

〈論 文〉

일방향으로 배열된 단섬유 보강 복합재료의 탄성률 예측

임태원* · 권영두** · 황운봉*** · 한경섭***

(1989년 12월 14일 접수)

Prediction of Elastic Modulus of Unidirectional Short Fiber Composite Materials

Taewon Lim, Young Doo Kwon, Woonbong Hwang and Kyung Seop Han

Key Words: Unidirectional Short Fiber Composite(일방향으로 배열된 단섬유 보강 복합재료), Aggregate of Grains(입자들의 집합체), Strain Distribution(변형률 분포), Longitudinal Modulus(축방향 탄성률), Transverse Modulus(횡방향 탄성률)

Abstract

Elastic modulus of unidirectional short fiber composite has been theoretically derived with the consideration of Poisson's ratios of matrix and fiber. Unidirectional short fiber composite is modeled as an aggregate of grains developed by Kerner. Under the assumption of extra strain at fiber ends, the strain distribution along the fiber's length is determined, and the elastic modulus is derived from this distribution. For the consideration of effects of Poisson's ratio, Kerner's results for particulate composites are adapted as boundary conditions. The effect of differences in Poisson's ratio of fiber and matrix on elastic modulus is studied. Proposed equation shows a good agreement with experimental data of Halpin and Tock, et al.

기 호 설 명

E : 탄성률
 G : 강성률
 V_f : 부피비율
 $\bar{\epsilon}$: 평균 변형률
 L : 보강재 길이
 d : 보강재의 직경

ν : 프와송비
 ϵ : 변형률
 σ : 작용응력
 ΔL : 보강재 길이의 증가
 A, B, C, C', C^* : 미지수
11 : 축방향
22 : 횡방향
 p : 입자 보강 복합재료

하첨자

u : 상한치
 ℓ : 하한치
 f : 보강재
 m : 기지
 K : Bulk modulus

1. 서 론

최근 섬유강화복합재료는 우수한 비탄성률, 비강도 등의 기계적 성질로 말미암아 항공, 우주분야뿐만 아니라 다른 여러분야에서도 그 응용의 범위를 넓혀가고 있다. 그 중에서도 일방향으로 배열된 단섬유 강화 복합재료는 일반적인 복합재료의 장점, 양호한 방향성 그리고 장섬유 복합재료보다 개선된

*포항공과대학 기계공학과

**정회원, 경북대학교 공과대학 기계공학과

***정회원, 포항공과대학 기계공학과

연성과 가공성을 가지고 있기 때문에 많은 관심의 초점이 되고 있다. 그러나 단섬유 복합재료의 물리적, 기계적 성질은 보강재 길이의 변화와 보강재 끝부분과 기지간의 상호작용으로 인해, 아직 명확하게 밝혀지지 못하고 있다.

Nielsen과 Chen⁽¹⁾은 탄성학의 고전이론에 바탕을 둔 여러 이론식들로부터 무질서하게 배열된 복합재료의 탄성률을 계산하였다. Lee⁽²⁾는 일방향으로 배열된 단섬유 복합재료의 탄성률을 예측하기 위해 많은 실험들을 한 결과, 축방향 탄성률을 예측할 수 있는 반실험적인 이론을 제시하였다. Halpin⁽³⁾은 Hill⁽⁴⁾에 의해 제시된 self consistent micro-mechanics method를 기초로 하여 장섬유 복합재료의 탄성률 예측식과 같은 형태를 가진 단섬유 복합재료의 탄성률을 예측하는 관계식을 제시하였다. 그의 예측식은 보강재와 기지의 프와송비가 복합재료의 탄성률에 미치는 효과를 고려하지 않았음에도 가장 널리 사용되고 있다. 최근 들어서, Aboudi⁽⁵⁾는 일방향으로 배열된 복합재료의 탄성률을 연속체 이론을 통해 제시하였다. Termonia⁽⁶⁾는 컴퓨터 모델, finite difference 형태를 통해 역시 탄성률을 예측하고 보강재의 탄성률과 aspect ratio가 복합재료의 탄성률에 미치는 영향을 조사하였다.

