

〈論 文〉

## 원형평판의 붕괴문제에 관한 유한차분 완전 하계해

허                    훈\*

(1990년 4월 9일 접수)

### Complete Lower Bound Solutions of Circular Plate Collapse Problems by a Finite Difference Method

Hoon Huh

**Key Words :** Limit Analysis(극한해석), Lower Bound Solution(하계해), Plastic Collapse(소성 붕괴), Circular Plate(원형평판), Finite Difference Method(유한차분법), Modified Newton's Method(적변 뉴우톤 방법),  $\beta$ -norm Yield Condition( $\beta$ -norm 항복조건)

#### Abstract

Accurate load-carrying capacities and moment distributions of thin circular plates are obtained for clamped or simply-supported boundary condition under various concentrated circular loadings. The material is regarded as perfectly-plastic based on an arbitrary yield function such as the Tresca yield function, the Johansen yield function, and the family of  $\beta$ -norms which possesses the von Mises yield function and the Frobenius norm. To obtain the lower bound solutions, a maximization formulation is derived and implemented for efficient numerical calculation with a finite difference method and the modified Newton's method. The numerical results demonstrate plastic collapse behavior of circular plates and provide their design criteria.

#### 1. 서    론

원형평판 문제는 구조해석 및 기계부품 설계에 다양하게 응용될 수 있는 문제이다. 원형평판의 붕괴 문제는 소성역학의 발전과 더불어 여러가지 방법으로 해석되어 왔다. Hill<sup>(1)</sup>과 Drucker<sup>(2)</sup>가 극치정리, 이원정리, 극한설계정리등 소성역학에 관한 중요한 이론들을 발표한 이래, 이들의 이론을 기초로 원형평판에 관한 많은 해석이 이루어졌다. Hopkins와 Prager가 원형평판 문제에서 Tresca 항복조건<sup>(3)</sup> 및 임의의 항복조건<sup>(4)</sup>을 만족하는 해를 초등해법에 의하여 구하였으며, Eason<sup>(5)</sup>은 von

Mises 항복조건을 적용하여 균일하중을 받는 원형평판의 속도장을 역시 초등해법에 의하여 구하였다. Lance와 Onat<sup>(6)</sup>은 원형평판의 소성 굽힘문제를 직접 실험을 하여 이론해와 비교하였다.

Mura, Kao와 Lee<sup>(7)</sup>는 직교이방성 평판에 관한 문제를 응력장(모멘트장)을 가정하여 해석하였으며, Markowitz와 Hu<sup>(8)</sup>는 Tresca 항복조건을 만족하는 직교이방성 원형평판에 관한 해를 초등해법에 의하여 구하였다.

Braestrup<sup>(9)</sup>은 평판에 관한 극한해석을 항복선이론(Yield-line theory)에 의하여 행하였으며, Little<sup>(11)</sup>은 실에너지(Live-energy) 최소화 기법에 의하여 행하였다. 한편, Strang, Matthies와 Temam<sup>(12,14)</sup>은 소성문제의 전산해법을 위하여 범함수에 관한

\*정회원, 한국과학기술원 생산공학과

기초이론과 유한요소법의 응용을 제시하였으며, Christiansen<sup>(13,15)</sup>, Maier 등<sup>(10)</sup>은 평판문제를 유한요소법과 수학적 계획법에 의하여 해석하였다. Yang<sup>(16,17)</sup>은 최대·최소화 기법에 의하여 평판에 대한 극한해석을 하였으며, 이원정리에 의거하여 균일하중을 받는 원형평판에 있어서 최소상계해와 최대하계해가 똑같이 정해가 됨을 보였다.

본 논문에서는 Yang의 이론을 바탕으로 여러가지 원형집중하중을 받는 원형평판에 관한 최대하계해를 구하고자 한다. 앞서 열거한 문헌에서는 여러가지 해석법이 제시되었으나, 문제의 성격에 비하여 그 해법이 매우 복잡하였다. 본 논문에서는 원형평판에 관한 해법으로서 전산기를 응용하여 가능한 한 단순한 해법으로 최대화기법에 의한 완전한 해를 얻기 위한 시도를 제시하고자 한다.

이때, 재료의 특성에 따라 다양한 항복조건을 적용하여야 하므로 Tresca 항복조건과 Johansen 항복조건(Rankine 항복조건)은 물론 일반화된 von Mises 항복조건을 만족하는 해를 구하고자 한다. 구하여진 해는 평판이 초기소성역에 들어갔을 때이므로 재료가 완전소성체라면 하중을 조금만 증가시켜도 평판은 붕괴될 것이다. 그러나, 일반적으로 재료는 변형경화성이 있으므로 변형경화도에 따라 평판이 파손되는 하중의 증가량이 달라질 것이다. 본 논문에서 구한 해는 평판의 안전강도 측면에서의 한계치라고 할 수 있으며, 구조물 설계의 하계기준으로서 안전하게 이용할 수 있다.

## 2. 지배방정식

역학문제의 해는 정역학적 가용집합, 구성적 가용집합 및 운동학적 가용집합등 세가지 집합의 교집합에 속하는 요소라 볼 수 있다. 극한해석(limit analysis)은 세가지 집합의 교집합을 해로 구하는 대신 두가지 또는 한가지 집합으로부터 해를 구하는 방법이다.

