

〈論 文〉

고차 전단 변형이론에 의한 복합재료 적층판의 저속 충격응답

이 영 신* · 박 응**

(1990년 2월 19일 접수)

Low-Velocity Impact Response of Laminated Composite Plates Using a Higher Order Shear Deformation Theory

Young-Shin Lee and Oung Park

Key Words : Impact(충격), Laminated(적층), Finite Element Method(유한요소법), Higher-Order Shear Deformation(고차 전단 변형)

Abstract

A C^0 continuous displacement finite element method based on a higher-order shear deformation theory is employed in the prediction of the transient response of laminated composite plates subjected to low-velocity impact. A modified contact law was applied to calculate the contact force during impact. The discrete element chosen is a nine-noded quadrilateral with 5 degree-of-freedom per node. The Wilson- θ time integration algorithm is used for solving the time dependent equations of the impactor and the central difference method was adopted to perform time integration of the plate. Numerical results, including the contact force history, deflection, and velocity history, are presented. Comparisons of numerical results using a higher order theory and a first-order theory show that using a higher order theory provides more accurate results. Effects of boundary condition, impact velocity, and mass of the impactors are also discussed.

1. 서 론

최신 복합재료 적층판은 높은 비강도(specific strength)와 설계요구조건에 부합되게 적층배열을 적절히 선택할 수 있는 유용성 때문에 경량화가 요구되는 자동차, 항공기 및 우주 비행체의 구조물에 널리 적용되고 있다.

그러나 복합재료는 소성변형을 하는 금속재료에 비하여 외부의 충격에 대한 저항성이 낮아 저속의 충격하중에서도 섬유 및 기지파단, 층간 분리와 같은 외·내부의 손상이 발생될 수 있다.

이에 따라 복합재료의 저속 충격 거동에 대한 실험 및 해석기법에 관한 연구가 활발히 진행되어 왔다^(1~15).

Sun과 Chattopadhyay⁽¹⁾는 직교 이방성 평판의 중앙에 작용하는 충격하중을 집중하중으로 가정하고 Whitney와 Pagano⁽²⁾가 개발한 판의 지배 방정식에 Hertz의 접촉 법칙으로부터 계산된 접촉력을 적용하여 단순지지된 적층판의 해석적인 해를 구하였다. 그 후 Dobyns⁽³⁾는 충격 하중이 임의의 작은 사각형에 균일 분포되어 짧은 시간에 작용하였다가 사라지는 형태로 가정하여 접촉 면적을 고려하였다.

Ramkumar⁽⁴⁾는 적층판에 작용하는 하중을 충격 시험 자료로부터 얻었고 접촉 면적은 시간에 따라

* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

** 정회원, 대전기계창

변화하는 사각형 형태로 가정하였다.

Shivakumar 등⁽⁶⁾은 충격 하중을 받는 평판을 등가 스프링, 질량 모델로 단순화 시키고 준동방성 적층판의 전단변형과 대치짐을 고려하여 그 결과를 Greszczuk⁽⁶⁾의 실험치와 비교하였다.

Yang과 Sun⁽⁷⁾은 접촉력에 대한 정적 실험으로부터 복합재료의 압입(indentation)에 대한 하중경로/loading path)와 해중경로(unloading path)가 달라 Hertz의 관계식이 복합 적층판에 균일하게 적용될 수 없음을 보였다.

Sun과 Tan⁽⁸⁾은 개선된 접촉력 관계식을 사용하여 자유 경계단을 갖는 적층판의 충격 응답을 해석하였고, 초기 응력을 받는 단순지지된 적층판⁽⁹⁾, 원형으로 분포된 충격 하중을 받는 고정 경계조건을 갖는 적층판⁽¹⁰⁾의 충격거동을 2차원 유한 요소를 사용하여 수치 해석 하였다.

한편 Lee⁽¹¹⁾는 4변 고정인 적층판을 3차원 유한 요소로 분할 하고, 접촉력의 시간에 따른 변화량을 아는 값으로 가정하였으며, 시간적분은 중앙차분법(central difference method)을 사용하여 충격 거동을 연구하였다.

Chang⁽¹²⁾등은 4변 고정/단순지지된 적층판을 3차원 8절점 요소를 사용하여 충격자의 속도, 변위 및 판의 변위와 응력 분포에 대한 연구 결과를 제시하였는데 시간 적분은 Newmark Scheme을 사용하였다.

국내에서는 홍창선⁽¹³⁾ 등의 대치짐을 고려한 복합재료 적층판의 저속 충격 연구, 김규남^(14,15) 등의 유한요소법에 의한 적층 복합보의 충격해석 및 적층판의 충격 응력과 파동 전파 현상 연구가 있다.

이들 연구 결과에서 복합 적층판의 저속 충격에 대한 2차원 해석에서는 Mindlin의 판이론을 사용하였는데 Mindlin의 판이론에서는 횡방향 수직변형률/응력의 영향을 무시하였고, 판의 두께에 걸쳐서 횡전단 변형률의 변화가 일정하게 되어 이를 보정하기 위하여 전단 보상계수(shear correction factor)의 도입이 필요하게 되었다. 그런데 전단보상 계수는 재료의 물리적 특성에 관계되는 값으로 Whitney⁽²⁾는 5/6가 3차원 탄성해에 접근함을 보였다.

Christensen⁽¹⁶⁾ 등은 전단보상 계수의 도입이 없이 3차원 해석의 정밀도에 접근하는 고차 변형 모델을 사용하여 복합 적층판의 폐행해를 제안하였

다. 이들이 가정한 변위 모델은 횡방향 수직 응력 및 변형률의 영향을 고려하였고 그들의 실제적 변화를 보였다. 그러나 이 이론에서는 판의 경계면에서 횡전단 응력 및 변형률이 존재한다.

Reddy⁽¹⁷⁾는 판의 경계면에서 횡전단 응력 및 변형률이 0인 조건을 만족하며 변분적으로 연속한 변위 및 평형 방정식을 가상변위의 원리로부터 유도하였다. 그 후 Reddy⁽¹⁸⁾는 자신이 제안한 고차 변위 모델을 사용하여 변위 유한요소 모델을 제시하였다. 그런데 그의 변위 유한 요소는 요소의 경계에서 변위와 기울기가 연속인 C^1 연속인 보간함수를 사용하므로 유한요소 수식화가 복잡한 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 Reddy⁽¹⁹⁾는 혼합 유한요소 수식화 역시 제시하였다.

Kant^(20,21) 등은 판의 변위항을 판의 두께에 대하여 Taylor 급수로 전개하여 유도한 고차 변위 모델을 사용하여 C^0 연속인 고차변위 유한요소 모델을 제안하였고 복합 적층판의 정적 해석 및 천이 응답 해석에 적용하여 그의 고차 이론이 일차 이론에 비하여 정밀도가 높음을 보였다. 그런데 국내외적으로 Mindlin의 판이론보다 정밀도가 우수한 고차 전단 변형 이론을 이용한 복합재료의 저속 충격 거동에 관한 연구는 보이지 않는다. 따라서 본 연구에서는 Kant 등이 제안한 고차판이론의 C^0 연속 변위 유한요소 모델을 사용하여 충격자와 적층판의 저속 충격 응답에 대하여 연구하여 그 결과를 Mindlin의 판이론에 의한 계산 결과와 비교하고, 경계 조건의 영향 및 충격자의 충격속도, 질량변화에 대한 접촉력의 변화를 고찰하고자 한다.

2. 해석 모델

본 연구에서 해석하고자 하는 복합 적층판, 충격자의 기하학적 형상 및 좌표계는 Fig. 1과 같다.

적층판은 길이 L , 폭 W 이고, 두께가 h 인 4각 판이다.

적층판은 N 개의 단층으로 구성되어 있고 적층판의 기준축과 단층의 섬유방향 주축은 적층각 θ 를 갖는다.

각 단층은 완전하게 접촉되어 있다고 가정하며 4각판은 경계에서 구속되어 있거나 자유단이다.

충격자는 질량이 m 이고 속도 v 로 판의 중앙에 충격된다.

충격자 끝단은 구형이며 반경은 r 이다.

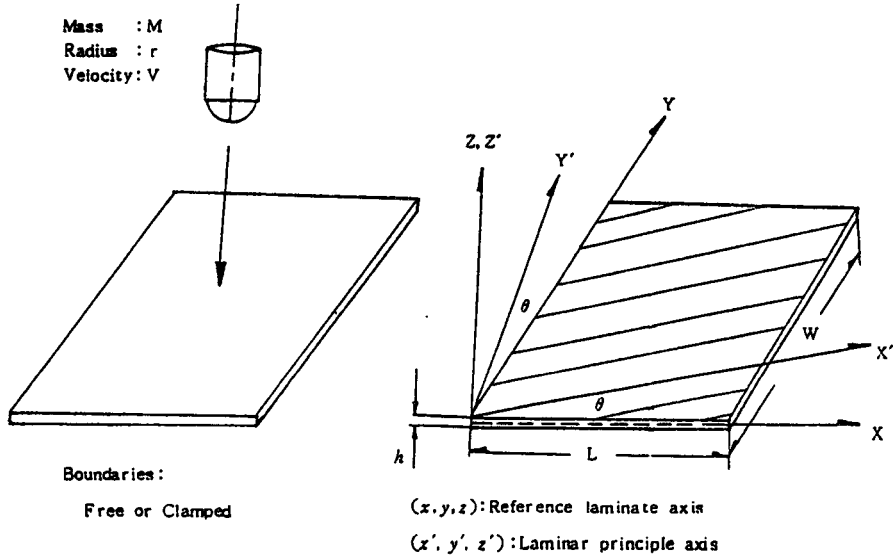


Fig. 1 Description of the problem and the coordinate system

3. 수 식 화

3.1 복합재료 적층판의 전단변형 이론

대칭 적층판의 고차전단 변형 이론은 아래와 같은 변위 모델을 가정하여 유도된다⁽²⁰⁾.

