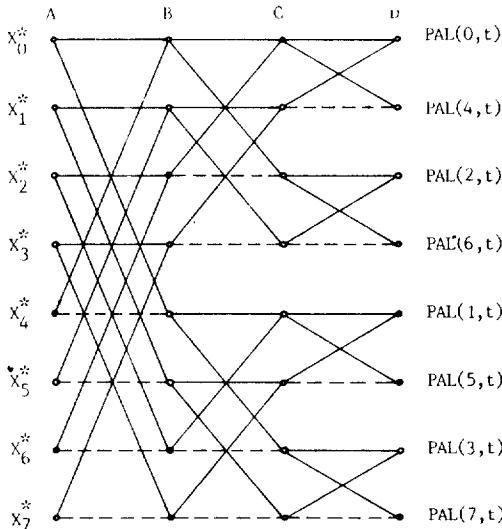


그림 2-1 Dyadic order 高速Walsh變換의 信號흐름線圖

Fig. 2-1 Signal flow graph of Dyadic order Fast Walsh Transform

이는 式(2-13)의 結果와 一致한다.

따라서 式(2-13)은 式(2-14)로 變形되며 Walsh函數의 特性인 函數가 ±1만을 取하는 점 때문이다.

이러한 變換을 高速Walsh變換[6]이라 한다.

實際로 式(2-13)을 直接 變換하려면 N^2 번의 곱셈演算과 $N(N-1)$ 번의 加減演算이 必要한데 比하여 高速演算을 利用하면 $N \log_2 N$ 번의 加減演算만으로도 쉽게 係數들을 求할 수 있게 된다.

以上的 關係는 2個의 變數를 取하는 任意的 函數에 對하여서도 擴張이 可能하다.

$X(z, t)$ 의 離散值를 X^*_{ij} 라 하고 이에 對한 係數를 X_{ij} 라 하면 다음과 같은 關係가 있다.

$$\mathbf{X}^*_{MN} = \text{PAL}_M \mathbf{X}_{MN} \text{PAL}_N \quad (2-15)$$

$$\mathbf{X}_{MN} = \frac{1}{M} \text{PAL}_M \mathbf{X}^*_{MN} \text{PAL}_N \frac{1}{N} \quad (2-16)$$

$$\mathbf{X}^*_{MN} = [X^*_{ij}], \quad \mathbf{X}_{MN} = [X_{ij}]$$

\mathbf{X}^*_{MN} 은 空間位置와 時間領域의 Walsh函數 定義區間 內에서 z 와 t 의 細部區間이 各各 M, N 個로 取하였을 때 $X(z, t)$ 의 離散值로 構成된 $M \times N$ 인 行列이고 X^*_{ij} 는 i 번째 점에서의 j 번째 時間에 對한 離散值이다.

式(2-15)와 式(2-16)은 2個의 變數를 取하므로 高速Walsh變換을 利用하려면 그림 2-1과 式(2-14)에서의 過程이 2번 必要하다.

먼저 變數 z 에 對하여 高速變換을 行하고 다음

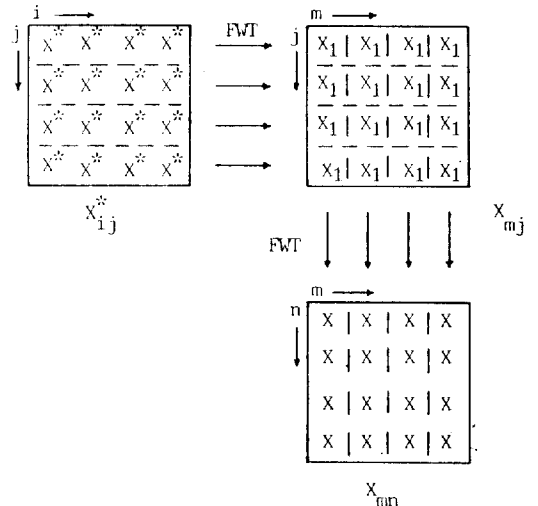


그림 2-2 2次元의 高速Walsh變換

Fig. 2-2 Two-dimensional Fast Walsh Transform.

으로 變數 t 에 對하여 高速變換을 行함으로써 2重 Walsh係數를 얻게 된다.

$$(1) X_{mj} = \sum_{i=0}^{M-1} X_{ij}^* \text{PAL}(n, i) \quad (2-17)$$

$$(2) X_{mn} = \sum_{j=0}^{N-1} X_{mj} \text{PAL}(m, j) \quad (2-18)$$

이 過程은 그림 2-2에 나타나 있다.

