

〈論 文〉

## 불규칙 교란을 받는 비행체에 장착된 비선형 시스템의 난진동 해석

허 훈\* · 구 제 선\*\*

(1990년 3월 3일 접수)

### Analysis on Random Vibration of a Non-Linear System in Flying Vehicle due to Stochastic Disturbances

Hoon Heo and Je Sun Gu

**Key Words :** Nonlinear Random System(비선형 불규칙 시스템), Stochastic Simulation(확률론적 모사), Stochastic Equivalent Linearization(확률론적 등가 선형화), Coloured Noise Random Process(유색잡음 불규칙 과정), Atmospheric Turbulence(대기 난류), Power Spectral Density(파워스펙트럼 밀도), Band Limited White Noise Random Process(단역 백색 잡음 불규칙 과정)

#### Abstract

Dynamic behaviour of point tracking system mounted on flying vehicle shaking in a random manner is investigated and the system dynamic is represented by nonlinear stochastic equations. 2-D.O.F. nonlinear stochastic equations are successfully transformed to linear stochastic equations via equivalent linearization procedure in stochastic sense. Newly developed hybrid technique is used to obtain response statistics of the system under non-white random excitation, which is proved to be remarkably accurate one by performing stochastic simulation

#### 1. 서 론

대기중을 비행중인 항공기는 폭발이나 본질적으로 불규칙한 특성을 가진 대기의 난류 등에 노출되는 등 극심한 환경에서 운용되고 있다. 이러한 상황은 1950년대부터 항공기 설계가들의 관심을 끌어들였다<sup>(1~4)</sup>. 이들은 이러한 교란을 시스템해석에 적용할 수 있는 여러가지 형태의 불규칙 과정(stochastic process)으로 모델링하였다. 일반적으로 많은 연구에서 백색잡음 가정이 사용되어왔다.

항공기에서 운용되는 목표추적시스템(point

tracking system)은 현대 공중전에서 아주 중요한 임무를 수행하고 있다. 이러한 시스템의 정밀한 운용은 임무의 성공적인 수행에 필수적이라 하겠다.

대기중의 난류에 의해서 비행체가 가진을 받을 때 내부에 장착된 이 시스템은 고각, 방위각 방향으로 움직이며 비선형성이 계재되게 된다<sup>(5-6)</sup>. 이때 시스템의 동력학은 비선형 랜덤 방정식(non-linear random equation)으로 표현된다. 본 논문에서는 비선형 랜덤 동력학 문제를 풀기 위해서 확률론적 등가선형화 기법(stochastic equivalent linearization technique)을 사용하였다.

이 등가 선형화 방법(equivalent linearization technique)은 1940년대에 소개 되었다<sup>(6)</sup>. 또 이후에 이 방법은 일반화되고 랜덤 시스템에 적용되었

\* 정회원, 고려대학교 자연과학대학 제어계측공학과

\*\* 정회원, 충남대학교 대학원, 현재 국방과학연구소

다<sup>(9-13)</sup>. 본 연구에서는 확률론적 등가선형화 기법을 사용하여 비선형 랜덤 시스템을 선형화하였다. 또 이 선형화된 시스템을 최근에 새로이 제안된 방법<sup>(17,18)</sup>을 적용하여 비백색잡음형태의 랜덤 가진을 받을 때 그 거동을 구하였다.

## 2. 시스템과 지배방정식

### 2.1 시스템 모델링

시스템은 공중에 있는 표적을 추적하는 임무가 주어져 있으며 추적센서와 모터와, 자이로스코프(gyroscope), 리졸버(resolver)와 베어링 그리고 본체로 구성되어 있다. 시스템을 동역학적으로 해석하기 위해서 다음과 같은 좌표와 좌표변환 행렬이 사용되었다.

즉

$C_0(x_0, y_0, z_0)$  : 관성좌표계

$C_1(x_1, y_1, z_1)$  : 방위각 방향 구동축 좌표계

$C_2(x_2, y_2, z_2)$  : 고각 방향 구동축 좌표계

$C_0 = \text{Rot}(z, y) C_1 = A_0^1 C_1$

$C_1 = \text{Trans}(0, 0, -h)$

$\text{Rot}(y, x) \text{Rot}(x, -90^\circ) C_2$

$= A_1^2 C_2$

여기서  $x$ 는 고각 방향 회전각

$y$ 는 방위각 방향 회전각

$\text{Rot}(z, y)$ 는  $C_1$  좌표계의  $z$ 축에서 방위각방향으로  $y$ 만큼 회전

$A_0^1$ 는  $C_1$  좌표계에서  $C_0$  좌표계로의 변환 행렬.