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= Z\theta_x(x, y, t) + Z^3\theta_x^*(x, y, t) \\
 V(x, y, z, t) &= Z\theta_y(x, y, t) + Z^3\theta_y^*(x, y, t) \\
 W(x, y, z, t) &= W_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

여기서 t 는 시간, W_0 는 중앙면의 횡방향 변위 θ_x, θ_y 는 y 와 x 축에 대한 중앙면에 수직인 단면의 회전량을 각각 나타낸다.

θ_x^*, θ_y^* 는 Taylor급수 전개에서 급항을 고려한 고차항으로 역시 중앙면에서 정의된다.

횡방향 충격 하중을 받는 경우 급항에 의한 변형이 내평면 변위에 비하여 큰 값을 갖기 때문에 식 (1)에서는 내평면 변위를 무시하였다. 식 (1)의 변위 관계식을 탄성이론의 변형률-변위 관계식에 대입하면 변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZK_x + Z^3K_x^* & ZK_{xy} + Z^3K_{xy}^* \\ ZK_y + Z^3K_y^* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x + Z^2\phi_x^* \\ \phi_y + Z^2\phi_y^* \end{bmatrix}
 \tag{2a}$$

여기서

$$(K_x, K_y, K_{xy})^t = \left[\frac{\partial\theta_x}{\partial x}, \frac{\partial\theta_y}{\partial y}, \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \right]^t$$

$$(K_x^*, K_y^*, K_{xy}^*)^t = \left[\frac{\partial\theta_x^*}{\partial x}, \frac{\partial\theta_y^*}{\partial y}, \frac{\partial\theta_x^*}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y^*}{\partial x} \right]^t
 \tag{2b}$$

$$(\phi_x, \phi_y, \phi_x^*, \phi_y^*)^t = \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x, \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y, 3\theta_x^*, 3\theta_y^* \right]^t$$

t 는 전치행렬을 나타낸다.

L 번째 단층의 응력-변형률 관계식을 적층판 좌표축 (Fig. 1 참고)으로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^L = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^L \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}
 \tag{3a}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^L = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^L \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}
 \tag{3b}$$

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^t \\
 \{\epsilon\} &= \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t
 \end{aligned}
 \tag{3c}$$

여기서 수정축소 강성계수 (transformed reduced stiffness) \bar{Q}_{ij} 는

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\
 \bar{Q}_{33} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33})m^2n^2 \\
 &\quad + Q_{33}(m^4 + n^4) \\
 \bar{Q}_{13} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})m^3n \\
 &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + Q_{33})mn^3
 \end{aligned}$$

$$\bar{Q}_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})m^3n \quad (3d)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{44} - Q_{55})mn \quad (3d)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2, \quad m = \cos\theta, \quad n = \sin\theta$$

이때 Q_{ij} 는 축소강성계수 (reduced stiffness)로서 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{33} = G_{12} \quad (3e)$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

함모멘트와 전단합력은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} M_x & M_x^* \\ M_y & M_y^* \\ M_{xy} & M_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^n \int_{h_L}^{h_{L+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} [Z \ Z^3] dz : \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x^* \\ Q_y & Q_y^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^n \int_{h_L}^{h_{L+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} [1 \ Z^2] dz : \quad (4b)$$

식 (4)를 적분하여 적층판의 합응력-변형을 관계시킬 수 나타내는 행렬식으로 표현하면 식 (5)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} M \\ M^* \\ Q \\ Q^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_b & O \\ O & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K \\ K^* \\ \Phi \\ \Phi^* \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$M = (M_x, M_y, M_{xy})^t, \quad K = (K_x, K_y, K_{xy})^t$$

$$M^* = (M_x^*, M_y^*, M_{xy}^*)^t, \quad K^* = (K_x^*, K_y^*, K_{xy}^*)^t \quad (6)$$

$$Q = (Q_x, Q_y)^t, \quad \Phi = (\Phi_x, \Phi_y)^t$$

$$Q^* = (Q_x^*, Q_y^*)^t, \quad \Phi^* = (\Phi_x^*, \Phi_y^*)^t$$

$$D_b = \sum_{L=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}H_3 & \bar{Q}_{12}H_3 & \bar{Q}_{13}H_3 & \bar{Q}_{11}H_5 & \bar{Q}_{12}H_5 & \bar{Q}_{13}H_5 \\ & \bar{Q}_{22}H_3 & \bar{Q}_{23}H_3 & \bar{Q}_{12}H_5 & \bar{Q}_{22}H_5 & \bar{Q}_{23}H_5 \\ & & \bar{Q}_{33}H_3 & \bar{Q}_{13}H_5 & \bar{Q}_{23}H_5 & \bar{Q}_{33}H_5 \\ \text{Symmetric} & & & \bar{Q}_{11}H_7 & \bar{Q}_{12}H_7 & \bar{Q}_{13}H_7 \\ & & & & \bar{Q}_{22}H_7 & \bar{Q}_{23}H_7 \\ & & & & & \bar{Q}_{33}H_7 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$D_s = \sum_{L=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55}H_1 & \bar{Q}_{45}H_1 & \bar{Q}_{53}H_3 & \bar{Q}_{45}H_5 \\ & \bar{Q}_{44}H_1 & \bar{Q}_{45}H_3 & \bar{Q}_{44}H_5 \\ & & \bar{Q}_{55}H_5 & \bar{Q}_{45}H_5 \\ \text{Symmetric} & & & \bar{Q}_{44}H_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$H_i = \frac{1}{2}(h_{i+1}^2 - h_i^2), \quad i=1, 3, 5, 7 \quad (9)$$

3.2 적층판의 유한요소 분할

전형적인 유한요소 과정을 따라서, 구조물의 천이 응답 해석은 감쇠가 없는 경우 다음 식과 같은 상미분 방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{\mathbf{a}}(t) + K\mathbf{a}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (10)$$

여기서 $\mathbf{a}(t)$ 는 절점의 변위벡터이며 M 는 질량행렬 $\mathbf{P}(t)$ 는 시간에 따라 변화하는 하중벡터, K 는 강성행렬을 나타낸다.

C°연속 유한요소 이론에서, 요소 내에서 연속인 변위 벡터는 식 (11)과 같이 분할할 수 있다.

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^{NE} N_i(x, y) \mathbf{a}_i(t) \quad (11)$$

$N_i(x, y)$ 는 절점 i 에서의 보간(형상) 함수이며 NE 는 요소의 절점 개수, $\mathbf{a}_i(t)$ 는 절점 i 에서의 $\mathbf{a}(t)$ 의 값을 나타낸다.

요소내의 모든 점에서 일반 변위벡터 $\mathbf{a}(t)$ 를 구하면 임의점의 변형을 벡터 $\boldsymbol{\epsilon}$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^{NE} \begin{bmatrix} 0 & \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial y & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial x & N_i & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i / \partial y & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xi}^* \\ \theta_{yi}^* \end{Bmatrix} \quad (12a)$$

식 (12a)를 간단한 형태로 표현하면

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^{NE} B_i \mathbf{a}_i(t) \quad (12b)$$

식 (12b)에서 B_i 는 변위와 변형을 관계를 나타내는 행렬이다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{K_x, K_y, K_{xy}, K_x^*, K_y^*, K_{xy}^*, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_x^*, \Phi_y^*\}^t \quad (12c)$$

강성행렬 K^4 는 식 (13)과 같이 표현된다.

$$K^4 = \int (B^t D_b B + B^t D_s B) dA \quad (13)$$

식 (10)의 질량행렬 M 는 다음 식으로 주어진다.

$$M = \int N^t \bar{m} N dA \quad (14a)$$

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} I_1 & & & 0 \\ & I_2 & & \\ & & I_2 & \\ & & & I_3 \\ 0 & & & & I_3 \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} (1, Z^2, Z^3) \rho^t dz \quad (14c)$$

포물선등계수(parabolic isoparametric) 유한요소를 사용하여 요소 분할을 하는 경우에 질량 행렬 M 는 대각 행렬이 아니므로 등가질량(lumped mass) 기법을 사용한다.

질량 행렬의 대각화는 다음과 같은 순서로 수행한다.