式(2-15)와 式(2-16)을 直接 計算하기 위해서는 $2N^3$ 번의 演算이 必要하지만 高速Walsh變換을 利用하면 $2N^2 \log_2 N$ 번의 演算만으로도 係數를 求할 수 있다.

2.4 積分을 위한 Walsh 演算行列

Walsh函數의 積分은 任意的 函數로 考慮될 수 있으므로 式(2-4)와 같이 Walsh函數로 다시 表現될 수 있다.[7]

$$\int \text{PAL}(k, t) dt = \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj} \text{PAL}(j, t) \quad (2-19)$$

이를 m 個의 Walsh函數로 有限級數 展開하고 벡터 形態로 表現하면 다음 式과 같다.

$$\int \text{PAL}(t) dt = P \cdot \text{PAL}(t) \quad (2-20)$$

Walsh函數를 v 번 積分하면 다음의 關係가 成立한다.

$$\int_0^t \dots \int_0^t \text{PAL}_N(t) dt = P_N \text{PAL}_N(t) \quad (2-21)$$

有限級數 展開된 式을 式(2-21)의 特性에 應用하면

$$\int_0^t \dots \int_0^t X_N^T \text{PAL}_N(t) dt^v = X_N^T P_N^v \text{PAL}_N(t) \quad (2-22)$$

따라서 式(2-4)를 積分하면 다음 式과 같이 된다.

$$\int X^T \text{PAL}(t) dt = X^T P \cdot \text{PAL}(t) \quad (2-23)$$

이러한 關係는 式(2-9)와 式(2-10)의 2重Walsh函數 展開에 擴張 適用이 可能하다.

z 에 關하여 u 번, t 에 關하여 v 번 積分을 取하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_n^z \dots \int_n^z \int_0^t \dots \int_0^t \text{PAL}_M^T(z) X_{MN} \text{PAL}_N(t) dt^v dz^u \\ = \text{PAL}_M^T(z) (P_M^T)^u X_{MN} P_N^v \text{PAL}_N(t) \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$= \text{PAL}_N^T(t) (P_N^T)^v X_{MN} P_M^u \text{PAL}_M(z) \quad (2-25)$$

3個 以上の 變數를 取하는 任意的 函數도

Walsh函數의 擴張 適用이 可能하며 積分을 위한 演算行列은 微分方程式으로 모델링된 系를 積分方程式으로 變換할 때 積分演算子로 利用될 수 있다.

3. 分布定數系의 파라메타 推定

3.1 分布定數系의 모델링

주어진 시스템에서 時間과 位置의 어느 하나의 狀態를 取하였을때 시스템의 狀態變數들은 測定하는 時間이나 推定하는 位置에 따라 다른값이 되므로 狀態變數는 時間과 位置의 函數가 된다.

이러한 系를 分布定數系라 하며 그 狀態가 任意的 한 位置에 對한 代表的인 狀態이고, 그 位置에 對한 情報도 다른 位置에 對한 情報를 充分히 알 수 있다고 看做하여 處理하면 狀態變數는 時間만의 函數가 되고 이때의 系는 集中定數系가 된다.

그러나 한 位置에 對한 情報로 다른 位置에 對한 情報를 充分히 알 수 없다고 하면 그 系는 集中定數系로 處理될 수 없다.

本 研究에서는 2重Walsh函數를 導入하여 2個의 變數를 取하는 入·出力의 關係로부터 시스템의 內部構造를 決定하는 分布定數系의 推定에 關하여 研究하고자 한다.

分布定數系의 推定은 여러가지 方法으로 理解될 수 있지만 다음과 같은 몇가지 定義로 부터 出發하는게 重要하다.

(1) 系의 파라메타 推定은 샘플값인 入·出力 데이터를 利用하여 實系에 對應되는 數學的인 모델에서 未知의 파라메타들을 決定하는 問題이다.

그러나 모델의 出力이나 實系의 入力은 아날로그 入力에 對한 函數이기 때문에 願하는 動作條件의 全 範圍에 걸쳐 모델의 出力이 實系의 出力에 密接하게 接近될 수 있어야 한다.

(2) 分布定數系는 空間位置와 時間領域에 對한 2個의 獨立變數를 取하는 系이다.