극한해석은 상계해석과 하계해석으로 대분되며, 상계해석은 운동학적 가용집합내에서 해를 구하는 방법이고, 하계해석은 정역학적 가용집합에 속하는 지배방정식들, 즉 평형방정식과 정역학적 경계조건, 과 구성적 가용집합에 속하는 지배방정식, 즉 항복조건식,의 교집합내에서 해를 구하는 방법이다. 따라서, 하계해석을 위한 지배방정식으로는 평형방정식과 항복조건식, 정역학적 경계조건등을 고

려하여야 한다.

### 2.1 항복조건식

극한해석에서의 핵심요소는 항복조건식이다. 소성구조물의 하중지지력은 항복조건식에 의하여 한계가 지워지고, 항복조건식은 사용재료와 구조에 따라 달라지기 때문이다. 예를 들면, 등방성 재료의 평판인 경우는 식 (2)의 Frobenius norm을 항복조건식으로 부과하는 것이 적절하겠으나, 이방성 재료의 경우나 복합경층재의 경우는 적절한  $\beta$ -값을 산정하여 식 (3)의  $\beta$ -norm을 항복조건식으로 부과하여야 할 것이다. 또한 대형 Truss 구조물을 평판으로 간주할 때에는 Truss 구조에 따라 적합한 항복조건식을 선택해야 할 것이다. 항복조건식에 대한 제안은 수없이 많이 발표되었으나, 실제 재료의 거동에 근접하고 수학적으로 유용한 것으로는 다음과 같은 조건식들이 있다. von Mises 항복조건식은 가장 많이 쓰이는 조건으로 2차원 평판문제에서는

$$\|M\|_v = \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2} \leq M_0 \quad (1)$$

로 표시할 수 있다. 이때  $M_1$ 과  $M_2$ 는 주모멘트이고  $M_0$ 는 항복점 모멘트이다. 항복조건식을 norm으로 표시한 것은 모멘트에 한계를 가하는 수학적·물리학적 의미가 내포되어 있다.

Frobenius norm은 평판의 항복거동을 보다 논리적으로 표시한 것으로

$$\|M\|_F = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \leq M_0 \quad (2)$$

로 표시된다. 이 조건식은 수학적으로도 편리할 뿐 아니라, 모멘트의 경우 부호에 영향을 받지 않고 각 모멘트에 대하여 변형(곡률)이 독립적임을 의미한다.

본 논문에서는 보다 융통성이 있고 재료의 상이한 거동을 수학적으로 통일성 있게 표현하기 위하여 소위  $\beta$ -norm 항복조건식을 식 (3)과 같이 제안한다.

$$\|M\|_\beta = \sqrt{M_1^2 - \beta M_1M_2 + M_2^2} \leq M_0, \quad -2 \leq \beta \leq 2 \quad (3)$$

이 때  $\beta$ 의 범위는 조건식이 convex 한 한계이다. 위 식은  $\beta=0$ ,  $-1$  일 때 각각 Frobenius 조건식과 von Mises 조건식으로 표현됨을 알 수 있다. 한편, 초등해법으로 해석할 때에는 수학적 편의를 위해 Tresca 항복조건식을 사용하기도 하며

$$\|M\|_s = \max\left\{\frac{|M_1|}{2}, \frac{|M_2|}{2}, \frac{|M_1 - M_2|}{2}\right\} \leq \frac{M_0}{2} \quad (4)$$

로 표시되나, 보다 평판의 물리적 거동에 적합한 식으로는 Johansen 항복조건식이 있다<sup>(18)</sup>.

$$\|M\|_J = \max\{|M_1|, |M_2|\} \leq M_0 \quad (5)$$

Johansen 조건식은 특히 분말결합재료의 항복거동에 적합하며, 예를 들면 콘크리트, 분말합금등이 그것이다. 상기 항복조건들을 Fig. 1에 도시하였으며, Johansen 항복조건은 점선으로 표시하였으나 제 1상한과 제 3상한에서는 Treasca 항복조건과 일치한다.

### 2.2 평형방정식

얇은 평판의 평형방정식은 국부응력의 3차원 평형조건식을 합응력의 2차원 평형조건으로 근사하여 표시할 수 있다. 즉, 3차원 평형조건식으로 표시된

$$\nabla \cdot Q = \lambda p \quad (6)$$

$$\nabla \cdot M = -Q$$

의 식들은  $(r, \theta, z)$ 로 표시되는 축대칭 평형방정식으로 표시하고 평판을 매우 얇은 것으로 근사하여  $z$ 방향의 평형방정식을 생략하면 아래와 같이 표시된다.

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) + r(\lambda p) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta + rQ_r = 0$$

이때  $M_r, M_\theta$ 는 각각  $r$ 방향과  $\theta$ 방향의 모멘트로 이 경우 주모멘트가 되며,  $Q_r$ 은  $r$ 평면에서의 전단력,  $p$ 는  $z$ 방향으로의 분포하중으로  $r$ 만의 함수이며,  $\lambda$ 는 비례하중계수로 양수의 scalar양이다.

상기식은 특이점이 발생하는 중심에서 집중하중을 받는 경우를 제외하고는 전단응력  $Q_r$ 을 소거할 수 있다. 따라서, 축대칭 평판의 평형방정식은

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = \int_0^r \lambda p \cdot r \cdot dr \quad (8)$$

로 표시할 수 있다. 분포하중  $p$ 가  $z$ 방향으로 균일하게 작용하고 축대칭으로 하중면적이 달라질 경우, 하중이 작용하는 면의 반경이  $a$ 라면  $p = p \cdot 1(a-r)$ 로 표시할 수 있다. 이때  $1(a-r)$ 은  $a \geq r$  일때는 1,  $a < r$  일때는 0이 되는 분포함수이다. 이와 같은 분포하중을 고려한 평형방정식은 아래와 같이 나누어 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = \lambda \int_0^r r p dr = \lambda \frac{r^2 p}{2}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (9)$$

$$= \lambda \int_0^a r p dr = \lambda \frac{a^2 p}{2}, \quad a \leq r \leq R$$

상기 평형방정식은 소성변형이 일어나기 직전인 탄성변형내의 미소변형에서만 효용이 있고, 대변형에서는 변형 영역이 달라지므로 평형방정식이 달라져야하나, 극한해석은 소성유동이 일어나기 시작할 때의 응력과 하중을 계산하므로 평형방정식의 수정이 불필요하다.