- (가) 연속 질량 행렬의 대각요소를 계산: $M_{ii}^e = \int N^T \bar{m} N dA$
- (나) 요소의 총 질량 계산: $M^e = \int \rho dV$
- (다) 대각요소의 합 S 를 구한다.
- (라) 질량 행렬의 대각요소 M_{ii}^e 를 M^e/S 의 비로 곱하여 요소의 질량을 보존한다.

3.3 충격자의 유한요소 방정식

충격자는 요소의 절점당 2자유도를 갖는 고차 막대요소를 이용한다. 요소의 변위함수는 다음과 같이 선택한다.

$$U = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (15)$$

계수 a_i 를 절점의 자유도에 대하여 계산하여 식 (15)에 대입하면

$$U = \{N\}^T \{a_r\}_i \quad (16)$$

$$\{a_r\}_i^T = \{(U)_1, (\partial u/\partial x)_1, (U)_2, (\partial u/\partial x)_2\} \quad (17)$$

식 (17)은 요소의 절점 자유도 행렬을 나타내며 형상함수 $\{N\}^T$ 는 식 (18)로 표현된다.

$$\{N\}^T = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\} \quad (18)$$

$$f_1(x) = (1-x/L)^2(1+2x/L)$$

$$f_2(x) = x(1+2x/L) \quad (19)$$

$$f_3(x) = x^2/L^2(3-2x/L)$$

$$f_4(x) = x^2/L(x/L-1)$$

변분 원리로부터 요소의 운동 방정식을 구하면 식 (20)과 같은 상미분 방정식으로 표현된다.

$$m_r \ddot{a}_r(t) + K_r a_r(t) = P_r(t) \quad (20)$$

$$P_r = \{F, 0, 0, \dots, 0\} \quad (21)$$

식 (21)의 F 는 충격자의 충격에 의한 접촉력을 나타낸다.

3.4 접촉력의 수식화

충격 하중을 받는 복합 적층판의 접촉력에 대한 일반적인 관계식은 아직 밝혀져 있지 않다.

따라서 충격거동을 해석할 때 충격 하중을 가정하여 해석하거나 Hertz의 정적 접촉력과 압입 관

계식을 적용하기도 한다.

Tan⁽⁸⁾은 정적 압입 시험으로부터 하중이 증가하는 하중경로(loading path), 하중이 감소되는 해중경로(unloading path)에 대한 접촉력 관계식을 도출하였다.

본 연구에서는 Tan의 개선된 접촉력 관계식을 적용한다.

하중경로일때의 접촉력:

$$F = ka^n \quad (22)$$

해중경로일때의 접촉력:

$$F = F_m \left[\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^q \quad (23)$$

식 (23)에서 α_0 는 영구 압입을 나타내며 α_m 은 해중시작 압입값이며 F_m 은 α_m 에 해당하는 접촉력을 나타낸다.

식 (23)을 간략화하면

$$F = S(\alpha - \alpha_0)^q \quad (24)$$

$$S = F_m / (\alpha_m - \alpha_0)^q \quad (25)$$

$$\alpha_0 = S_p(\alpha_m - \alpha_p) \quad (26)$$

α_p 는 영구 변형이 발생하는 임계값으로 α_p 이상이서 해중을 가하면 영구 변형 α_0 가 생기고 그 이하에서는 영구 변형이 발생하지 않는다(Fig. 2).

식 (26)과 식 (22)를 식 (24)에 대입하면 다음 식이 유도된다.

$$S = \frac{ka_m^{3/2}}{[(1-S_p)\alpha_m + S_p\alpha_p]^q} \quad \alpha_m \geq \alpha_p \quad (27)$$

$$S = \frac{ka_m^{3/2}}{\alpha_m} \quad \alpha_m < \alpha_p \quad (28)$$

재하중(reloading)을 가할 때의 하중 경로는 다음

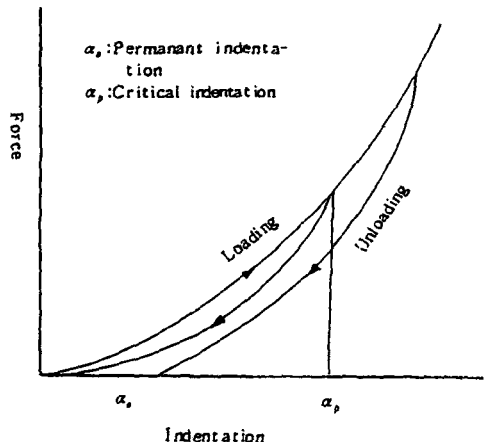


Fig. 2 Schematic loading and unloading curves

식으로 표현된다.

$$F = k_1(\alpha - \alpha_0)^p$$

여기서 $p=3/2$ 이고

$$k_1 = F_m / (\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}$$

(29)

3.5 프로그램의 설명

적층판과 충격자의 질량 행렬, 강성 행렬을 입력 자료를 이용하여 계산한 다음 평판의 운동방정식 식 (10)과 충격자의 운동방정식 식 (20)을 접촉력과 압입의 관계식과 연계하여 적층판의 충격 문제를 수치 해석한다. 적층판의 운동방정식 식 (10)에서 질량 행렬을 대각 행렬로 변환하였으므로 운동방정식의 시간 적분은 중앙차분법을 사용하면 수치적분이 간편하다^(20,22). 식 (10)을 중앙차분법의 형태로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^{n+1} = & ((\Delta t)^2 / M_{ii}) \{ -\sum_{j=1}^{NE} K_{ij} \mathbf{a}_j^n + \mathbf{P}_i^n \} \\ & - \mathbf{a}_i^{n-1} + 2\mathbf{a}_i^n \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)에서 \mathbf{a}_0 와 $\dot{\mathbf{a}}$ 가 초기 조건에서 주어지면 \mathbf{a}_i^0 는

$$\dot{\mathbf{a}}_i^0 = (\mathbf{a}_i^+ - \mathbf{a}_i^-) / 2\Delta t \quad (31)$$

식 (31)을 식 (30)에 대입하여 \mathbf{a}_i^{-1} 을 소거하여 정리하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^1 = & ((\Delta t)^2 / 2M_{ii}) \{ -\sum_{j=1}^{NE} K_{ij} \mathbf{a}_j^0 + \mathbf{P}_i^0 \} \\ & + \mathbf{a}_i^0 + \dot{\mathbf{a}}_i^0 \Delta t \end{aligned} \quad (32)$$

그런데 충격과 적층판은 Fig. 3과 같이 $t=0$ 일 때 접촉상태로 있다고 가정하면 적층판의 변위와 속도는 0이 된다.

충격자의 운동방정식 적분은 Wilson- θ 기법을 사용한다.

Wilson- θ 기법에서는 가속도는 미소 시간 증분 Δt 의 변화에 대하여 선형적으로 변화한다고 가정한다⁽²²⁾.

충격자의 운동방정식 식 (20)을 Wilson- θ 로 계산하기 위한 초기 계산과정은 Table 1에 정리하였다.

Table 1의 계산 결과를 사용하여 $t + \Delta t$ 에서 충격자의 유효 하중을 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_i^{t+\Delta t} = & P^t + \theta(P_i^{t+\Delta t} - P^t) \\ & + M_r(a_0 \mathbf{a}_i^t + a_2 \dot{\mathbf{a}}_i^t + 2\ddot{\mathbf{a}}_i^t) \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 a_0, a_2, θ 는 Wilson- θ 의 적분 상수를 나타내고, $\mathbf{a}_r, \dot{\mathbf{a}}_r, \ddot{\mathbf{a}}_r$ 는 충격자의 변위, 속도, 가속도 벡터이며 M_r 는 충격자의 질량 행렬이다. 그

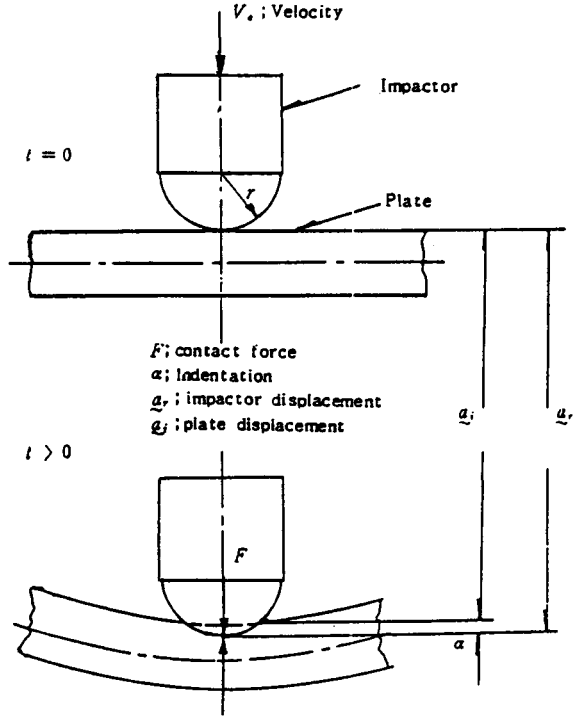


Fig. 3 Central transverse impact of an elastic rod

Table 1 Step-by-step solution using Wilson- θ ⁽²²⁾

A. Initial calculations :

1. Form stiffness matrix K , mass matrix M
2. Initialize $\mathbf{a}_i^0, \dot{\mathbf{a}}_i^0, \ddot{\mathbf{a}}_i^0$
3. Select time step Δt and calculate integration constants, $\theta=1.4$ (usually)