(3) 파라메타들은 函數나 常數 혹은 從屬變數로 表現될 수도 있지만 數學的인 모델에서는 파라메타가 어떠한 形態로 表現되는가가 明白히 나타나야 한다.

3.2. Walsh函數 適用

3.2.1 1階 分布定數系

다음 式과 같은 1階 偏微分方程式 모델로 表現되는 線形分布定數系를 考慮해보자.

$$a_2 \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial X(z,t)}{\partial z} + a_0 X(z,t) = U(z,t) \quad (3-1)$$

a_2, a_1, a_0 는 未知의 파라메타이고 $U(z,t)$ 는 入力, $X(z,t)$ 는 出力이다.

式(3-1)로 주어진 分布定數系에 Walsh函數를 導入하여 未知의 파라메타들을 決定하기 위하여서는 導函數를 消去하여 積分方程式 形態로 變換해야 한다.

現位置, 現時點에서 式(3-1)을 z 와 t 에 關하여 各各 1번 積分하면 다음과 같은 式이 된다.

$$\begin{aligned} & a_2 \int_0^z X(z,t) dz + a_1 \int_0^t X(z,t) dt + a_0 \int_0^z \int_0^t \\ & X(z,t) dt dz - a_2 \int_0^z X(z,0) dz - a_1 \int_0^t X(0,t) dt \\ & = \int_0^z \int_0^t U(z,t) dt dz \end{aligned} \quad (3-2)$$

여기서 $X(z,0)$ 와 $X(0,t)$ 는 各各 未知의 初期條件과 境界條件이다.

集中定數系의 境遇에 있어서 初期條件은 常數값을 갖고 積分 後 나타나며 分布定數系의 境遇는 初期條件과 境界條件이 各各 時間과 位置의 函數처럼 나타난다.

파라메타 推定問題는 a_2, a_1, a_0 의 決定뿐만 아니라 初期條件과 境界條件 즉 $X(z,0)$ 와 $X(0,t)$ 를 包含하며 初期 및 境界條件을 決定하기 위하여 有限 Walsh函數에 의한 近似值를 求해야 한다.

$$X(z,0) = \sum_{i=0}^{q-1} b_i \text{PAL}(i,z) = \mathbf{b}_q^T \text{PAL}_q(z) \quad (q \leq M) \quad (3-3)$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1} b_i \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{E}_{i+1,1} \text{PAL}_N(t)$$

$$\begin{aligned} X(0,t) &= \sum_{j=0}^{r-1} c_j \text{PAL}(j,t) = \mathbf{C}_r^T \text{PAL}_r(t) \quad (r \leq N) \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} c_j \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{E}_{1,j+1} \text{PAL}_N(t) \end{aligned} \quad (3-4)$$

여기서 $E_{i,j}$ 는 i, j 번째 單一要素만을 1인 값을 取하고 나머지는 모두 0인 $M \times N$ 行列이다.

b_0, b_1, \dots, b_{q-1} 과 c_0, c_1, \dots, c_{r-1} 이 決定될 때 $X(z,0)$ 와 $X(0,t)$ 는 各各 式(3-3)과 式(3-4)에서 大略의 求할 수 있다.

入·出力 信號를 2重Walsh函數로 展開하면 式(2-9)부터 式(2-13)까지 提示된 것 처럼 다음과 같다.

$$U(z,t) = \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{U}_{MN} \text{PAL}_N(t) \quad (3-5)$$

$$X(z,t) = \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{X}_{MN} \text{PAL}_N(t) \quad (3-6)$$

한편 式(2-23)과 式(2-24)를 利用하여 式(3-3)부터 式(3-6)까지를 式(3-2)에 代入하면 다음 式과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{PAL}_M^T(z) [a_2 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} + a_1 \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N + a_0 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N - \\ & a_2 \sum_{i=0}^{q-1} b_i \mathbf{P}_M^T \mathbf{E}_{i+1,1} - a_1 \sum_{j=0}^{r-1} c_j \mathbf{E}_{1,j+1} \mathbf{P}_N] \text{PAL}_N(t) \\ & = \text{PAL}_M^T(z) [\mathbf{P}_M^T \mathbf{U}_{MN} \mathbf{P}_N] \text{PAL}_N(t) \end{aligned} \quad (3-7)$$

兩邊에 나타나는 Walsh函數를 消去하기 위하여 式(3-7)의 兩邊에 $\text{PAL}(i,z), \text{PAL}(j,t), i=0, 1, 2, \dots, M-1, j=0, 1, 2, \dots, N-1$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & a_2 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} + a_1 \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N + a_0 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N \\ & + \sum_{i=0}^{q-1} \bar{b}_i \mathbf{P}_M^T \mathbf{E}_{i+1,1} + \sum_{j=0}^{r-1} \bar{c}_j \mathbf{E}_{1,j+1} \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_M^T \mathbf{U}_{MN} \mathbf{P}_N \end{aligned} \quad (3-8)$$

여기서 $\bar{b}_i = -a_2 b_i, \bar{c}_j = -a_1 c_j$ 이다.