본 연구에서는 (1) 보강재와 기지는 균일하고 선형적인 탄성거동을 한다. (2) 보강재와 기지는 내부 균열이 없는 재료이다. (3) 보강재와 기지간의 접합은 완벽하며, 보강재의 분산은 전체 복합재료를 통해 균일하다라는 가정하에서 단섬유 복합재료를 원통형 입자들의 집합체로 간주하여 탄성률 예측식을 제시하였다. 보강재의 길이가 복합재료의 탄성률에 미치는 영향을 고려하기 위해 보강재의 길이에 따른 변형률 분포를 가정하였다. 보강재와 기지의 프와송비의 영향은 Kerner⁽⁷⁾에 의해 제시된 입자 보강 복합재료의 탄성률 예측식을 경계조건으로 사용함으로써 고려하였다. 미지수를 결정하기 위한 다른 경계조건들로는 단섬유 복합재료의 탄성률의 상한값과 하한값을 사용하였다. 본 연구에서 제시된 탄성률 예측식의 타당성을 살펴보기 위해서 Halpin⁽³⁾과 Tock와 McMakins⁽⁸⁾의 실험결과를 이용하였다.

2. 실린더식 모델을 이용한 탄성률 예측

탄성률의 하한값과 상한값(lower and upper

bounds for Young's modulus)은 최소 에너지 법칙(minimum energy principle)으로써 결정 되어진다⁽⁹⁾. 일방향 단섬유 복합재료의 상한값은 minimum potential energy principle과 복합재료의 프와송비가 보강재와 기지의 프와송비와 같다는 가정하에 얻어질 수 있다. 이것은 보강재의 aspect ratio가 무한대로 접근할 때, 즉 장섬유 복합재료에서의 rule of mixture에 의해 얻어지는 탄성률과 같은 값을 가진다. 따라서 탄성률의 상한값, E_u 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$E_u = E_m \{1 + (R-1) V_f\} \quad (1)$$

여기서 E_f 와 E_m 은 각각 보강재와 기지의 탄성률, V_f 는 보강재의 부피비율 그리고 $R = E_f/E_m$ 을 나타낸다. 탄성률의 하한값 E_l 은 minimum complementary energy principle로부터 유도되어지는데 그 결과는 다음과 같다.

$$E_l = \frac{E_m}{1 + \frac{(1-R) V_f}{R}} \quad (2)$$

단섬유 복합재료는 원통형 입자들의 집합체(aggregate of grains)로 간주되어지고, 각 입자들은 보강재를 기지가 원통형으로 에워싸고 있는 실린더식 모델로써 가정한다.

복합재료내에서의 보강재 길이에 따른 변형률 분포는 Fig. 1에 나타난 것처럼 가정된다. 즉 보강재의 끝부분에서는 보강재 자체에 의한 변형 이외에 기지의 큰 변형에 의한 추가의 변형이 생긴다는 것이다. 따라서 변형률 분포는 다음과 같이 표현된다.

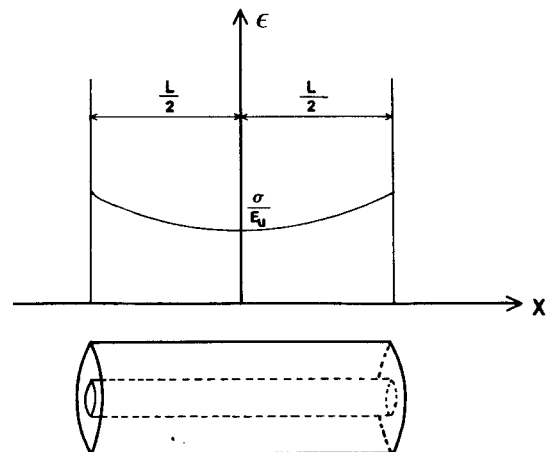


Fig. 1 Cylindrical model & strain distribution along fiber length

$$\varepsilon = \sigma \left\{ \frac{1}{E_u} + \frac{A}{(x+B)^2} \right\} \quad (3)$$

길이의 증가, ΔL 는

$$\Delta L = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \varepsilon \, dx = \sigma \left[\frac{L}{E_u} + \frac{2C}{1 + \frac{2B}{L}} \right] \quad (4)$$

여기서 σ : 작용응력
 L : 보강재의 길이
 A, B, C : 미지수

평균변형률 $\bar{\varepsilon}$ 은 $\frac{\Delta L}{L}$ 로 표현되는데,

$$\bar{\varepsilon} = \sigma \left[\frac{1}{E_u} + \frac{\frac{2C}{L}}{1 + \frac{2B}{L}} \right] \quad (5)$$

식 (5)로부터 축방향 탄성률(longitudinal modulus), E_{11} 은 다음과 같이 얻어진다.

$$E_{11} = \frac{E_u \left\{ 1 + \frac{2B}{L} \right\}}{1 + \frac{2B}{L} + \frac{2CE_u}{L}} \quad (6)$$