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}, \quad a_2 = \frac{3}{\theta \Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}, \quad a_5 = \frac{-a_2}{\theta}, \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}, \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2}$$

$$a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

4. Form effective stiffness matrix \bar{K} :

$$\bar{K} = K + a_0 M$$

5. Triangularize \bar{K} ; $\bar{K} = LDL^T$

런데 식 (33)을 계산하기 위해서는 $P_i^{t+\Delta t}$ 의 값을 먼저 계산하여야 한다. $P_i^{t+\Delta t}$ 를 계산하기 위해 $t + \Delta t$ 에서의 충격자의 변위를 다음 식으로 가정하면,

$$\mathbf{a}_r^{t+\Delta t} = \mathbf{a}_r^t + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_r^t + \frac{1}{3} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_r^t + \frac{1}{6} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_r^{t+\Delta t} \quad (34)$$

식 (34)와 식 (31)로부터 압입량 α 는 다음과 같이 계산된다(Fig. 3 참고).

$$\alpha = \alpha_r^{t+\Delta t} - \alpha_i^{t+\Delta t} \quad (35)$$

식 (35)에서 계산된 압입량 α 를 하중 해중 경로에 따른 접촉력과 압입의 관계식 식 (22), (23), (29)에 적용하면 $P_i^{t+\Delta t}$ 를 구할 수 있다.

$t + \theta\Delta t$ 에서 충격자의 변위를 식 (36)으로부터 계산하여

$$K\alpha_r^{t+\theta\Delta t} = LDL^T \alpha_r^{t+\theta\Delta t} = P_i^{t+\theta\Delta t} \quad (36)$$

식 (37)에 대입하면 $t + \Delta t$ 에서 충격자의 가속도를 구할 수 있다.

$$\ddot{\alpha}_r^{t+\Delta t} = a_4(\alpha_r^{t+\theta\Delta t} - \alpha_r^t) + a_5\dot{\alpha}_r^t + a_6\ddot{\alpha}_r^t \quad (37)$$

보다 정확한 해를 구하기 위하여 식 (37)에서 계산된 $\ddot{\alpha}_r^{t+\Delta t}$ 를 변위 가정식, 식 (34)의 우측 끝항에 대입하여 식 (35), (36), (37) 과정을 반복하여 전 단계에서 계산된 충격자의 변위와 현 단계에서 계산된 충격자의 변위값의 차이가 허용치를 만족할 때까지 계산한다.

$t + \Delta t$ 에서 충격자의 속도, 변위는 다음과 같다.

$$\dot{\alpha}_r^{t+\Delta t} = \dot{\alpha}_r^t + a_n(\dot{\alpha}_r^{t+\Delta t} + \ddot{\alpha}_r^t) \quad (38)$$

$$\alpha_r^{t+\Delta t} = \alpha_r^t + \Delta t \dot{\alpha}_r^t + a_8(\ddot{\alpha}_r^{t+\Delta t} + 2\ddot{\alpha}_r^t) \quad (39)$$

프로그램의 순서도는 Fig. 4에 나타내었다.

4. 수치계산 및 결과고찰

본 연구의 유용성을 확인하기 위하여 수치계산에 사용한 적층판은 Tan⁽⁸⁾ 등이 사용한 $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]$ 의 적층배열을 갖는 Graphite/Epoxy 복합적층판이다.

적층판의 형상은 152.4mm×102mm×2.69mm의 4각 평판이며 재료의 물성치는 Table 2와 같고 접촉력 계산에 사용된 계수들은 Table 3에 정리하였다. 적층판은 요소당 절점수가 9개인 등계수사변형 요소를 사용하여 판 전체를 4×4, 8×8 요소로 분할하였고, 요소 분할에 따른 수렴성 검증을 위하여 16×16요소의 경우도 계산하였다.

충격자는 요소당 절점수가 2개인 막대 (rod) 요소를 사용하였고 20개의 요소로 분할하였다(Fig. 5).

본 연구에 사용한 전산기는 CYBER180-860이며

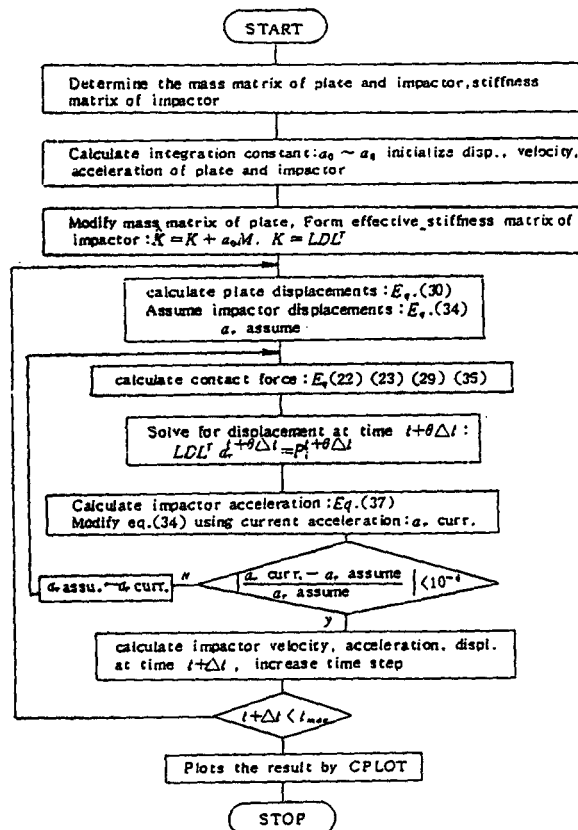


Fig. 4 Flow chart for impact analysis

Table 2 Material properties of the composite plate and impactor⁽⁹⁾

Ply thickness h ; 0.01346cm
Density ρ ; $1.58 \times 10^{-5} \text{N} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$
Logitudinal Young's modulus E_1 ; $120.0 \times 10^5 \text{N}/\text{cm}^2$
Transverse Young's modulus E_2 ; $7.9 \times 10^5 \text{N}/\text{cm}^2$
Shear modulus $G_{12} = G_{13} = G_{23}$; $5.5 \times 10^5 \text{N}/\text{cm}^2$
Poisson's ratio ν ; 0.30
Impactor Young's modulus E ; $205.7 \times 10^5 \text{N}/\text{cm}^2$

Table 3 Contact coefficients of specimen $(0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ)$ ⁽⁸⁾

Average contact coefficient
k ; $1.413 \times 10^6 \text{N}/\text{cm}^{1.5}$
Power index
q ; 2.5
Critical indentation
α_p ; $1.667 \times 10^{-3} \text{cm}$
Constant
S_p ; 0.094

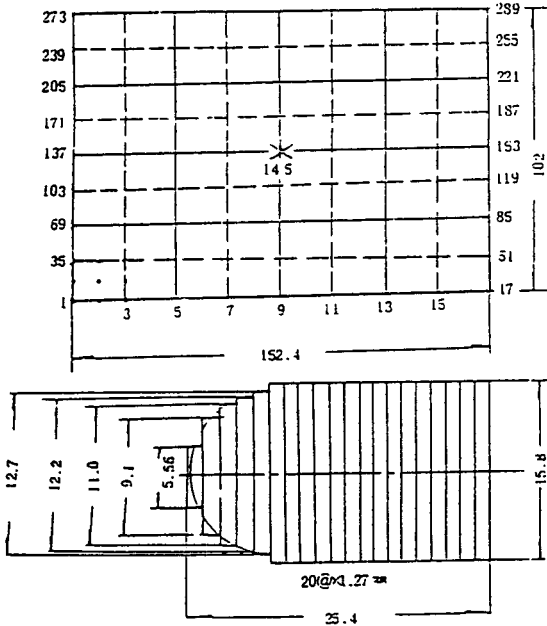


Fig. 5 Finite element mesh for laminated plate and elastic rod

시간증분을 $0.2\mu\text{sec}$ 로 하여 단순지지 적층판의 경우에는 $800\mu\text{sec}$ 까지 계산하였고 나머지는 $600\mu\text{sec}$ 까지 계산하였다.

요소의 증감에 따른 접촉력의 변화를 고찰하기 위하여 4변 고정 경계단을 갖는 적층판을 4×4 , 8×8 , 16×16 요소로 분할 하여 계산한 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 적층판에 작용한 충격에너지는 요소의 증감에 상관없이 거의 일치하고 있으나 4×4 요소의 경우는 접촉력 및 접촉시간이 8×8 요소, 16×16 요소에 비하여 상당한 차이를 보였다. 이는 동일 판의 요소분할 갯수를 감소시키면 판의 강성이 실제보다 높게 해석되는데 따른 것이라 판단된다. 한편 8×8 요소와 16×16 요소는 접촉력과 접촉시간 및 2차 접촉 발생시간이 거의 일치하고 있음을 보여준다. 따라서 적층판을 8×8 요소로 분할하여 계산하여도 결과는 양호함을 알 수 있다.