式(3-8)은 다음 式과 같이 쓴다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{A} \theta = \mathbf{h} \quad (3-9) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN})_1 & (\mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_1 & (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN})_N & (\mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_N & (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_N & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ (\mathbf{P}_M^T \mathbf{E}_{q,1})_1 & (\mathbf{E}_{1,1} \mathbf{P}_N)_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ (\mathbf{P}_M^T \mathbf{E}_{q,1})_N & (\mathbf{E}_{1,1} \mathbf{P}_N)_N & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ \theta &= \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_M^T \mathbf{U}_{MN} \mathbf{P}_N)_1 \\ (\mathbf{P}_M^T \mathbf{U}_{MN} \mathbf{P}_N)_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{h} &= (a_2, a_1, a_0, \bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{q-1}, \bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{r-1}) \\ & (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN})_i, (\mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_i, (\mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N)_i, \dots \end{aligned}$$

等은 對應行列의 i 번째 列을 나타낸다.

式(3-9)는 未知의 $(3+q+r)$ 과 方程式의 數 MN 을 包含하는 線形系의 方程式이다. 式(3-9)로부터 θ 를 決定하기 위하여 方程式의 數는 적어도 未知數와 같거나 커도록 入·出力 데이터를 利用해야 한다.

다시말해서 M 과 N 이 充分히 커야 한다.

式(3-9)는 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 가 可逆變換할 수 있다면 最小自乘法에 의하여 未知의 파라메타들이 決定된다. [8]

$$\theta^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{h} \quad (3-10)$$

解 θ^* 는 a_2, a_1, a_0 의 값이 算出되어지는 한편 Walsh係數 b_0, b_1, \dots, b_{q-1} 과 c_0, c_1, \dots, c_{r-1} 은 $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ 라면 $b_i = -\bar{b}_i / a_2, c_j = -\bar{c}_j / a_1$ 의 關係로부터

求할 수 있다. b_0, b_1, \dots, b_{q-1} 과 c_0, c_1, \dots, c_{r-1} 이 결정될 때, $X(z, 0)$ 와 $X(0, t)$ 는 각각 식(3-3)과 식(3-4)에 의하여推定한다.

3.2.2 2階 分布定數系

다음과 같이 2階 偏微分方程式 모델로 表現되는 線形分布定數系를 考慮해 보자.

$$a_5 \frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial X(z, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial X(z, t)}{\partial z} + a_0 X(z, t) = U(z, t) \quad (3-11)$$

式(3-11)을 推定하기 위하여 앞節을 應用하여, z 와 t 에 關하여 各各 2번 積分하면 다음 式과 같다.

$$\begin{aligned} & a_5 \int_0^z \int_0^z X(z, t) dz dz + a_4 \int_0^z \int_0^t X(z, t) dt dz \\ & + a_3 \int_0^t \int_0^t X(z, t) dt dt + a_2 \int_0^z \int_0^z \int_0^t X(z, t) dt dz dz \\ & + a_1 \int_0^z \int_0^t \int_0^t X(z, t) dt dt dz + a_0 \int_0^z \int_0^z \int_0^t \int_0^t X(z, t) dt dt dz dz \\ & + \int_0^z \int_0^z \int_0^t g(z) dt dz dz + \int_0^z \int_0^t v(t) dt dz dz + \int_0^z \int_0^z \int_0^t f(z) dt dz dz - a_5 \int_0^z \int_0^z x(z, 0) dz dz \\ & - a_3 \int_0^t \int_0^t x(0, t) dt dt = \int_0^z \int_0^z \int_0^t U(z, t) dt dt dz dz \quad (3-12) \end{aligned}$$

$$g(z) = -a_5 \left[\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right]_{t=0} - a_2 X(z, 0) \quad (3-13)$$

$$f(z) = -a_4 \left[\frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \right]_{t=0} \quad (3-14)$$

$$v(t) = -a_3 \left[\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right]_{z=0} - a_1 X(0, t) - a_4 \left[\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right]_{z=0} \quad (3-15)$$

파라메타 推定問題는 $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ 와 初期 및 境界條件 $g(z), f(z), v(t), X(z, 0), X(0, t)$ 를 決定하는데 있다.