### 2.3 정역학적 경계조건

일반적으로 운동학적 경계조건은 정적문제의 경우 불변으로 고정되어 있는 반면, 정역학적 경계조건은 평형방정식을 만족하여야 하므로 하중의 변화에 따라 달라진다. 극한해석에서는 소성 유동이 시작할 때이므로 하중조건에 무관하게 영역 일부 또는 전부가 소성역에 들어갔을 때를 고려한다. 따라서, 정역학적 경계조건은 중심 또는 지지단이 소성역에 들어갔을 때의 경계조건을 적용하면 된다. 중심에서의 경계조건은 항복조건식에서  $M_r = M_\theta$ 일 때이며 모두 음의 부호를 가질 때이므로

$$M_r(0) = -\frac{1}{\sqrt{2-\beta}} M_0(\beta\text{-norm}) = -M_0(\text{Tresca, Johansen}) \quad (10)$$

와 같이 결정된다. 상기 경계조건은 단순지지단이나 고정지지단의 경우에 일치한다. 그러나, 지지단에서의 정역학적 경계조건은 지지조건에 따라 다르며 단순지지단 경우  $r$ 방향 모멘트는 없으므로

$$M_r(R) = 0 \quad (11)$$

으로 항복조건식의 선별과 무관하게 결정된다.

고정지지단의 경우에는  $M_r$ 이 최대가 될 때이므로

$$M_r(R) = \frac{2}{\sqrt{4-\beta^2}} M_0(\beta\text{-norm}) = M_0(\text{Tresca, Johansen}) \quad (12)$$

과 같이 결정된다. 정역학적 경계조건은 항복조건식과 지지조건에 따라 중심과 지지단에서 미분 불연속선이 있을 수 있으나, 중심에서는 점으로 존재하며 지지단에서는 영역경계이므로 적분치에 영향이 없다. 그러나, 초등해석으로 기본방정식에 의해 하중 계산을 할 때에는 이 불연속선을 고려하여야 한다.

### 3. 하계해석과 최대화 기법

하계해석은 정역학적 가용집합과 구성적 가용집

합의 교집합을 해로 한다. 정해를 구하기 위하여는 상기 교집합내에서의 최대하계해를 구하여야 하며, 이것을 수식으로 기술하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \text{subject to } \nabla \cdot (\nabla \cdot M) = \lambda p \\ & \|M\| \leq M_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Static Boundary Conditions

상기 수식화는 최대  $\lambda$ 를 구하는 것이므로 모멘트 분포가 항복체적 위에 있다고 간주하면 평형방정식과 항복조건식의 교집합은 한개의 일차상미분 비선형 방정식이 된다. 이때 변형영역 내에 아직 탄성역인 부분이 남아 있을 수 있고 불연속선이 있을 수도 있으나, 모멘트 분포는 연속적이고 경계조건을 만족한다고 간주하면 전체 영역이 항복되어 소성역에 들어갔을 때  $\lambda$ 가 최대값을 갖는 것은 물리적으로 명백하다. 따라서, 상기 수식화는 최대치 문제의 경우에 다음과 같이 재기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \text{subject to } \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} \left[ \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) M_r \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{M_0^2 - \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) M_r^2} \right] \\ & = \lambda \frac{r}{2} p, \quad 0 \leq r \leq a \\ & = \lambda \frac{a^2}{2r} p, \quad a \leq r \leq R \end{aligned} \quad (14)$$

Static Boundary Conditions

상기 수식화는 항복조건식으로  $\beta$ -norm을 사용하였을 경우이며, 모멘트는 경계조건으로부터 Fig. 1에서  $M_1 = M_2$ 의 직선 아래쪽의 항복 모멘트 체적 위에 있음을 알 수 있으므로  $M_0$ 에 관한 식

$$M_0 = \frac{\beta}{2} M_r \pm \sqrt{M_0^2 - \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) M_r^2} \quad (15)$$

중 음의 부호를 택하였다. 항복조건식으로 Tresca나 Johansen 항복조건식을 사용할 때에는 구속방정식은 선형방정식이 되어 초등해법으로 이론해석을 할 수 있으나 상기 수치기법으로도 통일성있게 해석할 수 있다. Tresca 항복조건식을 부여하는 초등해법에 의한 해는 Hopkins와 Prager에 의해 제시된 바 있다<sup>(3)</sup>.