식 (6)에 있는 두 개의 미지수, B 와 C 를 결정하기 위해 경계조건을 이용하였다. 즉 보강재의 길이가 길어질수록(무한대가 될수록), 축방향 탄성률은 탄성률의 상한값으로 근접하고, 보강재의 길이가 짧아질수록(0에 접근할수록) 탄성률의 하한값으로 접근한다. 식 (6)으로부터 다음과 같은 관계가 얻어진다.

$$E_{11} \Big|_{L=0} = E_l = \frac{BE_u}{B + CE_u} = \frac{BE_u}{C^*} \quad (7)$$

$$B = \frac{C^* E_l}{E_u} = \frac{C^*}{R^*} \quad R^* = \frac{E_u}{E_l} \quad (8)$$

여기서 식 (7), (8)을 식 (6)에 대입하면,

$$E_{11} = E_l + \frac{E_u - E_l}{1 + \frac{2C^*}{L}} \quad (9)$$

이 되고, 편리상 $\frac{2C^*}{d}$ 를 C' 라 하면, 식 (9)는

$$\frac{E_{11}}{E_l} = 1 + \frac{\left(\frac{L}{d}\right)(R^* - 1)}{\left(\frac{L}{d}\right) + C'} \quad (10)$$

이 된다. 여기서 d 는 보강재의 직경이 되고, L/d 는 보강재의 aspect ratio이다.

식 (10)은 한 개의 미지수, C' 를 가지게 되는데, C' 를 결정해줌에 의해서 축방향 탄성률을 예측할 수 있게 된다. 입자 보강 복합재료의 탄성률, E_p 은 aspect ratio가 1인 복합재료의 축방향 탄성률과 일치한다는 가정을 통해, 미지수 C' 는 다음과 같

이 결정된다.

$$C' = \frac{R^* - 1}{\frac{E_p}{E_l} - 1} - 1 \quad (11)$$

입자 보강 복합재료의 탄성률은 Kerner가 제시한 결과에 의해 다음과 같이 나타내진다.

$$E_p = \frac{9K_p G_p}{(3K_p + G_p)} \quad (12)$$

여기서,

$$\frac{K_p}{K_m} = \frac{1 + \zeta_k \eta_k V_f}{1 - \eta_k V_f} \quad \frac{G_p}{G_m} = \frac{1 + \zeta_c \eta_c V_f}{1 - \eta_c V_f}$$

$$\zeta_k = \frac{2(1 - 1\nu_m)}{1 + \nu_m} \quad \eta_k = \frac{\left(\frac{K_f}{K_m}\right) - 1}{\left(\frac{K_f}{K_m}\right) + \zeta_k}$$

$$\zeta_c = \frac{7 - 5\nu_m}{8 - 10\nu_m} \quad \eta_c = \frac{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) - 1}{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) + \zeta_c}$$

K_f : 보강재의 bulk modulus

G_f : 보강재의 강성률

K_m : 기지의 bulk modulus

G_m : 기지의 강성률

ν_m : 기지의 프와송 비

미지수 C' 는 식 (1), (2) 그리고 (12)에 의해 결정되고, 이 값들은 보강재의 부피율과 보강재와 기지의 기계적 성질에 따라 좌우된다. 결정된 C' 값을 식 (10)에 대입함으로써 최종적인 일방향으로 배열된 단섬유 복합재료의 축방향 탄성률이 예측된다. 횡방향 탄성률, E_{22} 은 식 (10)에서 aspect ratio를 1로 함으로써 얻어지는데 그 결과는 다음과 같다.