이것을 위하여 1階 分布定數系의 境遇와 같은 方法으로 進行한다.

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{i=0}^{p-1} g_i \text{PAL}(i, z) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} g_i \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{E}_{i+1,1} \text{PAL}_N(t) \quad (p \leq M) \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i=0}^{q-1} f_i \text{PAL}(i, z) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} f_i \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{E}_{i+1,1} \text{PAL}_N(t), (\delta \leq M) \end{aligned} \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{j=0}^{r-1} v_j \text{PAL}(j, t) \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} v_j \text{PAL}_M^T(z) \mathbf{E}_{1,j+1} \text{PAL}_N(t), (r \leq M) \end{aligned} \quad (3-18)$$

式(3-3)부터 式(3-6)까지와 式(3-16)부터 式(3-18)까지를 式(3-12)에 代入하고 兩邊에 $\text{PAL}(i, z), \text{PAL}(j, t), i=0, 1, \dots, M-1, j=0, 1, \dots, N-1$ 를 곱하여 Walsh函數와 같은 係數를 나타내기 위하여서는 다음 式과 같다.

$$\begin{aligned} & a_5 (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{X}_{MN} + a_4 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N + a_3 \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N^2 \\ & + a_2 (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N + a_1 \mathbf{P}_M^T \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N^2 \\ & + a_0 (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{X}_{MN} \mathbf{P}_N^2 + \sum_{i=0}^{p-1} g_i (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{E}_{i+1,1} \mathbf{P}_N + \\ & \sum_{j=0}^{r-1} v_j \mathbf{P}_M^T \mathbf{E}_{1,j+1} \mathbf{P}_N^2 + \sum_{i=0}^{\delta-1} f_i (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{E}_{i+1,1} \mathbf{P}_N + \sum_{i=0}^{q-1} \bar{b}_i (\mathbf{P}_M^T)^2 \mathbf{E}_{i+1,1} + \sum_{j=0}^{r-1} \bar{c}_j \mathbf{E}_{1,j+1} \mathbf{P}_N^2 = (\mathbf{P}_M^T) \mathbf{U}_{MN} \mathbf{P}_N^2 \end{aligned} \quad (3-19)$$

여기서 $\bar{b}_i = -a_5 b_i, \bar{c}_j = -a_3 c_j$ 이다. 式(3-19)는 式(3-10)과 같은 型式으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}\theta = \mathbf{h} \quad (3-20)$$

式(3-20)의 \mathbf{A} 와 \mathbf{h} 는 式(3-19)의 \mathbf{A}, \mathbf{h} 와 같은 構造이다.

$$\theta^T = (a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, g_0, \dots, g_{p-1}, f_0, \dots, f_{\delta-1}, v_0, \dots, v_{r-1}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{q-1}, \bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{r-1})$$

式(3-20)의 線形代數方程式은 未知의 $(6+p+r+\delta+q+r)$ 와 MN 의 方程式을 包含하고 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 가 可逆變換이 可能하다면 다음 式으로 부터 近似解 $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ 을 決定할 수 있다.

$$\theta^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{h} \quad (3-21)$$

Walsh函數 b_i 와 c_j 는 $b_i = -b_i / a_5$ 와 $c_j = -\bar{c}_j / a_3$ 의 關係로 부터 決定하고 式(3-3)과 式(3-4)에 各各 代入하여 $X(z, 0)$ 와 $X(0, t)$ 의 推定值를 求한다.

g_i, f_i, v_j 를 式(3-16), (3-17), (3-18)에 代入하면 $g(z), f(z), v(t)$ 의 推定值를 求할 수 있다. $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, X(z, 0), X(0, t), g(z), f(z), v(t)$

를 알고 있다면 初期條件 $[\partial X(z,t)/\partial t]_{t=0}$, $[\partial X(z,t)/\partial z]_{t=0}$ 와 境界條件 $[\partial X(z,t)/\partial z]_{z=0}$ 는 式(3-13), (3-14), (3-15)로 부터 쉽게 求할 수 있다.