$\text{Rot}(x, -90^\circ)$ 는  $C_2$  좌표계의  $x$ 축에서 반시계 방향으로  $90^\circ$  회전

$\text{Rot}(y, x)$ 는  $C_2$  좌표계의  $y$ 축에서 고각방향으로  $x$ 만큼 회전

$\text{Trans}(0, 0, -h)$ 는  $C_2$  좌표계의 아래 방향으로  $h$ 만큼 이동

$A_1^2$ 는  $C_2$  좌표계에서  $C_1$  좌표계로의 변환행렬

Fig. 1과 이상의 좌표계 시스템을 고려하면 각 변환행렬은 아래와 같다.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

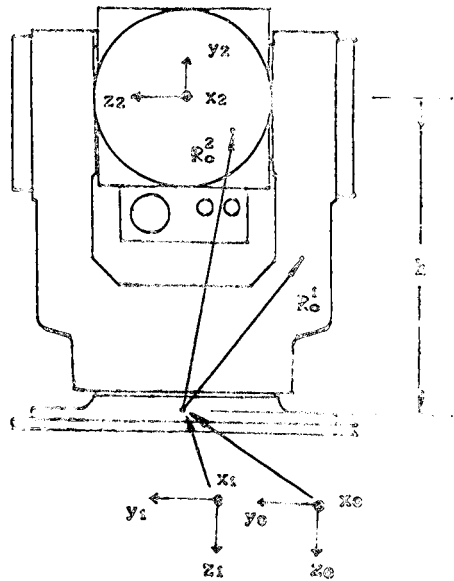


Fig. 1 A point tracking system on aircraft

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & -\cos x & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

### 2.2 운동 방정식

Lagrange 방정식을 이용하기 위하여  $C_0$  좌표계에 대한  $C_1, C_2$  좌표계에서의 속도는 아래와 같이 구해진다.

$$V_0^1 = \frac{d}{dt}(R_0^1) = A_0^1 R_1 = E_1 R_1$$

$$V_0^2 = \frac{d}{dt}(R_0^2) = (A_0^1 A_1^2 + A_0^1 \dot{A}_1^2) R_2 = E_2 R_2$$

여기서 고각링크를 Fig. 1의 중앙에 위치한 회전 부분(추적센서부), 방위각 링크를 나머지 회전부(본체)라 하면

$V_0^1$ 는  $C_0$ 좌표계에 대한 방위각링크에 있는 한 점의 속도

$V_0^2$ 는  $C_0$ 좌표계에 대한 고각링크에 있는 한 점의 속도

$R_0^1$ 는  $C_0$ 좌표계에서 방위각링크에 있는 점까지의 거리이며  $R_0^1 = A_0^1 R_1$ 이다.

$R_0^2$ 는  $C_0$ 좌표계에서 고각링크에 있는 점까지의 거리이며  $R_0^2 = (A_0^1 A_1^2) R_2$ 이다

$R_1$ 는  $C_1$ 좌표계에서 방위각링크에 있는 점까지의 거리이며

$R_2$ 는  $C_2$ 좌표계에서 고각링크에 있는 점까지의 거리이다.

이 시스템의 운동에너지  $K_i$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{즉 } dK_i &= \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(V_i V_i^t) dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(E_i R_i R_i^t E_i^t) dm \end{aligned}$$

여기서  $t$ (transpose)는 전이를  $\text{Tr}$ 는 Trace를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } K_i &= \int dK_i = \int \frac{1}{2} \text{Tr}(E_i R_i R_i^t E_i^t) dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[E_i (\int R_i R_i^t dm) E_i^t] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[E_i J_i E_i^t] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $J_i$ 는 관성모멘트텐서(inertia moment tensor)이다.

또 여기서,  $i=1, 2:1$ 은 방위각,  $2$ 는 고각을 나타낸다.

라그란지 방정식을 이용하면 다음과 같이 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} (Ix_2x_2 + Iy_2y_2) \ddot{x} + (\sin x Ix_2z_2 + \cos x Iy_2z_2) \ddot{y} + (\cos x Ix_2z_2 - \sin x Iy_2z_2) \dot{x} \dot{y} + (\cos x \sin x Ix_2x_2 + \cos 2x Ix_2y_2 - \cos x \sin x Iy_2y_2) \dot{y}^2 + k_2x + B_x \dot{x} + T_{xf} \text{Sgn}(\dot{x}) = T_x' \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (Ix_1x_1 + Iy_1y_1 + \cos^2 x Ix_2x_2 - 2 \sin x \cos x Ix_2y_2 + \sin^2 x Iy_2y_2 + Iz_2z_2) \ddot{y} + (\sin x Ix_2z_2 + \cos x Iy_2z_2) \dot{x} + \{-2 \sin x \cos x Ix_2x_2 + 2(\sin^2 x - \cos^2 x) Ix_2y_2 + 2 \sin x \cos x Iy_2y_2\} \dot{y} \dot{x} + (\cos x Ix_2z_2 - \sin x Iy_2z_2) \dot{x}^2 + k_1y + B_y \dot{y} + T_{yf} \text{Sgn}(\dot{y}) = T_y' \end{aligned}$$

여기서  $B_x, B_y$ 는 각각 고각과 방위각방향의 비보존 점성 마찰계수

$T_{xf}, T_{yf}$ 는 각각 고각과 방위각방향의 비보존 쿨롱마찰토크  
=베어링 starting 토크+모터 마찰 토크  
 $T_x', T_y'$ 는 각각 고각과 방위각방향의 외부교란 토크  
 $k_1, k_2$ 는 방위각 고각방향의 강성도이다.