상기 최대화 수식화는 비례하중계수  $\lambda$ 의 최대치를 찾는 것이나, 비례하중계수  $\lambda$ 는 구속방정식에 상수와 같이 첨가되어 있으므로 일반적인 정류치해석에 의하여는 해결할 수 없다. 그러나, 상기문제는 경계조건이 정확히 명시되어 있으므로 구하려는

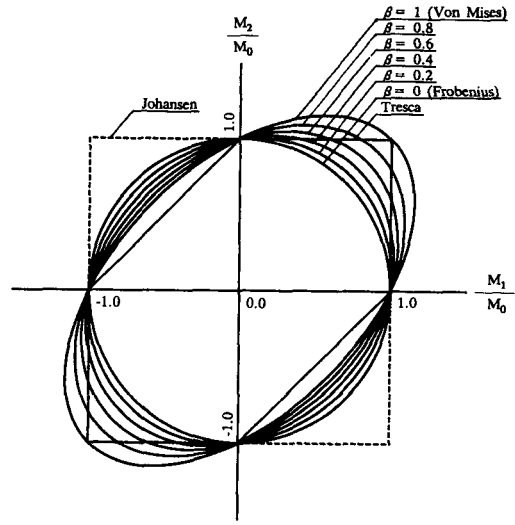


Fig. 1 Loci of the tresca yield function, the Johansen yield function, and the family of  $\beta$ -norm functions

값 최대  $\lambda$ 를 매개변수로 하여 각각의 경계조건을 만족시키는  $\lambda$ 값을 적변 뉴우튼 방법에 의한 반복 형태의 계산과정을 수행하여 구할 수 있다. 즉, 모멘트 분포  $M_r$ 은 임의의 매개변수  $\lambda$ 에 따라 결정되므로 경계조건을 만족시키지 못한다. 따라서,  $\lambda$ 값의 변화에 따른 경계조건을 만족여부를 판별하여 각각의 경우에 대하여 경계조건을 만족시키는 최대  $\lambda$ 값을 적변 뉴우튼 방법으로 구할 수 있다. 임의의 매개변수  $\lambda$ 값에 대하여 구속방정식을 유한차분근사하여 구한 경계에서의 모멘트  $M_r$ 값과 경계조건으로 주어진  $M_r$ 값의 차이를  $F(\lambda)$ 라 하면 최대화 수식화는 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda \\ & \text{subject to } F(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

상기 최대화 수식화는 아래와 같이 뉴우튼 방법을 약간 수정한 반복형태의 계산과정을 통하여 해석할 수 있다.

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n + \lambda_{n-1}}{2} - \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{2} \frac{F(\lambda_n) + F(\lambda_{n-1})}{F(\lambda_n) - F(\lambda_{n-1})} \quad (17)$$

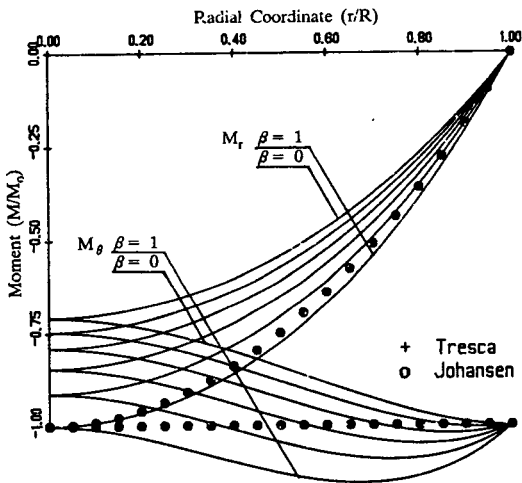
구속방정식을 유한차분으로 근사할 때에는 적합한 안정수치계산 방법을 채택하여야 하며, 그렇지 않은 경우에는 모멘트분포와  $\lambda$ 값이 수렴하지 않는 경우가 있다. 본 해석의 경우 중앙차분법이나 전방차분법은 해가 발산하므로 후방차분법을 적용하였

다. 한편, 모멘트에 대한 경계조건을 만족시키기 위하여는 해의 수렴을 위해 국부적으로 한계치를 지정하는 미소제한조건을 부여하였다. 즉, 적변 뉴우톤에 의한 반복단계에서 해가 발산하면, 전단계에서의 증분치  $\Delta\lambda$ 를 작게 제한하였다. 유한차분은 이론적으로 차분간격을 작게할수록 정해에 가까운 모멘트 값과 극한하중을 구할 수 있으나 계산에 소요되는 시간을 고려하여 적정차분치를 선정하여 수치계산을 수행하였다.