4. 시뮬레이션

4.1 1階 分布定數系 適用 例

다음과 같이 入力과 出力이 주어진 1階 偏微分方程式으로 모델링되는 分布定數系를 考慮해 보자.

$$a_1 \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial X(z,t)}{\partial z} + a_3 X(z,t) = U(z,t) \tag{4-1}$$

$$\begin{aligned} X(z,0) &= 0, \quad X(0,t) = 0 \\ U(z,t) &= \pi z \cos(\pi t) + (3z+2) \sin(\pi t) \\ X(z,t) &= z \sin(\pi t) \end{aligned}$$

1階 偏微分方程式으로 表現된 모델이므로 z 와 t 에 대하여 各各 1번 積分을 取하여

$$a_1 \int (X(z,t) - X(z,0)) dz + a_2 \int (X(z,t) - X(0,t)) dt + a_3 \iint (X(z,t) dt dz) = \iint U(z,t) dt dz \tag{4-2}$$

Walsh函數의 特性을 導入하면 다음과 같은 代數 聯立方程式으로 變形된다.

$$a_1 P_M^T X_{MN} + a_2 X_{MN} P_N + a_3 P_M^T X_{MN} P_N = P_M^T U_{MN} P_N \tag{4-3}$$

離散公式으로 부터 U_{MN} 과 X_{MN} 을 求할 수 있다.

$$U_{MN} = \frac{1}{M} \text{PAL}_M U^*_{MN} \text{PAL}_N \frac{1}{N} \tag{4-4}$$

$$X_{MN} = \frac{1}{M} \text{PAL}_M X^*_{MN} \text{PAL}_N \frac{1}{N} \tag{4-5}$$

式(4-3)에서 未知의 파라메타 a_1, a_2, a_3 에 대하여 推定하면

$$A_1 \theta_1 = h_1 \tag{4-6}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} (P_M^T X_{MN})_1 & (X_{MN} P_N)_1 & (P_M^T X_{MN} P_N)_1 \\ (P_M^T X_{MN})_2 & (X_{MN} P_N)_2 & (P_M^T X_{MN} P_N)_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} (P_M^T U_{MN} P_N)_1 \\ (P_M^T U_{MN} P_N)_2 \end{bmatrix}$$

$$P_M^T X_{MN} = \begin{bmatrix} 0.0937500 & 0.0000000 \\ -0.0625000 & 0.0000000 \end{bmatrix}$$

$$X_{MN} P_N = \begin{bmatrix} 0.1250000 & -0.0625000 \\ -0.0625000 & 0.0312500 \end{bmatrix}$$

$$P_M^T X_{MN} P_N = \begin{bmatrix} 0.0468750 & -0.0234374 \\ -0.0312500 & 0.0156250 \end{bmatrix}$$

$$P_M^T U_{MN} P_N = \begin{bmatrix} 0.4642565 & -0.1953129 \\ -0.2678376 & 0.1093752 \end{bmatrix}$$

式(4-6)은 다음과 같이 表現된다.

$$\begin{bmatrix} 0.0937501 & 0.1250000 & 0.0468750 \\ -0.0625000 & -0.0625000 & -0.0312500 \\ 0.0000000 & -0.065000 & -0.0234375 \\ 0.0000000 & 0.0312500 & 0.0156250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4642565 \\ -0.2678376 \\ -0.1953129 \\ 0.1093752 \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

式(4-6)에서 未知의 파라메타 a_1, a_2, a_3 를 推定하기 위하여 4個式 中 3個式만을 利用하면 되지만 式(4-7)은 未知數와 方程式이 不平衡하므로 正方形列을 求하기 위하여서는 $A_1^T A_1 \theta_1 = A_1^T h_1$ 에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0.0126953 & 0.0156250 & 0.0063477 \\ 0.0156250 & 0.0244141 & 0.0097656 \\ 0.0063477 & 0.0097656 & 0.0039673 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0602640 \\ 0.0869790 \\ 0.0347096 \end{bmatrix}$$

推定된 파라메타 a_1, a_2, a_3 는

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7853375 \\ 1.9994970 \\ 3.0012820 \end{bmatrix}$$

Walsh函數 展開項數를 各各 4個로 取하였을 때 結果는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9480619 \\ 2.0000080 \\ 2.9999700 \end{bmatrix}$$

그림 4-1은 適用項數를 $M=4, N=4$ 로 取했을 때 推定值에 對한 出力과 파라메타 實際값에 對한 出力을 比較하였으며 Walsh函數의 適用項數를 增加시키면 原函數에 더욱 近接하게 收斂된다.