$$E_{22} = E_l \left\{ 1 + \frac{R^* - 1}{C' + 1} \right\} \quad (13)$$

3. 고 찰

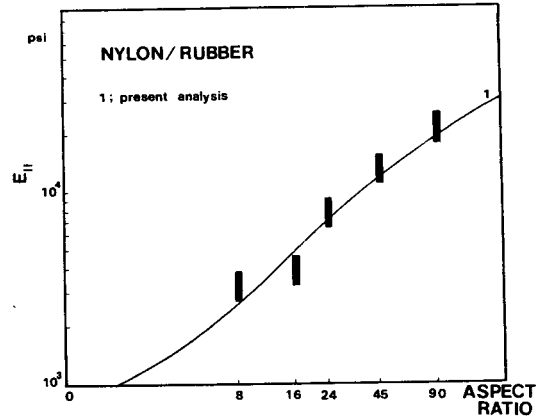
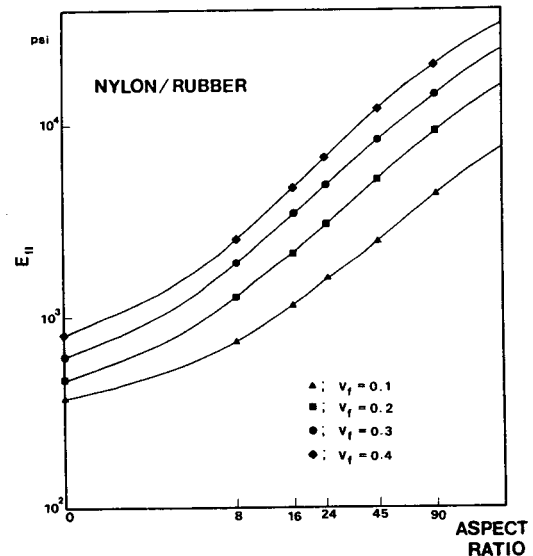
위의 과정을 통해, 보강재와 기지의 프와송 비를 고려하여 복합재료의 축방향 횡방향의 탄성률을 유도하였다. 위의 식 [식 (10), (13)]들을 이용하면, 보강재와 기지의 기계적 성질과 보강재의 부피비율과 aspect ratio로부터 일방향으로 배열된 단섬유 복합재료의 탄성률을 쉽게 예측할 수 있다. 본 연구에서 제시된 탄성률 예측식과 실험치를 비교하기 위해서 Halpin과 Tock 등의 실험결과를 이용하였다. Halpin은 나이론/고무 복합재료를, Tock 등은 E-glass/polycarbonate 복합재료를 사용하였고,

Table 1 Mechanical properties for example calculation

Fiber	Matrix
Nylon	Rubber
$E=2.92 \times 10^4 \text{psi}$	$E=300 \text{psi}$
$\nu=0.2$	$\nu=0.499$
$V_f=0.35$	
E-glass	Polycarbonate
$E=12 \times 10^6 \text{psi}$	$E=3.16 \times 10^5 \text{psi}$
$\nu=0.22$	
$V_f=0.3$	$\nu=0.35$
$l/d=313$	

각 성분들의 기계적 성질은 Table 1에 나타나 있다. Fig. 2는 보강재의 aspect ratio와 축방향 탄성률의 관계를 나타내주고 있다. 막대로 표시된 것이 실험치인데 이는 예측식 (식 (19))과 잘 일치함을 알 수 있다. 보강재의 부피비율이 변하여도 aspect ratio에 따른 축방향 탄성률의 변화는 유사한 경향을 가진다는 것을 Fig. 3을 통해 알 수 있다. Fig. 4는 Tock 등의 실험결과와 식 (10) 그리고 현재 널리 사용되고 있는 Halpin-Tsai식과의 관계를 나타내고 있다.

Fig. 4로부터 식 (10)과 Halpin-Tsai식은 축방향 탄성률을 실험치보다 크게 예측하고 횡방향 탄성률을 작게 예측함을 알 수 있다. 이렇게 이론치와 실험치가 서로 차이를 보이는 것은 보강재의 배열과 시편에 존재하는 불완전성(void나 보강재와 기지사이의 불완전한 접합등)에 기인한 것이라고 생각된다. 실제 Tock 등이 사용한 시편은 압출 공정에 의해 제조되었기 때문에 보강재의 배열이 약 20% 정도의 편차를 가지고 있다고 그들의 보고서에 언급되어 있고, 이론식은 배열이 완전한 일방향이라는 가정하에서 유도되었기 때문에 축방향 탄성률은 이론치가 실험치보다 크게 예측되고 횡방향 탄성률은 작게 예측되어진다고 생각된다. 보강재의 부피비율과 aspect ratio가 증가할수록 보강재 배열에 대한 편차는 보강재간의 상호 간섭작용에 의해 심해지므로 Fig. 4에서 보는 바와 같이 실험치와 이론치와의 차이는 보강재의 부피비에 따라 증가한다.