시스템의 형상과 물리적인 시스템 파라미터들을 고려하며 시스템 질량에 의하여 표준화된(normalized) 운동방정식은 식 (4), (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 0.33\dot{x} + 0.529x - 0.082\dot{y} + 0.794 \text{Sgn}(\dot{x}) = T_x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 0.306\dot{y} + 0.0814\dot{y} \sin^2 x + 0.0814\dot{x} \dot{y} \sin 2x + 0.7428 \text{Sgn}(\dot{y}) = T_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 0.306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.529 & 0 \\ 0 & 0.525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -0.0821\dot{y}^2 \sin 2x + 0.794 \text{Sgn}(\dot{x}) \\ 0.0814 \dot{y} \sin^2 x + 0.0814 \dot{x} \dot{y} \sin 2x \\ + 0.7428 \text{Sgn}(\dot{y}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. 비선형 불규칙 시스템의 선형화

#### 3.1 등가선형화(Equivalent Linearization)

전절에서 유도된 운동방정식은 일반적인 형식으로 식 (6)과 같이 표현될 수 있다.

$$I \ddot{q} + C \dot{q} + K q + f(\ddot{q}, \dot{q}, q) = T_d \quad (6)$$

여기서  $I, C, K$ 는 질량, 감쇠계수, 강성계수 행렬이고

$f$ 는 비선형함수이며  $\ddot{q}, \dot{q}, q$ 는 각각 가속도, 속도, 변위이다.

또  $T_d$ 는 외부에서 시스템에 가해지는 결정적인(deterministic) 힘이다.

이러한 식 (6)과 같은 비선형 시스템에 식 (7)과 같은 선형시스템이 동등한 특성을 갖는다는 가정을 한다.

$$I' \ddot{q} + C' \dot{q} + K' q = T_d \quad (7)$$

여기서  $I', C', K'$ 는 선형화된 시스템의 수정된 질량, 감쇠계수, 강성계수 행렬이다.

따라서 이러한 가정이 성립하기 위해서는 비선형 시스템(6)과 선형시스템(7) 사이에 오차가 최소가 되도록 선형화된 시스템(7)의 매개변수를 결정하여야 한다.

#### 3.2 확률론적 등가 선형화

##### (Stochastic Equivalent Linearization)

외부에서 가해지는 힘이 결정적이지 않고 불규칙적인 힘  $T_r$ (random force)일 때는 확률론적인 접근이 필요하다.

$$I' \ddot{q} + C' \dot{q} + K' q = T_r \quad (8)$$

즉 비선형 불규칙시스템에서는 오차의 자승평균

$E[e^2]$ 을 최소화 시키므로써 확률론적으로 등가화된 시스템이 아래와 같이 구성된다. 이 최소화의 조건은 식 (9)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial W_i^k} E[e_i^2] = 0 \quad (9)$$

여기서  $i, j=1, 2$ 이며 각각  $y, x$ 이다.

$k=1, 2, 3$ 이며 선형화된 시스템의 질량, 감쇠계수, 강성계수를 각각 나타낸다.

$W_i^k$ 는  $i$ 번째의 좌표에서  $j$ 번째의 좌표에 연결된 선형화된 시스템 매개변수(parameter)인 질량, 감쇠계수, 강성계수이다.

식 (5), (8), (9)와 정상불규칙과정(stationary random process)을 고려하면 식 (10)과 같은 조건식이 구해진다.

$$W_i^k = \frac{E[r_k f_i]}{E[r_k^2]} \quad (10)$$

여기서  $r_k$ 는 변위, 속도, 가속도  $q, \dot{q}, \ddot{q}$ 를 나타내며  $k=1, 2, 3$ 이다.  $f_i$ 는  $i$ 번째 좌표에서 비선형 함수이며  $i=1, 2$ 이다. 또 연합된 정상분포(jointly Gaussian distribution)와 평균값이 0인 6개의 불규칙변수(random variable)의 정상확률밀도함수(stationary probability density function)  $P_s$ 는 식 (11)과 같다.

$$P_s(r_u|_{u=1..6}) = P(r_1)P(r_2)\dots P(r_6) \\ = \frac{1}{(2\pi)^3 \sigma_{r1}\dots\sigma_{r6}} \exp\left[-\sum_{i=1}^6 \frac{r_i^2}{2\sigma_{r_i}^2}\right] \quad (11)$$

식 (11)을 고려하면 식 (10)은 식 (12)와 같이 된다.

$$W_i^k = \iint \dots \int r_k f_i P_s(r_u|_{u=1..6}) dr_1 \dots dr_6 / \sigma_{r_i}^2 \quad (12)$$

이로부터 선형화된 시스템 매개변수는 식 (13)과 같이 된다.

$$I' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1+0.0407\{1-\exp(-2\sigma_x^2)\} & \\ C & & C \end{bmatrix} \\ C' = C \quad (13) \\ k' = \begin{bmatrix} k_x - 0.164\sigma_x^2 \exp(-2\sigma_x^2) & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

여기서  $\sigma_x$ 는 고각변위의 variance

$\sigma_y$ 는 방위각속도의 variance

$k_x$ 는 고각 방향의 강성동( $k_2$ 와 같다)