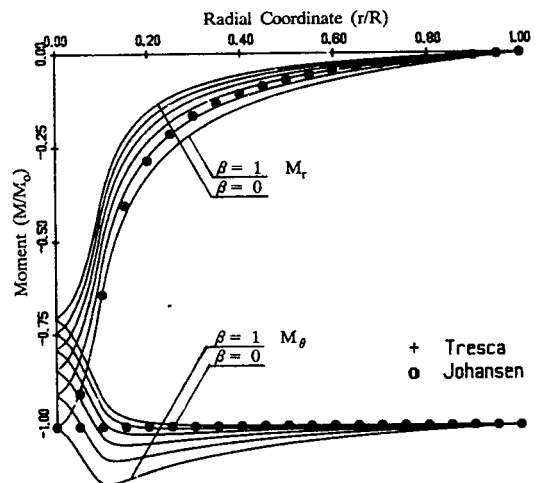
4. 수치해석 결과 및 고찰

수치계산은 제 3 장의 최대화 수식화를 유한차분

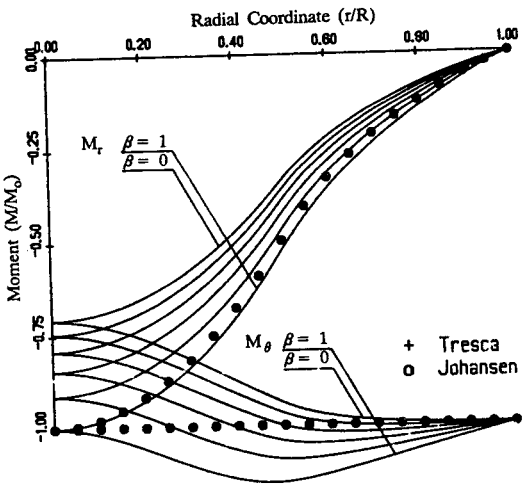
법과 적변 뉴우톤 방법에 의하여 수행 하였으며, 각각의 지지조건과 하중조건에서의 모멘트분포와 극한하중을 구하였다. 유한차분에 의한 모멘트분포는 하중조건에 따라 차분치를 0.005R에서 0.001R까지로 변화시키며 계산을 수행하였다. 균일하중일 때에는 차분치를 0.005R로 하였을 때 거의 정해에 수렴하며, 차분치를 0.001R로 하였을 때와 비교하여 극한하중의 오차가 약 1% 이내에 들었다. 차분치를 0.001R로 하였을 때의 결과는, Hopkins와 Prager<sup>(3)</sup>의 결과와 거의 일치하였다(오차 0.01% 이내). 하중 조건  $a/R=0.001$ 인 경우에는 차분치를 0.001R로 계산하면 수치계산이 불안정하며, 이것은 근사해법에서 당연하다. 이를 보완하려면 차



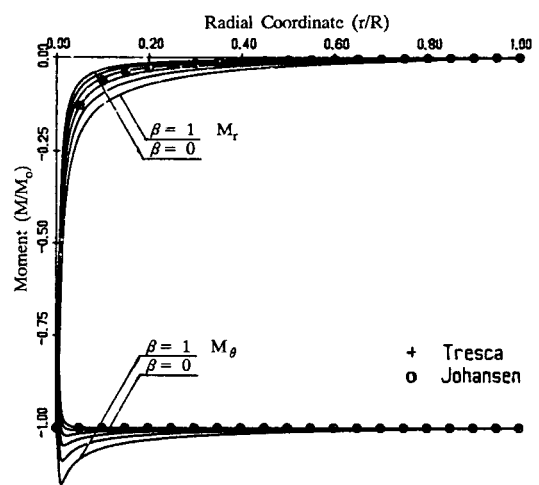
(a)



(c)



(b)



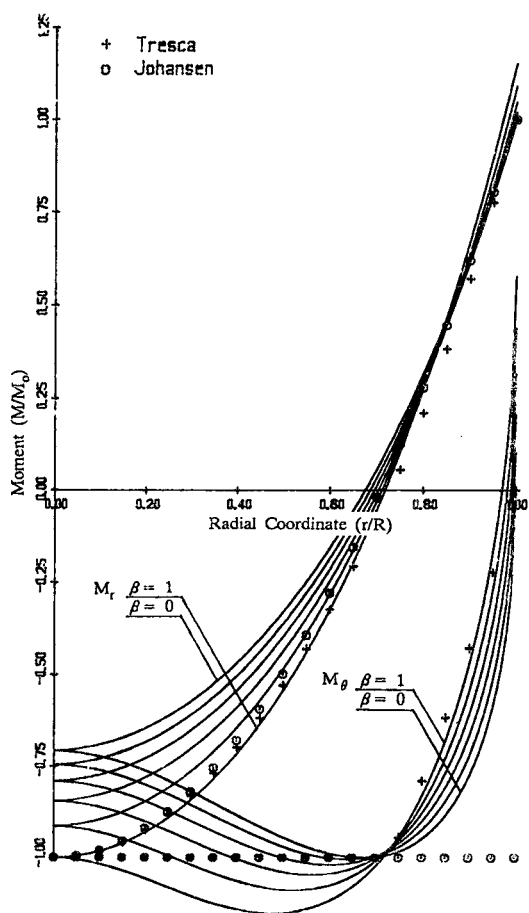
(d)

Fig. 2 Moment distributions in simply supported circular plastes with size of circular loadings

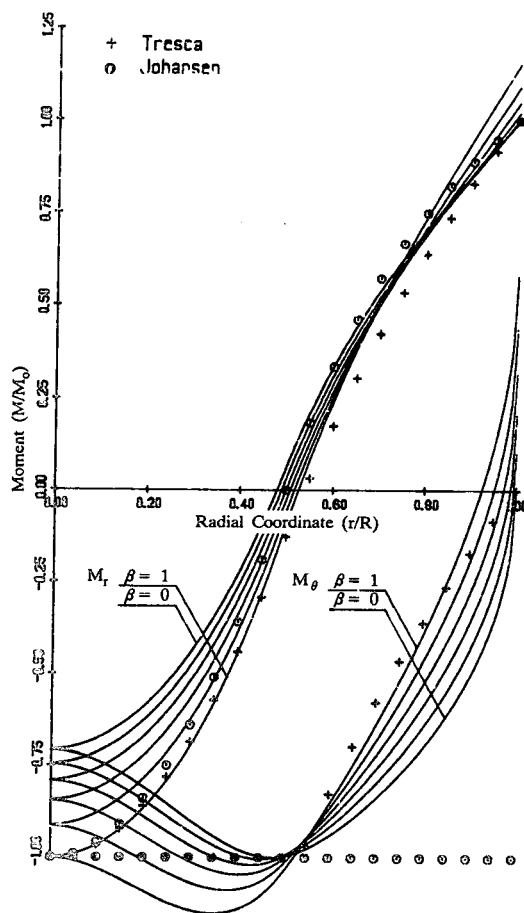
분치를  $0.0005R$  이하로 계산하여야 하나, 그 이하  
는 생략하였다. 적변 뉴우톤 방법에 의한 최대화  
반복회수는 지지조건과 하중조건에 따라 다소 차이  
가 있으나 대략 6~7회 정도로 10회 이내에서 해에  
수렴하였다. 이 때 수렴조건은  $F(\lambda)$  값이  $10^{-12}$ 보  
다 작을 때로 하였으며,  $\lambda$ 값의 유효숫자가 6자리  
까지 변화가 없을때까지로 하였다.