Fig. 7은 참고문헌 (9)에서 사용한 입력자료를 이용하여 단순지지 적층판의 접촉력을 일차이론 및 고차이론으로 계산한 결과를 나타낸 것이며, 이 접

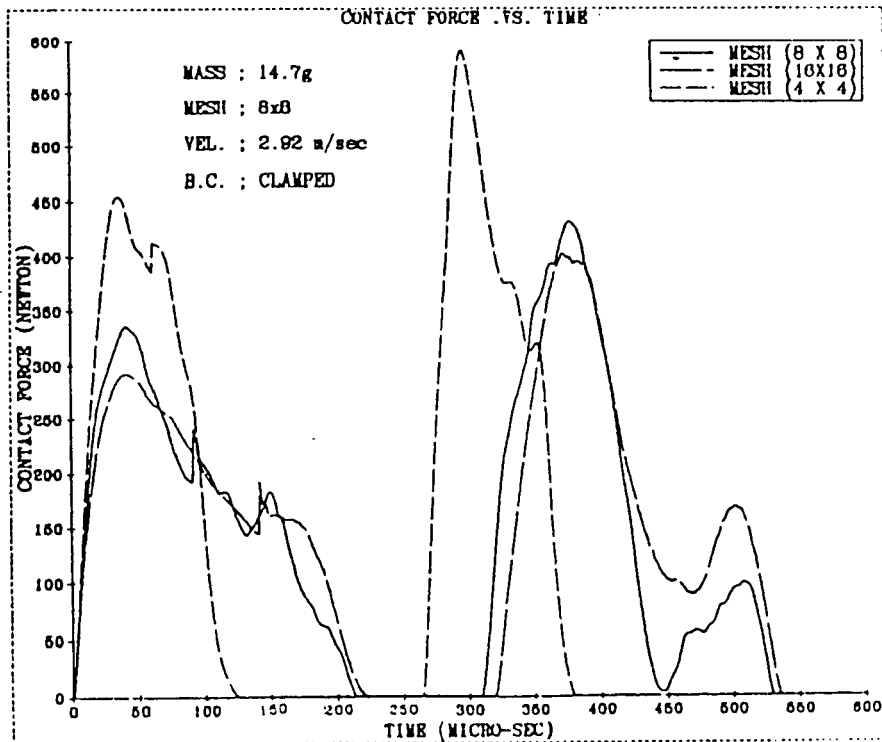


Fig. 6 Effect of mesh size on contact force
Graphite/epoxy plate with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

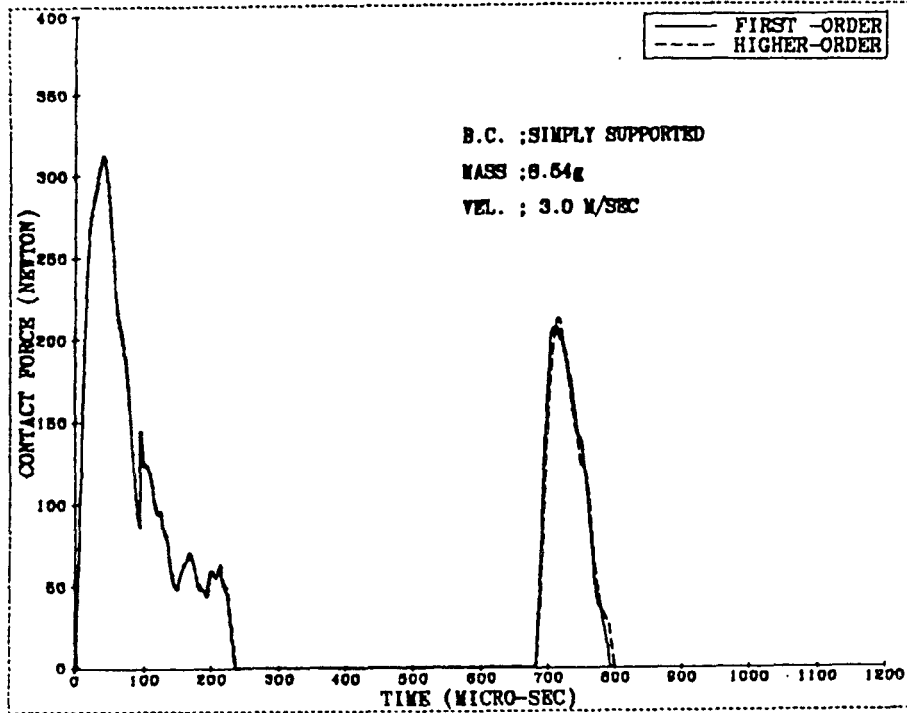


Fig. 7 The contact forces between impactor and plate calculated by the first/higher order plated theory. Graphite/epoxy plate with simply supported edges impacted by 12.7mm diameter steel sphere at 3.0m/sec

촉력에 대한 적층판 중앙의 변위를 적층판의 두께로 나누어 무차원화 한 계산결과는 Fig. 8에 나타내었다.

일차이론 및 고차이론에 의한 계산 결과는 참고 문헌 (9)와 아주 잘 일치하고 있으며, 일차이론과 고차이론의 계산치가 차이를 나타내지 않는 것은 참고 문헌에서 사용한 충격자의 질량이 적고, 적층판의 두께가 길이에 비하여 작은 값을 갖기 때문이다.

한편 4번 고정 경계단에 대한 고차이론 및 일차이론에 의한 접촉력과 적층판, 충격자의 변위와 충격자의 시간에 따른 속도변화는 Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11에 나타내었다. 고차이론으로 계산된 접촉력이 일차이론에 의한 접촉력 보다 낮게 계산되며, 판의 처짐은 고차이론에서 크게 계산됨을 알 수 있으나 계산 결과에 큰 차이를 보이지 않는다.

적층판의 두께 대 길이 비가 증가함에 따른 접촉력과 판의 중앙에서의 처짐을 계산한 결과는 Fig. 12, Fig. 13에 나타내었다.

두께 대 길이 비가 증가할수록 고차이론에 의한 계산 결과는 일차이론의 결과 보다 접촉력은 작게 판의 처짐은 크게 계산됨을 보다 분명하게 나타내고 있다. 그런데 참고문헌 (20)의 천이용답 해석에 따르면 일차이론에 의한 판의 처짐 계산치가 고차이론에 의한 계산치 보다 작게 평가됨을 보여주고 있다. 따라서 고차이론으로 계산된 접촉력과 판의 처짐이 일차이론의 계산 결과 보다 정밀도가 높을 것으로 판단된다. 경계조건의 변화가 접촉력에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 4번고정, 2번고정 2번자유, 4번자유단의 접촉력 변화를 수치 계산한 결과는 Fig. 14에 나타내었다.

충격자가 적층판과 1차 접촉시에는 경계조건의 변화에 따른 접촉력의 변화는 거의 무시할 수 있고 2차 접촉 발생시간, 접촉력에 영향을 크게준다. 이는 판의 강성이 4번고정, 2번고정 2번자유, 자유경계단의 순서로 경계조건에 따라 감소하며, 판의 강성이 높을수록 판의 고유진동수가 높고 이에 따라 2차 접촉이 빨리 발생되기 때문이다.

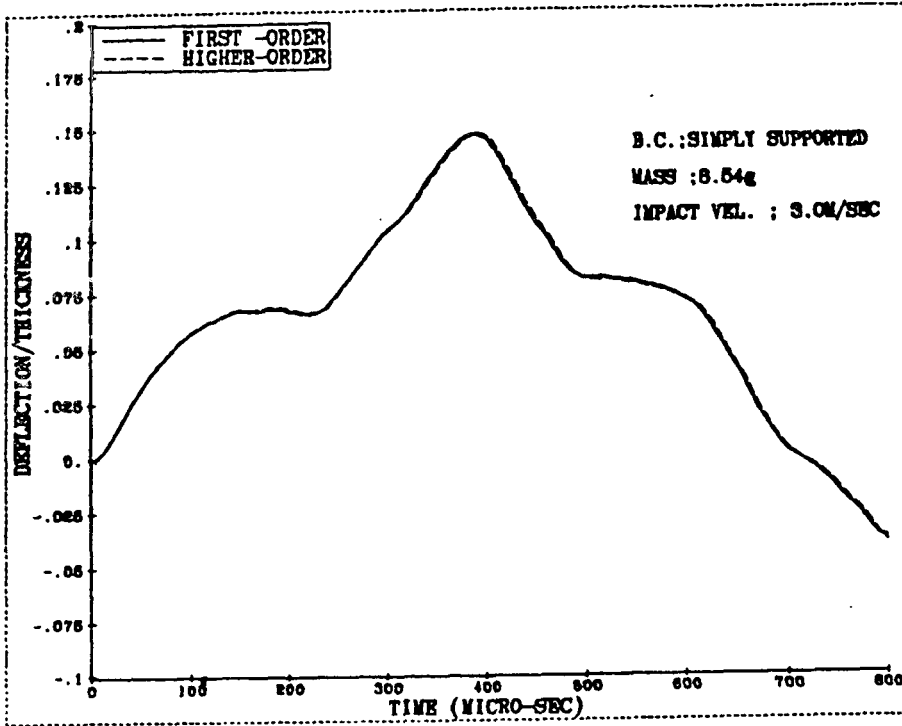


Fig. 8 The plate center displacements calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy pl: with simply supported edges impacted by 12.7mm diameter steel sphere at 3.0m/sec