$k_y$ 는 방위각 방향의 강성도( $k_1$ 와 같다)

선형 난진동(linear random vibration) 이론과 식 (12)를 이용하면 아래와 같은 variance에 대한 식

(14)를 얻을 수 있다.

$$\sigma_{r_i}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^i(\omega)}{\{\omega^2 - Kr_i - 1/\sigma_{r_m}^2 \iint \dots \int r_m f_i \rho_s(r_u|_{u=1..6}) dr_1 \dots dr_6\} + \{C + 1/\sigma_{r_n}^2 \iint \dots \int r_n f_i \rho_s(r_u|_{u=1..6}) dr_1 \dots dr_6\}^2 \omega^2 d\omega} \quad (14)$$

여기서  $r_i, r_m, r_n$ 는 각좌표계에서의 변위, 속도, 가속도

또  $l, m, n=1, 2\dots 6$

$f_i$ 은 각좌표계에서의 비선형 함수

$i=1, 2$

$S_F^i(\omega)$ 는  $r_i$  좌표계에서 랜덤 가진의 파워스펙트럼밀도(power spectral density)

식 (12), (13), (14)를 고려하면 이들은 비선형 대수방정식(nonlinear algebraic equation)을 구성한다. 이들 비선형 방정식을 수치적으로 풀면 식 (13)의 확률적으로 등가인 강성계수와 질량들이 구해지고 선형화된 시스템 방정식 (8)이 구성된다.

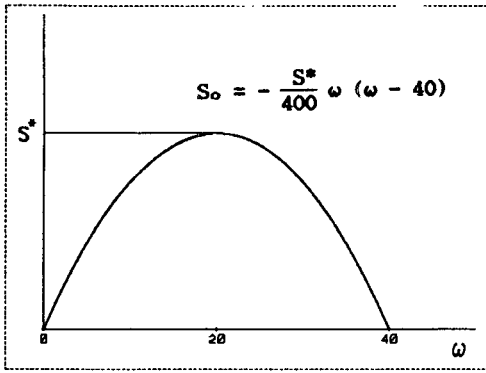
#### 4. 유색 잡음 가진 및 모사(Coloured Noise Excitation and Stochastic Simulation)

##### 4.1 불규칙 가진(Random Excitation)

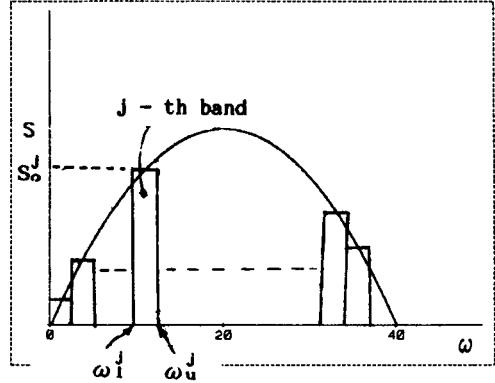
일반적으로 백색잡음 형태의 불규칙 가진에 대한 동적시스템의 거동에 대한 연구는 많은 연구가에 의해서 비교적 자세하게 수행되었다<sup>(14-16)</sup>. 특히 대기중의 난류에 대해서는 그 파워스펙트럼의 밀도를 종종 von Karman 모델을 사용하여 왔다.

그러나 본 논문에서는 Fig. 2(a)와 같은 종모양의 psd로 가정하였다. 즉 이는 비백색, 유색잡음 형태의 불규칙과정(random process)이다. 비선형 시스템에 유색잡음 형태의 불규칙가진이 가해졌을 때 그 시스템의 거동에 대한 연구는 그 해석의 난해함으로 지금까지 충분히 그 중요성에 비하여 많은 연구가 진행되지 못하였다. 최근에 준 해석적인 복합기법(semi-analytical hybrid technique)이 제안되었다<sup>(17,18)</sup>.

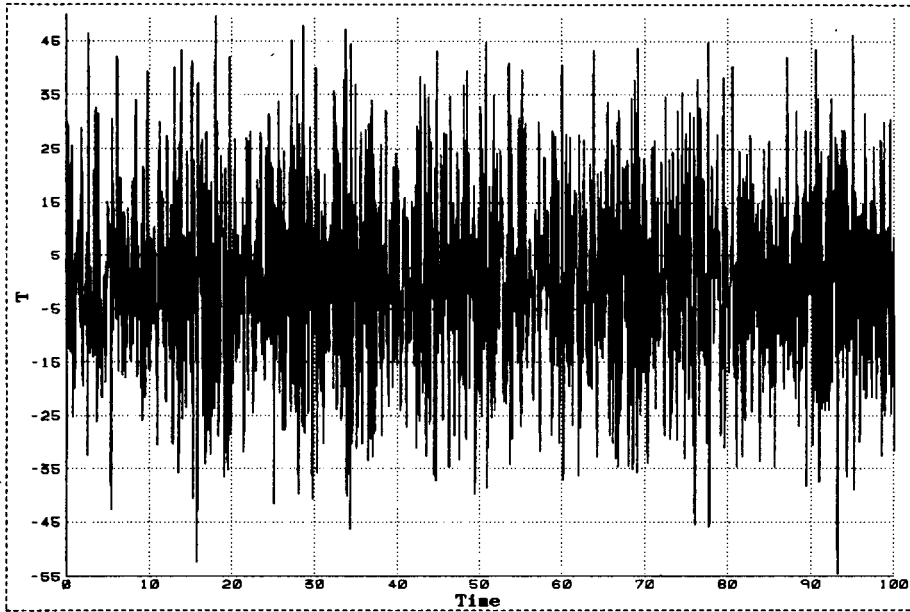
본 논문에서는 이 혼합방법을 사용한다. 그 기본 개념은 Fig. 2(a)와 같은 유색잡음의 psd를 Fig. 2(b)와 같이 단역백색잡음(band-limited white noise)의 근사적합으로 가정한다. 즉 단역백색 잡음에 의한