Fig. 2에는 단순지지의 경우 하중조건에 따른 모  
멘트분포를 도시하였다. 각각의 그림에는  $\beta$ -norm  
항복조건, Tresca 항복조건 및 Johansen 항복조건  
에 따른 모멘트 분포를 도시하였다. 실선으로 표시  
된 모멘트분포는 위에서부터 각각  $\beta=0, 0.2,$   
 $0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  일때의 여섯가지 경우에 대하  
여 예시하였다. 모멘트의 절대치는  $\beta=1$  일때가

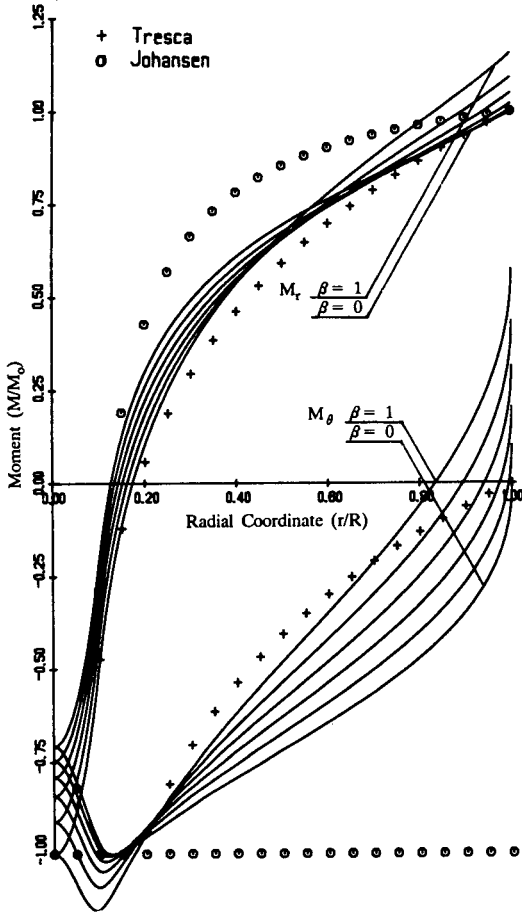
가장 크고  $\beta$ 가 감소함에 따라 모멘트의 크기도 감  
소하는데, 이로부터 항복조건에 적용이 모멘트분포  
에 직접영향을 미침을 알 수 있다. Tresca 항복조  
건의 경우와 Johansen 항복조건의 경우는 모멘트  
가 일치하는데, 그 이유는 Fig. 1과 같이 제 3상한  
에서 두 항복조건이 일치하기 때문이다. 이 경우의  
모멘트 분포는 원점과 지지단에서는  $\beta=1$ 일때의  
Mises 항복조건과 일치하나 그 사이에서는 절대치  
가 Mises 항복조건에 비해 작게 분포하는데,  
그 이유는 Tresca 항복조건이 Mises 항복조건에  
내접하기 때문이다. 이러한 현상은  $\beta$ 값에 따른 모  
멘트분포의 경우  $\beta$ 값이 작을 때 모멘트의 절대치  
가 항상 작은 것으로 쉽게 이해할 수 있다. Fig. 2  
(a), (b), (c)의 모멘트 분포는 하중조건에 따라 매우



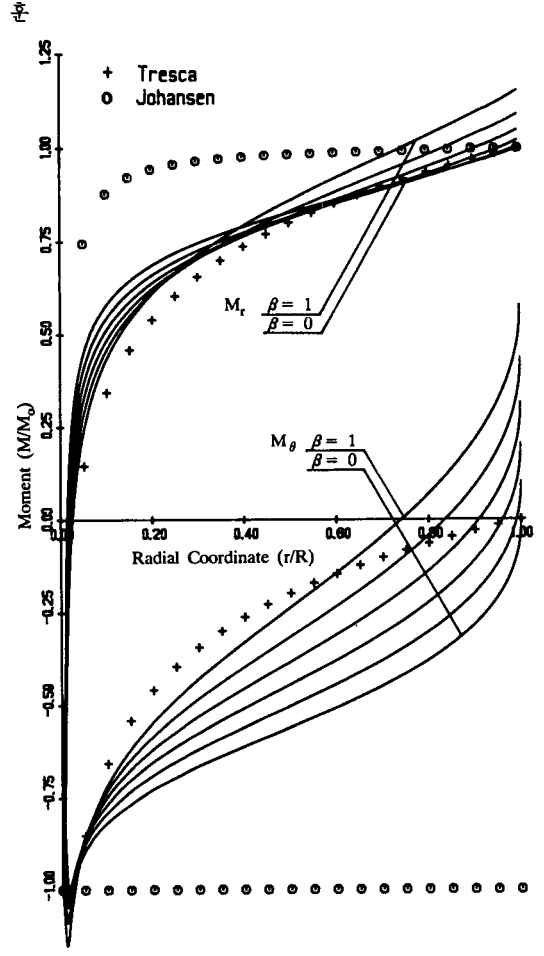
(a)  $a/R = 1.0$



(b)  $a/R = 0.5$



(c)  $a/R = 0.1$



(d)  $a/R = 0.01$

Fig. 3 Moment distributions in clamped circular plates with size of circular loadings