4.2 2階의 分布定數系 適用 例

다음과 같이 2階 偏微分方程式으로 모델링되는 分布定數系를 考慮해 보자.

$$a_1 \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 X(z,t)}{\partial z^2} + a_3 X(z,t) + U(z,t) \tag{4-8}$$

$$X(z,0)=0, X(0,t)=0$$

$$\frac{\partial X(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = t \cdot \exp(-t)$$

$$U(z,t) = (1-2t)\exp(-t)\sin(z) + z(1-t)\sin(z) - 4t\cos(z)$$

$$X(z,t) = t(\exp(-t) + z)\sin(z)$$

入·出力의 데이터를 利用하여 未知의 파라메타를 推定하는 問題를 생각해 보면 式(4-8)은 2階 偏微分方程式이므로 積分方程式으로 變換할려면 z 에 對하여 2번, t 에 關하여 1번 積分을 取하고

$$a_1 \iint (X(z,t) - X(z,0)) dz^2 = a_2 \int (X(z,t) - \int \frac{\partial X(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} dz - X(0,t)) dt + a_3 \iiint X(z,t) dt dz^2$$

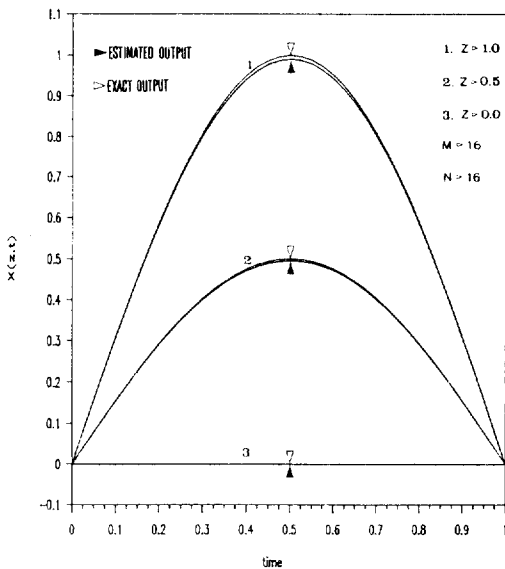


그림 4-1 適用 例1의 1階 分布定數系에 對한 出力
Fig. 4-1 Output of first-order DPS in Examlle 1.

$$+ \iiint U(z,t) dt dz^2 \tag{4-9}$$

Walsh函數의 特性을 導入하면 다음과 같은 代數 聯立方程式으로 變形된다.

$$a_1 (P_M^T)^2 = a^2 (P_M^T X_{MN} P_N - \sum_{j=0}^{r-1} V_j P_M^T E_{1,j+1} P_N) + a_3 (P_M^T)^2 X_{MN} P_N + (P_M^T)^2 U_{MN} P_N \tag{4-10}$$

파라메타 a_1, a_2, a_3 에 對하여 推定하면

$$A_2 \theta_2 = h_2 \tag{4-11}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -P_M^T X_{MN} P_N + \sum_{j=0}^{r-1} V_j E_{1,j+1} P_N]_1 \\ [(P_M^T)^2 X_{MN}]_1 \\ [(P_M^T)^2 X_{MN}]_2 \\ \vdots \\ [(P_M^T)^2 X_{MN}]_N \\ [-P_M^T X_{MN} P_N + \sum_{j=0}^{r-1} V_j E_{1,j+1} P_N]_2 \\ \vdots \\ [-P_M^T X_{MN} P_N + \sum_{j=0}^{r-1} V_j E_{1,j+1} P_N]_N \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} [(P_M^T)^2 U_{MN} P_N]_1 \\ [(P_M^T)^2 U_{MN} P_N]_2 \\ \vdots \\ [(P_M^T)^2 U_{MN} P_N]_N \end{bmatrix}$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