(a) Power Spectral Density



(b) Summation of Band Limited White Noise



(c) Time History when  $S^* = 10(\text{deg}^2/\omega)$

Fig. 2 Stationary coloured random process of atmospheric turbulence

선형시스템의 평균자승 거동은 아래 식 (15)와 같은 해석적인 해를 갖는다는 것은 잘 알려져 있다.

따라서 유색잡음 가지를 받는 본 논문에서의 선형화된 시스템의 평균자승 거동은 단역백색 잡음에 의한 선형시스템의 평균자승 거동의 유색잡음의 형상을 고려한 수치적 합이 된다.

이 새로운 기법인, 준 해석적 혼합방법을 본 논문에서는 성공적으로 적용하였다.

$$E[q_i^2] = \pi \sum_{j=1}^N S\omega_i^j \left( 1 + \frac{\omega_{ni}^2}{2\xi_i} \right) \left[ I\left(\frac{\omega_i^j}{\omega_{ni}}, \xi_1\right) - I\left(\frac{\omega_i^j}{\omega_{ni}}, \xi_1\right) \right] \quad (15)$$

여기서

$q_i$  :  $i$ 번째 일반화된 좌표

$S\omega_i^j$  :  $i$ 번째 좌표계에서 가해지는  $j$ 번째 단역잡음의 psd

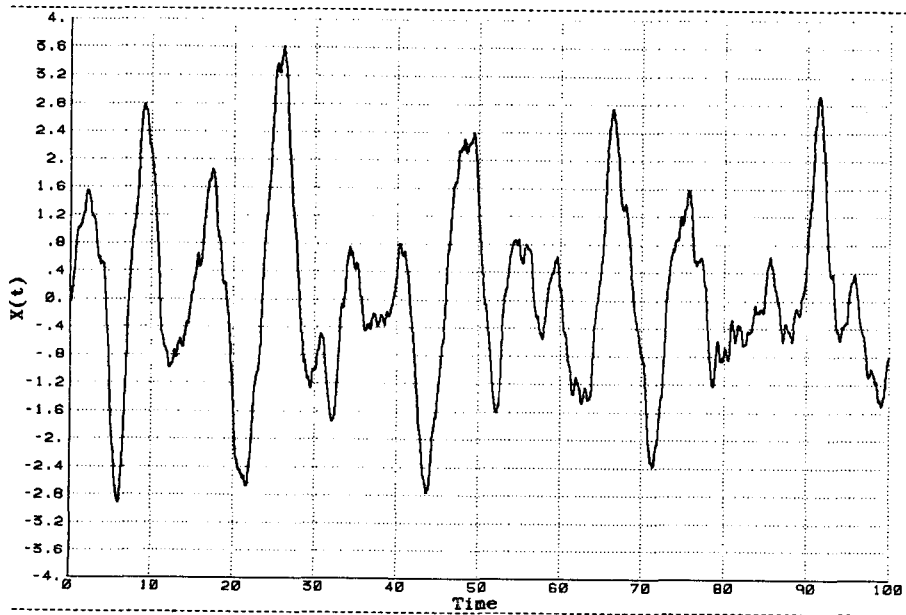
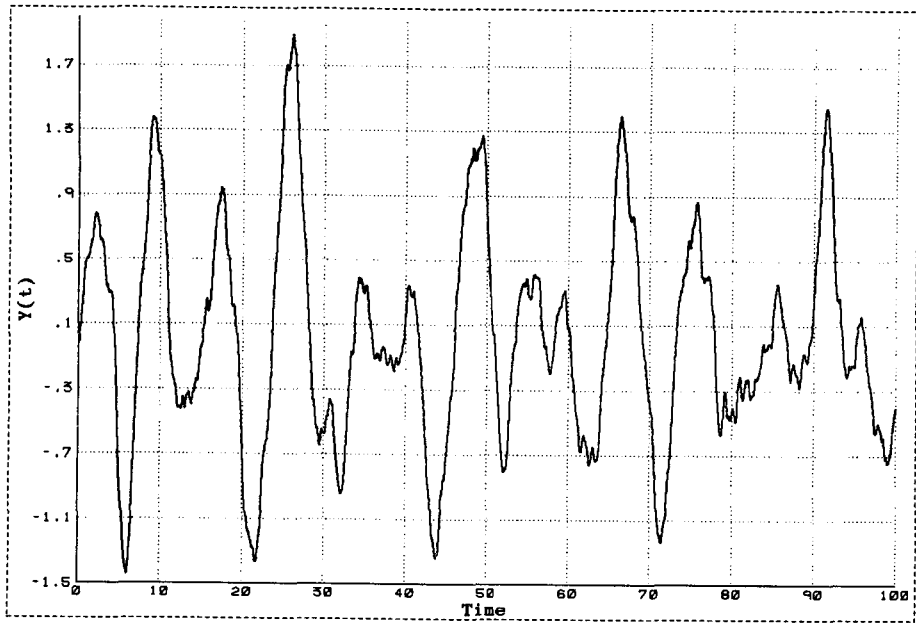