다르게 됨을 알 수 있다. 전 영역에 균일하중이 가해지는 경우에는  $M_r$ 이 평탄하게, 단순증가함을 알 수 있으나, 하중이 원점으로 집중됨에 따라 모멘트 분포는 원점부근에서 급격한 증감을 보여 변곡점을 나타내며 변화하기 시작하여, 하중이 거의 원점에 집중하중으로 가해질 때에는 원점부근에서만 모멘트의 변화가 일어나며 지지단으로 가면서는 거의 변화가 없는 분포를 얻게 된다. 이는 모멘트에 대한 하부조건만이 부과되었고 전단력에 대한 항복조건은 부과되지 않았기 때문이기도 하지만, 집중하중을 받고 있는 평판은 전단력이 매우 커져서 안전도가 없음을 보여준다. 따라서, 하중 지지성능도 매우 낮을 것을 예측할 수 있으며 실제 Fig. 4의 극한하중이 집중하중이 되면서 급격히 감소함을 알

수 있다.

Fig. 3에는 고정단의 경우 하중조건에 따른 모멘트분포를 도시하였다. 각각의 그림에 여러가지 항복조건에 따른 모멘트분포를 예시한 것은 단순지지의 경우와 같다. 이 경우에는 원점과 고정단의 모멘트값이 항복조건에 따라 다르게 된다. 특이할 사항은 모멘트의 절대치분포가  $\beta$ 값이 작은 경우에도  $\beta$ 값이 큰 경우보다 커진다는 것이다. 즉,  $\beta$ 값이 작아도 모멘트 절대치가 커지는 점이  $M_r$ 과  $M_\theta$ 에 공히 발생한다는 것이다. Fig. 3 (a), (b), (c)의 모멘트분포는 단순지지의 경우와 같이 하중이 원점으로 집중됨에 따라 모멘트분포는 원점부근에서 급격한 변화를 보이나 단순지지의 경우보다는 변화가 완만한데, 이로부터 고정단의 경우 고정된 끝단에

시의 하중지지역할이 크다는 것을 알 수 있다. 이와같은 모멘트의 분포로부터 고정단의 경우에 단순 지지의 경우보다 큰 하중을 지지할 수 있음을 알 수 있다. 그 이유는 모멘트의 증가도와 기울기가 단순지지의 경우보다 고정단의 경우가 크고, 따라서 보다 큰 전단력을 지탱하고 있기 때문이다. 이 결과는 실제로 Fig. 4에 잘 나타나 있다.

Fig. 4에는 각각의 하중조건과 지지조건에 따른 극한하중을  $\beta$ -norm 항복조건, Tresca 항복조건 및 Johansen 항복조건의 경우에 대하여 도시하였다. 균일하중인 경우에는 고정단의 경우에 단순지지 경우의 극한하중보다 약 2배 이상 하중지지능이 있음을 직관적으로 알 수 있다. 하중이 점점 원점으로 집중됨에 따라 하중지지능은 점점 감소함을 알 수 있으며  $a/R=0.2$  이하에서는  $\beta$ -norm의 경우  $\beta$ 값이 작음에도 불구하고 극한하중은 더 커짐을 알 수 있다. 이 결과로도 고정단의 경우 고정

단에 분포되는 모멘트와 그에 따른 항복조건이 중요한 인자임을 알 수 있으며, 고정단에서의 하중지지 역할이 중요함을 알 수 있다. 하중이 원점에 집중하면 고정단인 경우의 하중지지능은 거의 단순 지지의 경우와 같게 되며, 그 이유는 해석에서 전단력에 대한 항복조건을 부과하지 않았고, 원점에서의 전단력이 거의 무한대가 되기 때문이다. 따라서, 정확한 설계를 위하여는 해석에 전단력에 대한 항복조건을 부가하여야 하나, 본 해석은 하계해이므로 집중하중의 경우 고정단에서의 극한하중을 단순지지의 경우와 같게 보고 설계에 사용하는 것이 안전하다 하겠다. 한가지 특이할 사항은 Johansen 항복조건인 경우에는 집중하중의 경우에 극한하중이 단순지지 경우의 약 2배가 유지됨을 알 수 있다. 일반적으로 콘크리트 구조물에는 Johansen 항복조건을 부과하는 것이 타당하므로 콘크리트 구조물에는 이 수치를 적용하여 설계하여도 무방할 것이다. Fig. 4에 도시된 극한하중은 하계해이므로 평판이 소성 붕괴되기전까지 지지할 수 있는 하중의 하한 값을 구한 것이다. 물론 상기 하계해는 거의 정해에 가까우므로 상기 극한하중에 추가로 지지할 수 있는 여유하중은 없다고 보는 것이 설계에 안전할 것이다. 요컨대, 상기해는 하계해이므로 구조설계시에 안전계수와 함께 직접사용이 가능한 수치이다.