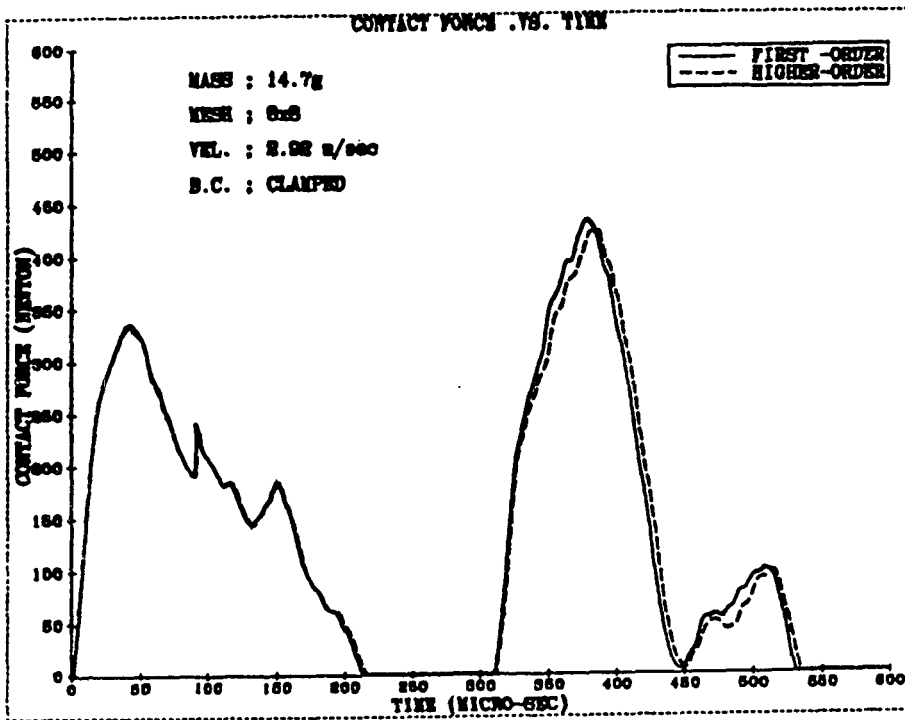


Fig. 9 The contact forces between impactor and plate calculated by the first/higher order plate theory Graphite/epoxy plate with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

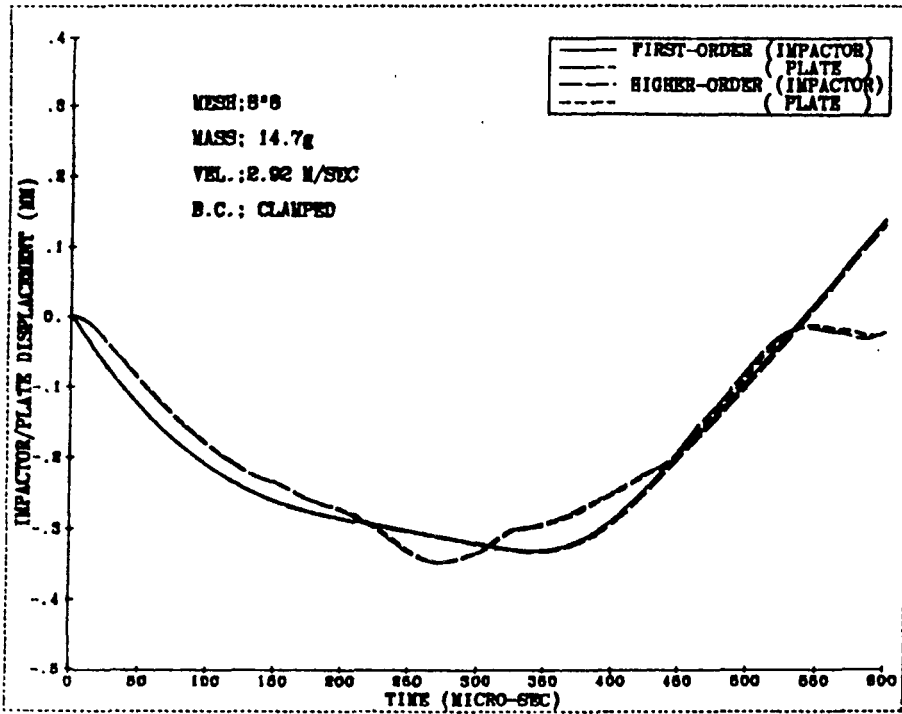


Fig. 10 Comparison of the impactor/plate displacements calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plate with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

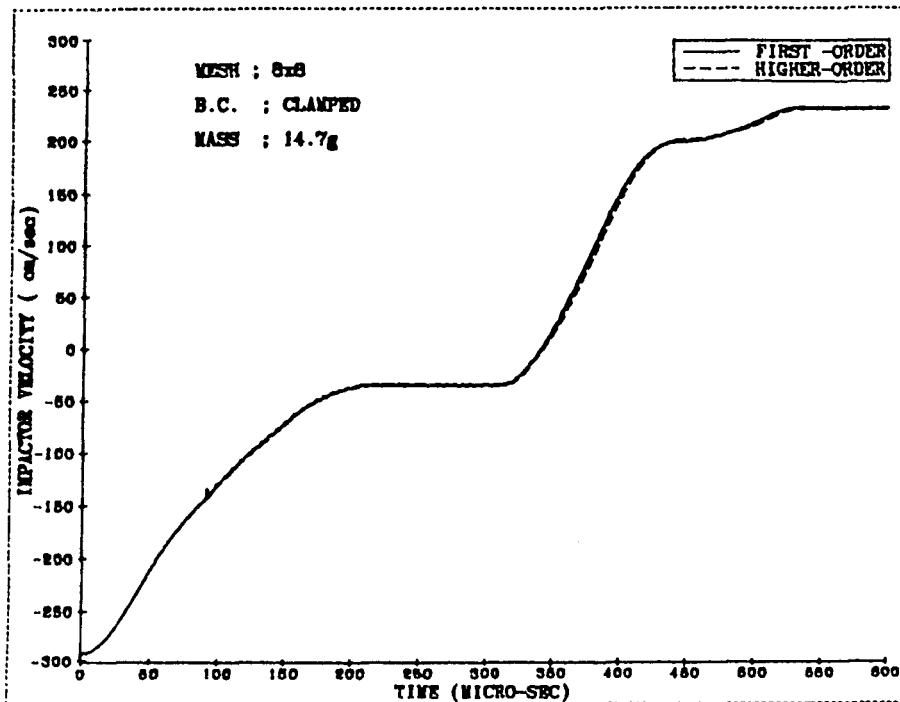


Fig. 11 The impactor velocities calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plate with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

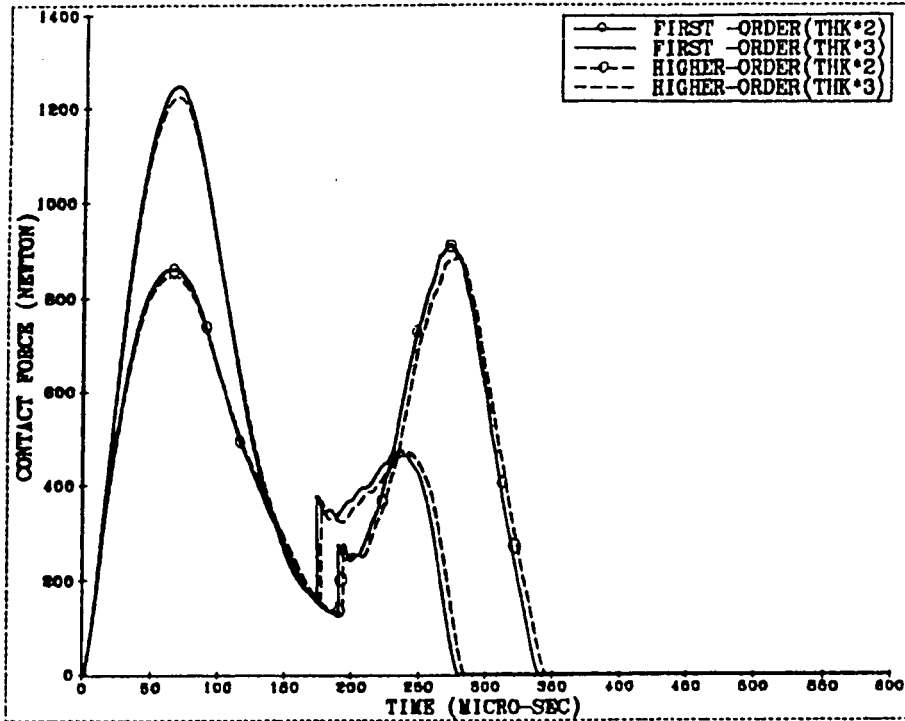


Fig. 12 The contact forces between impactors and plates calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plates with two different thickness, clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