Fig. 3 Nonlinear system response under random disturbance

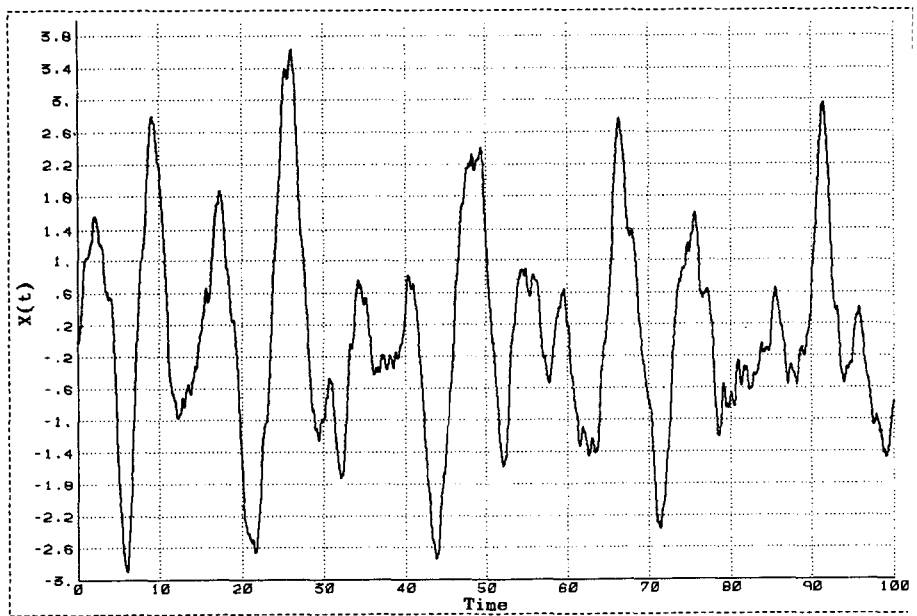
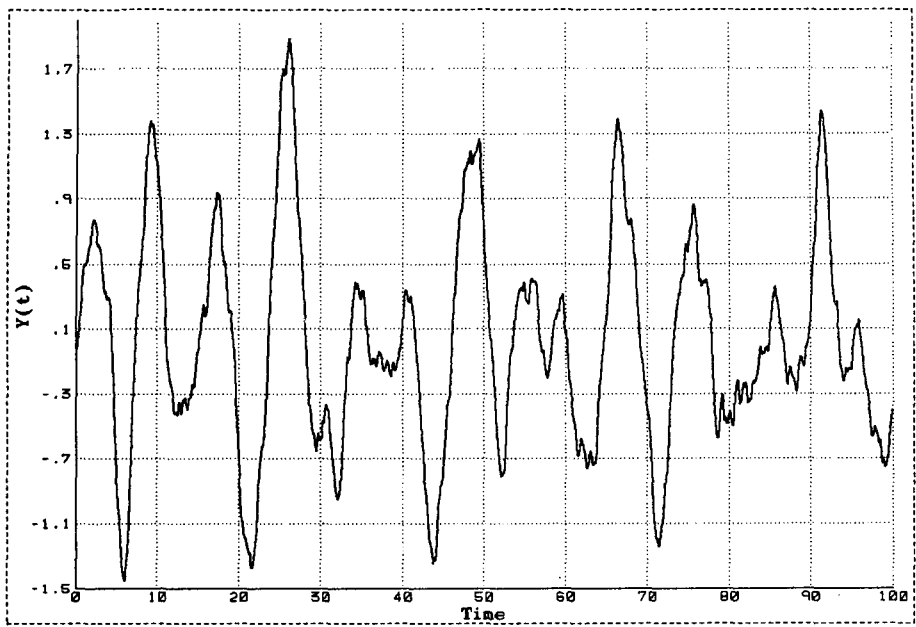