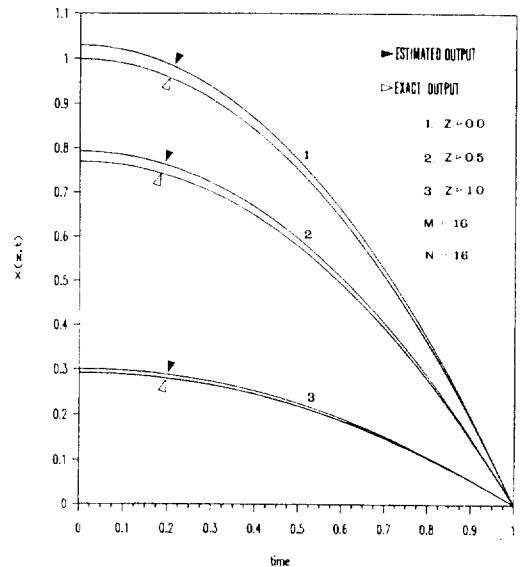


그림 4-2 適用 例2의 2階 分布定數系에 對한 出力
Fig. 4-2 Output of second-order DPS in Examlle 2.

표 1 通用例2에 대한 Walsh函數에 의한 2階 分布定數系의 파라메타 推定值

Table 1 Estimated parameter of second-order DPS via WF in Example 2.

파라메타 實際값 通用項數	a_1	a_2	a_3
	1	2	3
$M=8 \quad N=8$.1064034E+01	.1895738E+01	.3378966E+01
$M=8 \quad N=16$.1034182E+01	.1940042E+01	.3200218E+01
$M=16 \quad N=8$.1033914E+01	.1951363E+01	.3192729E+01
$M=16 \quad N=16$.1017153E+01	.1973791E+01	.3098796E+01

따라서 最小自乘法에 의한 未知의 파라메타는 다음과 같다.

$$\theta_2 = [A_2^T A_2]^{-1} A_2^T h_2 \quad (4-12)$$

通用項數를 M 과 N 으로 取했을때 推定된 파라메타 結果는 表 I 이고 $M=16, N=16$ 일 때 推定值에 對한 出力과 파라메타 實際값에 對한 出力은 그림 4-2이다.

5. 結 論

本 研究에서는 空間位置와 時間領域에 고루 分布되어 있는 分布定數系의 파라메타 推定을 하기 위하여 Walsh函數를 利用하여 入·出力의 關係로부터 시스템의 構造, 즉 未知의 파라메타를 實系에 가까운 構造를 推定할 수 있었으며 다음과 같은 結論을 얻었다.

空間位置와 時間領域에서 細部區間の 展開項數는 시스템 係數의 平衡을 考慮하여 약간의 誤差는 隨伴되지만 同一한 項數로 展開하는 것이 理想的이고 어떤 特定區間에서 位置나 時間에 對한 더욱 더 正確한 情報를 얻기 위하여서는 特定區間の 位置나 時間만의 展開項數를 增加시킴으로써 正確한 情報를 얻을 수 있었다.

데이터 處理는 加減演算만으로 行하였으며 FWT에 의하여 分布定數系의 未知의 파라메타를 推定했을 때 적은 데이터를 利用할 때도 빠르고 正確하게 分布定數系의 파라메타를 推定해 낼 수 있었다.

따라서 分布定數系의 解析이나 設計 등에 本 研究에서 提示된 알고리즘을 利用하면 보다 正確한 實系에 가까운 모델을 推定할 수 있을 것으로 思

料된다.

참 고 문 헌

- [1] K.R. Palanisamy, V.P. Arunachalam, "Analysis of vibrating system via single term Walsh series approach," Int. J. Syst. Sci.-18, 1457-, 1987.
- [2] W.A. Evanss, "Sine-Wave synthesis using Walsh functions," Proc. IEE-134, 1-, 1987.
- [3] E.V. Bohn, "Recursive expression for evaluating Walsh coefficients for linear dynamic systems," Int. J. Syst. Sci.-14, 673-, 1983.
- [4] B.H. Jansen, "Spectral decomposition of EEG interval using Walsh and Fourier transforms," IEEE Trans. BME-28, 836-, 1981.
- [5] I.R. Horng, S.J. Ho, "Discrete Walsh operational matrices for analysis and optimal control of linear systems," Int. J. Cont.-42, 1443-, 1985.
- [6] J.W. Manz, "A sequency ordered Fast Walsh Transform," IEEE Trans. AU-20, 204-205, 1972
- [7] G.P. Rao, "Extension of computation beyond limit of initial normal interval in Walsh series analysis of dynamic systems," IEEE Trans. AC-25, 317-, 1980.
- [8] G.B. Mahapatra, "Solution of optimal control problem of linear diffusion equations via Walsh functions," IEEE Trans. AC-25, 319-, 1980.