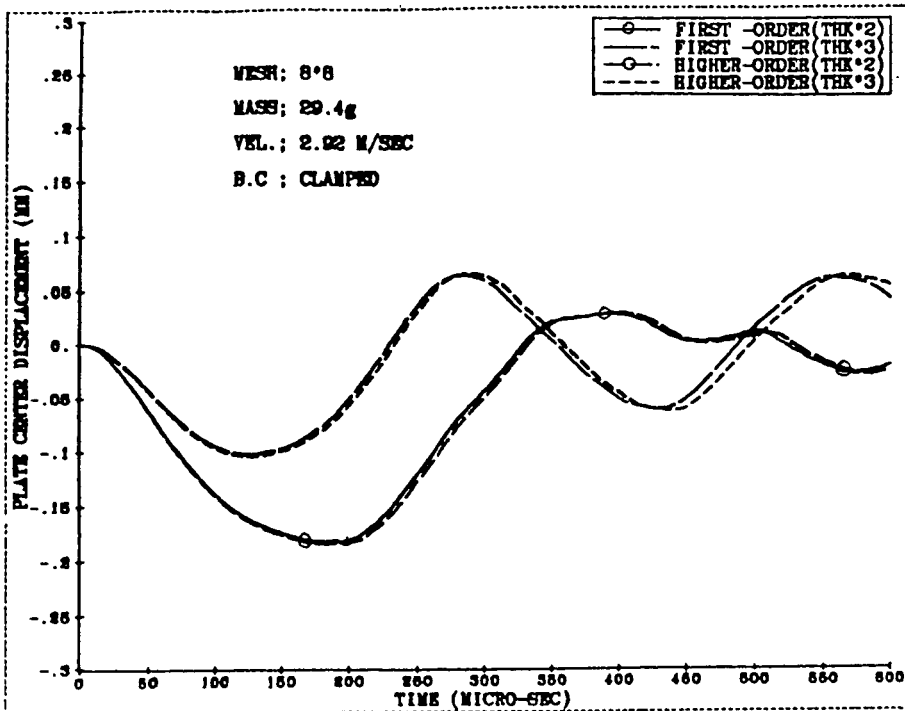


Fig. 13 The plate center displacements calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plates with two different thickness, clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

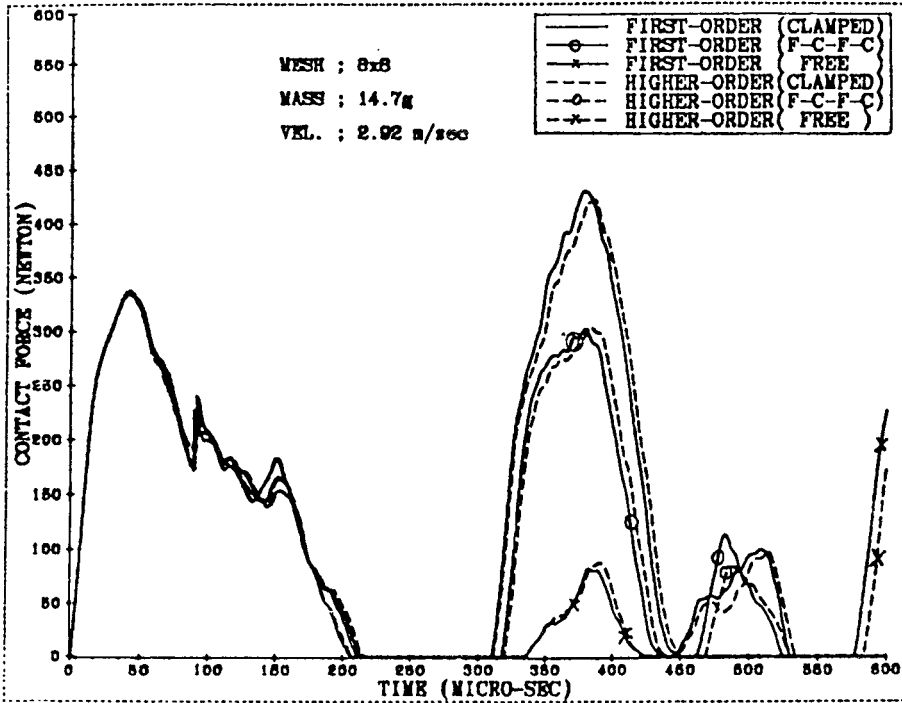


Fig. 14 The contact forces between impactors and plates calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plate with different boundary conditions impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

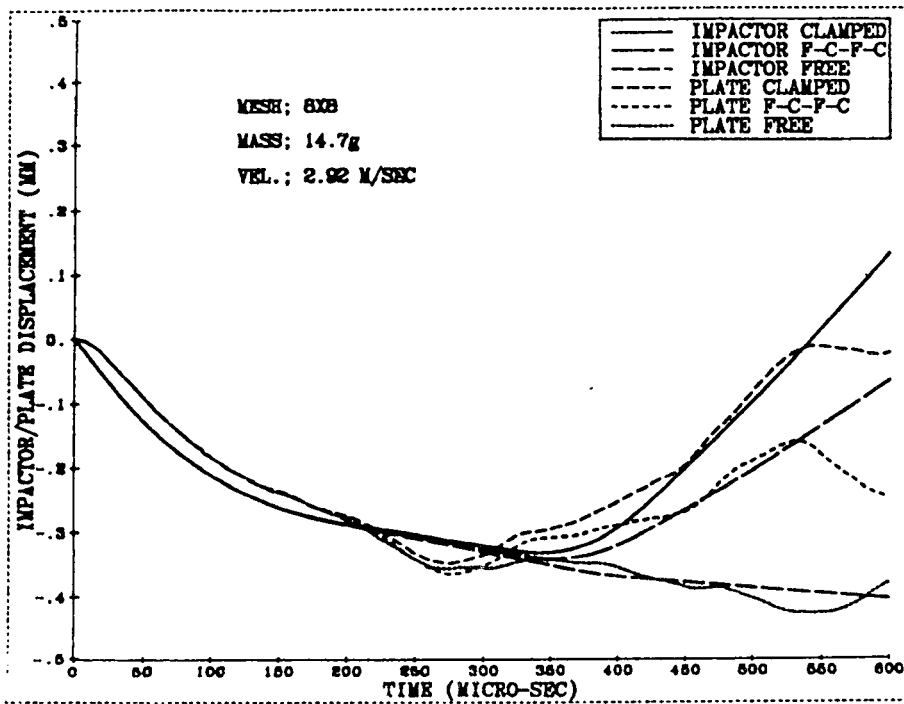


Fig. 15 The impactor/plate center displacements calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plate with different boundary conditions impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

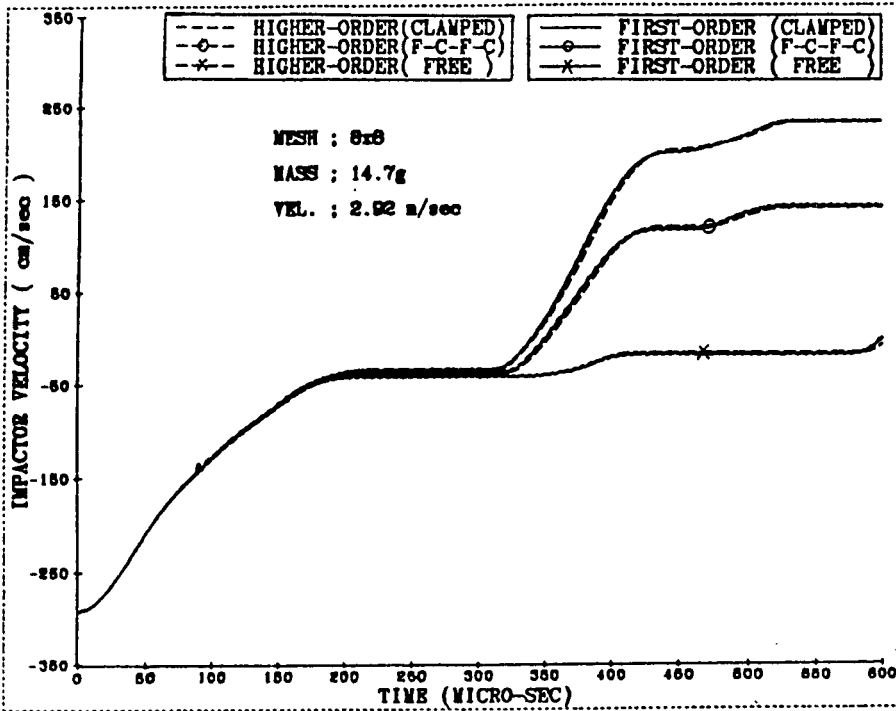


Fig. 16 The impactor velocities calculate by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plate with different boundary conditions impacted by 12.7mm diameter elastic rod at 2.92m/sec