Fig. 4 Linearized system response under random disturbances

- Nonlinear Solution via M-C Simulation
- Equivalent Linearized System Solution

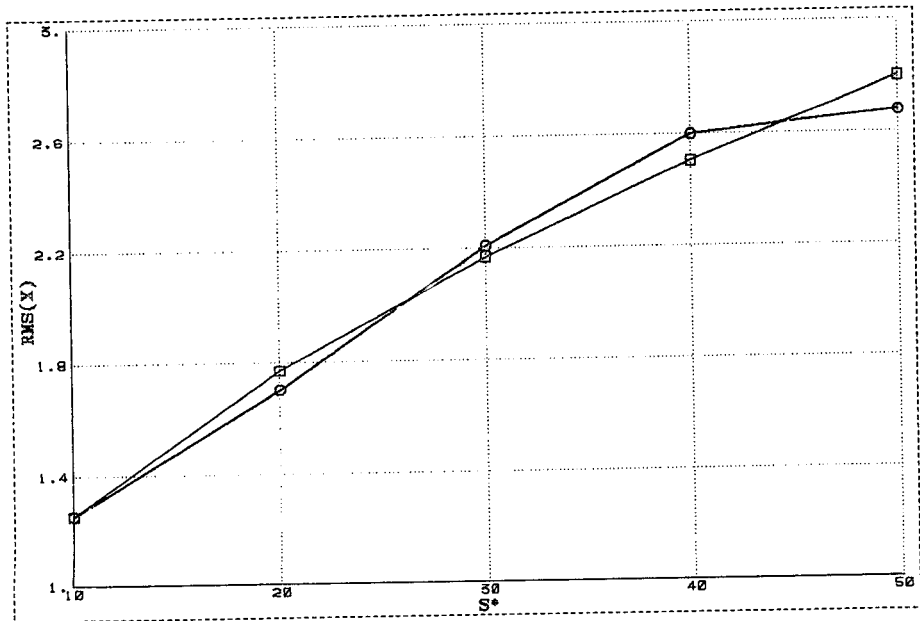
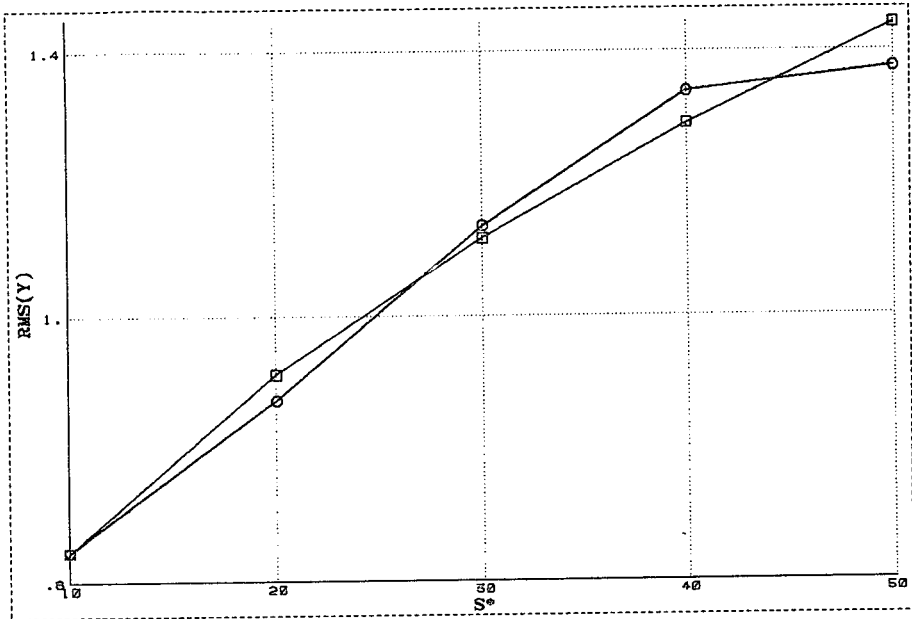


Fig. 5 Comparison of the results



$\omega_{ni}$  :  $i$ 번째의 자연진동수

$\zeta_i$  :  $i$ 번째 좌표계에서 감쇠계수

$\omega_{ni}^*$  :  $j$ 번째 단역백색 잡음의 상단주파수

$\omega_{ni}^*$  :  $j$ 번째 단역백색 잡음의 하단주파수

$$\text{또 } I\left(\frac{\omega}{\omega_{ni}}, \zeta_i\right) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{2\zeta_i(\omega/\omega_{ni})}{1 - (\omega/\omega_{ni})^2} \\ + \frac{\zeta_i}{2\sqrt{1-\zeta_i^2}} \ln \frac{1 + (\omega/\omega_{ni})^2 + \sqrt{1-\zeta_i^2}(\omega/\omega_{ni})}{1 + (\omega/\omega_{ni})^2 - \sqrt{1-\zeta_i^2}(\omega/\omega_{ni})}$$

## 4.2 확률적 모사(Stochastic Simulation)

자연계에서 일어나고 있는 불규칙하고 불확실한 현상을 연구하기 위하여 확률 이론이 많이 사용되고 있는바 특히 그 변수들의 불규칙한 변화에 대하여 종종 Monte-Carlo 방법이라는 모사법이 사용되어 연구하고 있다. 본 연구에서는 선형화된 시스템의 거동에 대한 결과와 그 타당성을 확인하기 위하여 확률론적 모사법을 사용하였다. 그동안 여러 가지 방법이 제안되었는데<sup>(19,20)</sup> 여기서는 Shinozuka의 방법을 사용하였다.

이 방법으로 Fig. 2(a)와 같은 종모양의 파워스펙트럼을 갖는 Fig. 2(c)와 같은 시계열이 만들어졌고 이를 비선형 시스템과 선형화된 시스템에 가하므로써 본 연구에서의 결과와 비교 확인하였다.