**Fig. 2** Young's modulus of unidirectional short fiber composite with various aspect ratio⁽¹⁾**Fig. 3** Effects of aspect ratio on Young's modulus of unidirectional short fiber composites with varying volume fractions

단섬유 복합재료의 탄성률 예측에 널리 사용되고 있는 Halpin-Tsai 식은 Kerner의 이론을 보강재와 기지의 프와송 비가 탄성률에 미치는 영향을 고려하지 않고 수정한 식이다. Kerner에 의해 제시된 입자 보강 복합재료의 탄성률을 미지수 C' 를 결정하기 위한 경계조건으로 사용하면, 탄성률에 대한 프와송 비의 영향이 고려되고 경계조건으로 Halpin-Tsai 식을 사용하면 프와송 비의 영향이 고려되지 않았다고 생각할 수 있다. 위 두 경우를

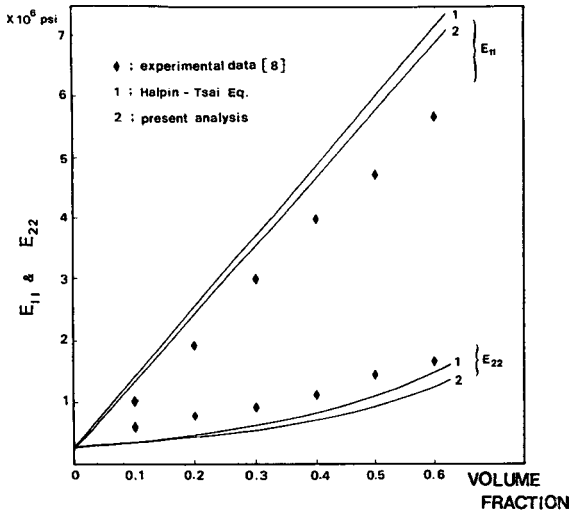


Fig. 4 Dependence of tensile modulus on volume fraction

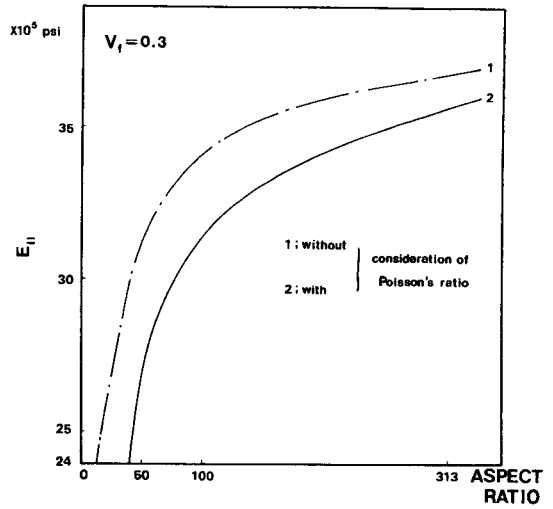


Fig. 5 Effects of Poisson's ratio on Young's modulus with varying aspect ratio at given volume fraction ($E_f = 12 \times 10^6$ psi, $E_m = 3.16 \times 10^5$ psi, $\nu_f = 0.22$, $\nu_m = 0.35$)

Table 2 Effects of Poisson's ratio on the prediction of Young's modulus

$E_f = 12 \times 10^6$ psi $E_m = 3.16 \times 10^5$ psi
 $\nu_f = 0.22$ $\nu_m = 0.35$ $\times 10^5$ psi

	$1/d \setminus V_f$	0.1	0.2	0.3	0.4
Without Consideration	50	11.96	21.19	30.99	41.58
	100	13.19	23.5	34.16	45.29
	313	14.26	25.46	36.78	48.28
With Consideration	50	10.47	18.45	26.92	36.56
	100	12.13	21.61	31.45	42.04
	313	13.8	24.68	35.7	47.01

비교한 것이 Table 2에 나타나 있는데, 프와송 비의 영향을 고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다 탄성률을 작게 예측함을 알 수 있다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 보강재의 aspect ratio가 증가할수록 프와송 비의 영향을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 탄성률의 차이가 감소하는데, 이는 aspect ratio가 탄성률에 미치는 영향이 프와송 비의 영향보다 커서 탄성률의 차이가 적어진다고 해석할 수 있다. 또 보강재의 부피비율이 증가함에 따라 탄성률의 차이(탄성률의 감소량)는 증가하

Table 3 Dependence of the longitudinal Young's modulus on the difference in Poisson's ratio of fiber and matrix

$\nu_f = 0.22$, various ν_m $\times 10^5$ psi

$1/d$	$\nu_m \setminus V_f$	0.1	0.2	0.3	0.4
50	0.22	10.41	18.18	26.64	35.77
	0.35	10.47	18.45	26.92	36.56
	0.45	10.96	19.40	28.54	38.32
100	0.22	12.1	21.40	31.22	41.49
	0.35	12.13	21.61	31.45	42.04
	0.45	12.5	22.30	32.56	43.22
313	0.22	13.79	21.59	35.59	46.87
	0.35	13.8	24.68	35.70	47.01
	0.45	13.97	24.98	36.15	47.49