5. 결 론

본 논문에서는 현재까지 정립된 극한해석이론을 근간으로 새로운 해석방법을 도입하여 극한 해석에 대한 일반적 해석방법을 제한할 수 있는 기초를 마련하였다. 하계해석은 구조물의 안전 설계를 위한 가장 편리한 방법이므로, 이에 대한 해석방법으로 유한 차분법과 적변 뉴우튼 방법을 적용하여 비선형문제를 수치계산에 의하여 해석하였다. 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 균일 및 집중분포하중을 받는 원형평판에 관한 하계해석이론을 수립하였다.
- (2) 유도된 공식으로부터 수치계산을 위하여 유한 차분법과 적변 뉴우튼 방법을 적용 하였다.
- (3) 항복조건식으로  $\beta$ -norm 항복조건식, Tresca 항복조건식, Johansen 항복조건식 등을 적용하여 각종재질과 구조의 평판해석에 있어서 소성역에서의 물성을 적절히 묘사할 수 있는 기초를 수립하였

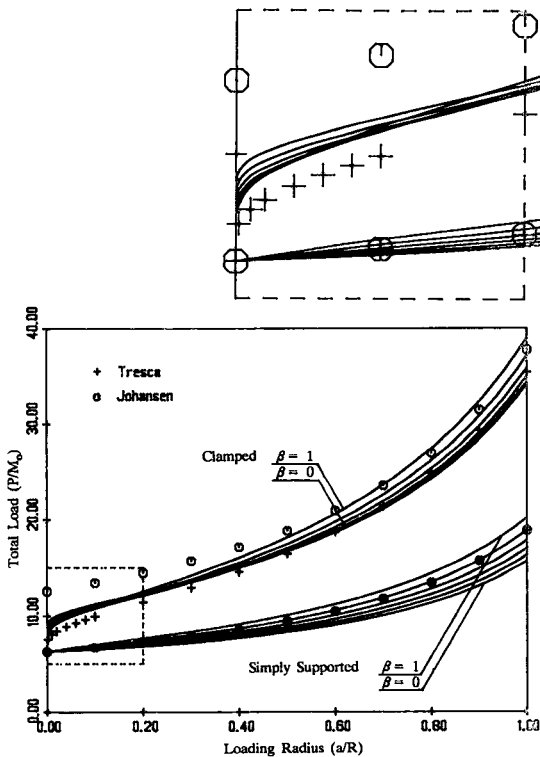


Fig. 4 Variation of total collapse load with size of circular loading : (Simple and built-in support conditions) (Tresca, Johansen, and  $\beta$ -norm yield conditions)



다. 수치해석에 의하면 일반적으로 모멘트 공간에서의 항복구역이 클수록 극한 하중값이 커지는 것을 알 수 있었다.

(4) 원형집중하중을 받는 원형평판 문제를 해석하여 하중의 분포형태에 따른 극한하중값과 상응하는 모멘트 분포를 구하여 원형평판으로 간주할 수 있는 구조물과 기계요소의 설계기준을 마련하였다.

특히, 하계해석에 있어서 새로운 해석기법과 수치계산방법으로, 종래의 탄소성해석에 소요되던 많은 경비와 시간을 절약하여, 강도 계산에 필요한 결과물을 얻을 수 있는 일반적 해석방법을 수립하였다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구지원(과제번호: 873-0910-002-1)으로 수행된 내용의 일부이며, 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press, Oxford.
- (2) Drucker, D.C., Prager, W. and Greenberg, H.J., 1952, "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", Q. Appl. Math., Vol. 9, pp. 381~389.
- (3) Hopkins, H.G. and Prager, W., 1953, "The Load Carrying Capacities of Circular Plate", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 1, pp. 19~30.
- (4) Hopkins, H.G. and Wang, A.J., 1954, "Load Carrying Capacities for Circular Plates of Perfectly-Plastic Material with Arbitrary Yield Condition", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 3, pp. 117~129.
- (5) Eason, G., 1958, "Velocity Fields for Circular Plates with the von Mises Yield Condition", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, pp. 231~235.
- (6) Lance, R.H. and Onat, E.T. 1962, "A Comparison of Experiments and Theory in the Plastic Bending of Circular Plates", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 10, pp. 301~311.
- (7) Mura, T., Kao, J.S. and Lee, S.L., 1964, "Limit Analysis of Circular Orthotropic plates", J. Engng. Mech. Div. proc. A.S.C.E. Paper 4109, pp. 375~395.
- (8) Markowitz, A.M. and Hu, L.W., 1964, "Plastic Analysis of Orthotropic Circular Plates", J. Engng. Mech. Div. Proc. A.S.C.E. Paper 4098, pp. 251~292.
- (9) Braestrup, M.W., 1970, "Yield-Line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs", Mag. Concrete Research, Vol. 22, No. 71, pp. 99~106.
- (10) Maier, G., Zavelani-Rossi, A. and Benedetti, D., 1972, "A Finite Element Approach to Optimal Design of Plastic Structures in Plane Stress", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 4, pp. 455~473.
- (11) Little, G.H., 1977, "Rapid Analysis of Plate Collapse by Live-Energy Minimisation", Int. J. Mech. Sci., Vol. 19, pp. 725~744.
- (12) Strang, G., Matthies, H. and Temam, R., 1978, "Mathematical and Computational Methods in Plasticity", IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solids, pp. 20~28.
- (13) Christiansen, E., 1980, "Limit Analysis in Plasticity as a Mathematical Programming Problem", Calcolo, Vol. 17, pp. 41~65.
- (14) Temam, R. and Strang, G., 1980, "Duality and Relaxation in the Variational Problems of Plasticity", J. Mécanique, Vol. 19, No. 3, pp. 493~527.
- (15) Christiansen, E., 1980, "Limit Analysis for Plastic Plates", SIAM J. Math. Anal., Vol. 11, No. 3, pp. 514~522.
- (16) Yang, W.H., 1981, "Minimization Approach to Limit Solutions of Plates", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 28, pp. 265~274.
- (17) Yang, W.H., 1987, "A Duality Theorem for Plastic Plates", ACTA Mechanica 69, pp. 177~193.
- (18) Johansen, K.W., 1962, "Yield Theory", Cement and Concrete Association.