## 5. 결과 및 결론

불확실하고 불규칙한 상황에서 운용되고 비선형 시스템의 거동은 그 임무의 성공적 수행을 위하여서 많은 연구가 필요한바 있다. 종종 무시되어 왔던 비선형성의 영향에 대한 해석과 연구는 현대의 첨단장비에서는 그 움직임을 정확하게 예측하기 위하여 특히 절대 긴요하다 하겠다.

표적추적 시스템의 비선형 불규칙 거동에 대하여 전산기를 이용한 해석적 방법(computer aided analytical technique)에 의한 해와 수치해를 구하였다(Fig. 3과 Fig. 4).

원래 비선형이었던 시스템이 선형화 되고 이 선형화된 시스템이 유색 잡음 형태의 랜덤 가진을 받을 때에 시스템의 자승평균 거동을 새로이 개발한 준 해석적 복합기법을 사용하여 구하였고 또 비효율적이지만 신뢰할 수 있는 Monte-Carlo 모사기법을 원래 비선형 시스템에 적용하여 또 자승평균을 구하였다.

두 결과를 비교하면 새로이 제안된 준해석적복합

기법은 약 5% 이내의 오차를 갖는 정확도와 그 효율성을 갖는 것을 알 수 있다(Fig. 5).

또 이 새로운 기법은 유색잡음 가진을 받는 비선형형이나 비선형 동적 시스템 어느 것에도 그 거동을 구하기 위하여 아주 유용하게 사용될 수 있겠다.

## 참 고 문 헌

- (1) Corcos, G.M. and Liepmann, H.W., 1956 "On the Contribution of Turbulent Boundary Layers to the Noise Inside a Fuselage", NACA TM 1420.
- (2) Diederich, F.W., 1956, "The Dynamic Response of a Large Airplane to Continuous Random Atmospheric Disturbances", J. Aeron. Sci., Vol. 23, pp. 917~930.
- (3) Etkin, B., 1959, "A Theory of the Response of Airplanes to Random Atmospheric Turbulence", J. Aerospace Sci., Vol. 26, pp. 409~420.
- (4) Davenport, A.G., 1961, "The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures", Proc. Inst. Civil Engs., Vol. 19, pp. 449~472.
- (5) Gaonkar, G.H. and Hohenemser, K.H., 1971, "Stochastic Properties of Turbulence Excited Rotor Blade Vibrations", AIAA J. Vol. 9(3), pp. 419~424.
- (6) Howel, L.J. and Lin, Y.K., 1971, "Response of Flight Vehicle to Atmospheric Turbulence" AIAA J. Vol. 9(11), pp. 2201~2207.
- (7) Fujimori, Y. and Lin, Y.K., 1973, "Analysis of Airplane Response to Nonstationary Turbulence Including Wing Bending Flexibility", AIAA J. Vol. 11(3), pp. 334~339.
- (8) Krylov, N. and Bogoliubov, 1943, "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton Univ., N.J.
- (9) Caughey, T.K., 1963, "Equivalent Linearization Techniques", J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 35, pp. 1706~1711.
- (10) Foster, E.T., 1968, "Semilinear Random Vibrations in Discrete Systems, J. Appl. Mech., Trans. ASME Vol. 35, pp. 560~564.
- (11) Iwan, W.D. and Yang, I.M., 1972, "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems", J. Appl. Mech., Trans. ASME Vol. 39, pp. 545~550.
- (12) Atalik, T.S. and Utku, S., 1976, "Stochastic Linearization of Multi Degree-of-Freedom Nonlinear Systems", Earthquake Engrg. Strut. Dyn., Vol. 4, pp. 411~420.
- (13) Spano, S., P.T.D. and Iwan, W.D., 1978, "On the

- Existence & Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization”, *Intl. J. Nonlinear Mech.*, Vol. 13, pp. 71~78.
- (14) Herbert, R.E., 1965, “Random Vibration of Plates with Large Amplitude”, *J. APPL. Mech. Trans. ASME*, Vol. 32, pp. 547~552.
- (15) Roberts, J.B., 1981, “Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, part 1 : Markov Method”, *J. Shock and Vib. Digest*. Vol. 13, pp. 17~28.
- (16) Caughey, T.K., and Ma, F., 1982, “The Exact Steady-State Solution of a Class of Nonlinear Stochastic Systems”, *Intl. J. Nonlin. Mech.* Vol. 17, pp. 137~142.
- (17) 허훈, 진근찬, 성용립, 1989, “유색잡은 형태의 불규칙 가진을 받는 차량의 난진동 연구”, 대한기계학회 추계학술대회, pp.138~140.
- (18) 허훈, 성용립, 1989, “비백색 잡음에 의한 동적시스템의 응답해석”, 과학기술논문집, 고려대학교 자연과학대학.
- (19) Shinozuka, M., Jan, A.M., 1972, “Digital Simulation of Random Process and its Application”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25. pp. 111~128.
- (20) Harris, C.J., 1979, “Simulation of Multivariable Nonlinear Stochastic Systems”, *Intl. J. Numerical Methods Engrg.*, Vol. 14, pp.37~50.