감소율은 일정함을 알 수 있다. (Fig. 4) 보강재와 기지의 프와송 비의 차이가 탄성률에 미치는 영향을 본 연구에서 제시된 예측식을 사용하여 알아볼 수 있는데 그 결과는 Table 3과 Fig. 6에 잘 나타나 있다. 이 계산에 이용된 가상 복합재료의 기계

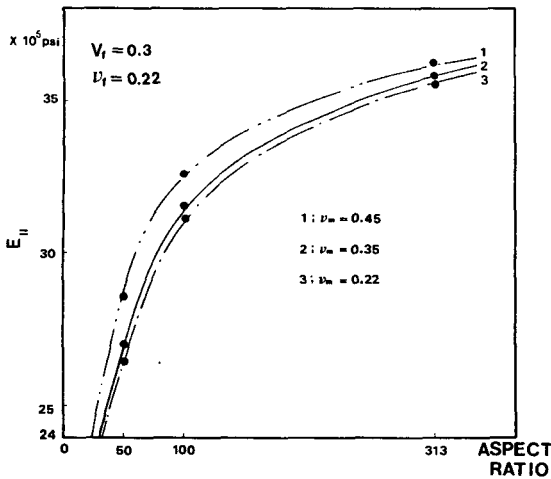


Fig. 6 Effects of the aspect ratio on changes Young's modulus due to difference in Poisson's ratio of constituents of given volume fraction ($E_f = 12 \times 10^6$ psi, $E_m = 3.16 \times 10^6$ psi)

적 성질은 Table 1에 나타나 있는 E-glass/polycarbonate 복합재료와 같고, 다만 프와송 비의 차이만을 주기 위하여 보강재의 프와송 비의 0.22로 기지의 프와송 비는 0.22, 0.35, 0.45로 하였다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 프와송 비의 차이가 클수록 탄성률은 증가하는데, 이는 프와송 비의 차이가 보강재와 기지의 계면에서 변형에 대한 간섭현상을 유발시키는데 기인한다고 생각된다. 그리고 프와송 비의 영향과 마찬가지로 프와송 비 차이의 영향도 같은 이유로 aspect ratio가 증가함에 따라 감소하는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

(1) 일방향으로 배열된 단섬유 복합재료의 탄성률을 보강재와 기지의 프와송 비의 영향을 고려하여 이론적으로 예측하였다.

(2) 본 연구에서 제시된 탄성률 예측식 (10)은 실험결과와 양호한 일치율을 보여준다.

(3) 식 (10)을 이용하여 보강재와 기지의 프와송 비가 탄성률에 미치는 영향과 프와송 비의 차이가 미치는 영향을 단편적이거나 알아볼 수 있다.

(4) 보강재 배열의 편차는 축방향 탄성률을 감소시키고 횡방향 탄성률은 증가시킨다.

參 考 文 獻

- (1) Nielsen, L.E. and Chen, P.E., 1968, "Young's Modulus of Composite Filled with Randomly Oriented Fibers", J. of Mat'ls, JMLSA, Vol. 3, No. 2, pp. 352~358.
- (2) Lee, J.K., 1968, "A Study of the Tensile Modulus of Short Fiber Reinforced Plastics", Pol. Eng. & Sci., Vol. 8, No. 3, pp. 186~194.
- (3) Halpin, J.C., 1969, "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites", J. of Comp. Mat'ls, Vol. 3, pp. 732~734.
- (4) Hill, R., 1964, "Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Materials", J. of Mech. Phys. Solids., Vol. 12, pp. 199~213.
- (5) Aboudi, J., 1983, "The Effective Moduli of Short Fiber Composites", Int. J. Solids Structure, Vol. 19, No. 8, pp. 693~707.
- (6) Termonia, Y., 1987, "Computer Model for the Elastic Properties of Short Fiber and Particulate Filled Polymers", J. of Mat'l Sci. Vol. 22, pp. 1733~1736.
- (7) Kerner, E.H., 1956, "The Elastic and Thermo-Elastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. London, Vol. 69, B, p. 808.
- (8) Tock, R.W. and McMackins, D.E., "Experimental Studies of the Tensile Properties of Discontinuous Fiber Reinforced Plastics", Monsanto/Washington U. ONR/ARPA. Assoc. Report HPC, pp. 69~97.
- (9) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill Book Co., pp. 99~106.