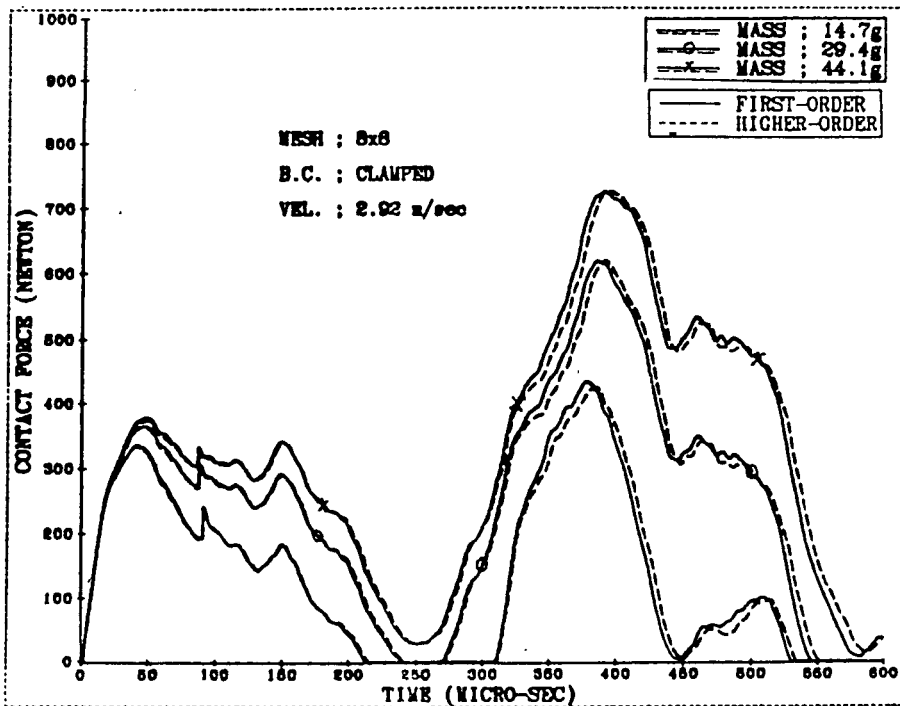


Fig. 17 The contact forces between impactors and plates calculated by their first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plates with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rods of three different masses at 2.92m/sec

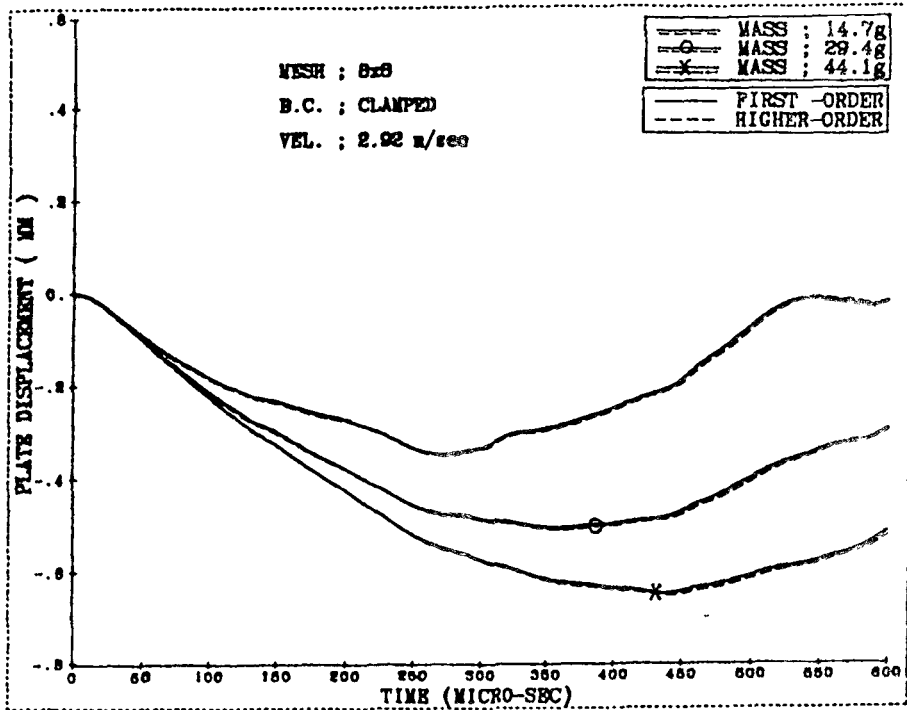


Fig. 18 The plate displacements calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plates with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rods of three different masses at 2.92m/sec

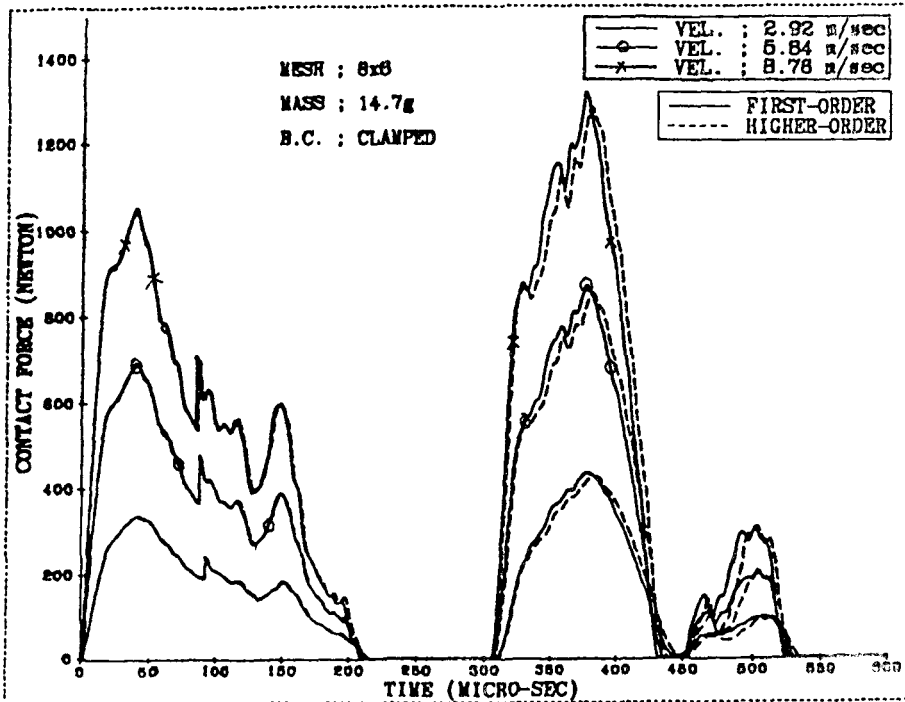


Fig. 19 The contact forces between impactors and plates calculated by the first/higher order plate theory. Graphite/epoxy plates with clamped edges impacted by 12.7mm diameter elastic rods of three different impact velocities(2.92m/sec, 5.84m/sec, 8.76m/sec)

Fig. 15은 경계조건의 변화에 따른 충격자와 판의 변위를 계산한 결과로서 자유경계단의 판의 중심부 변위가 가장 크고 고정단의 변위가 작게 계산됨을 알 수 있다. 이는 Fig. 14의 계산 결과와 일치하는 것으로서 동일 충격에너지를 갖는 충격자가 판에 접촉할 경우 판의 변형이 크게 되면 변형 에너지가 크게 되고 따라서 접촉력은 감소하게 된다. 경계조건에 따른 충격자의 속도 변화는 Fig. 16에 나타내었다. 자유단을 갖는 적층판은 고정단의 경우보다 충격자의 속도 변화가 크지 않다.

충격자의 질량 변화가 접촉력과 접촉시간에 미치는 영향을 조사하기 위하여 충격자의 질량을 3배까지 증가시켜 계산하였다(Fig. 17). 충격자의 질량 변화는 접촉력과 접촉시간에 모두 영향을 미치나 접촉시간에 미치는 영향이 현저함을 알 수 있다.

Fig. 18은 질량 변화에 따른 판의 중앙의 처짐을 나타낸 것이다. 충격자의 초기속도 변화가 접촉력과 접촉시간에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 초기속도를 3배까지 증가하여 계산된 접촉력의 변화를 Fig. 19에 나타내었다. 충격자의 초기속도 변화는 접촉력에만 영향을 크게 미치며 접촉시간에는 영향을 거의 주지 않음을 알 수 있으며 참고문헌(9)의 결과와 일치하고 있다.

5. 결 론

저속 충격하중을 받는 복합 적층판의 응답을 고차 전단 변형이론의 C^0 연속 변위 유한 요소를 사용하여 연구하였다.

Sun⁽⁶⁾ 등의 수정된 Hertz의 접촉력 관계식을 사용하여 접촉력을 계산하였고, 충격자의 속도 변화, 판의 변위 및 충격자의 변위를 서로 다른 경계 조건에 대하여 고찰하였다.

판의 두께에 걸쳐 횡전단 변형률이 일정한 일차 전단 변형이론으로 계산한 결과에 비하여 횡전단 변형률의 실제적 변화를 고려한 본 연구 결과가 복합적층판의 저속 충격 연구에 좋은 결과를 제공할 것으로 판단된다. 판의 경계조건의 변화는 1차접촉 시기의 접촉력에는 거의 영향을 미치지 못하나 2차 접촉시기에는 상당한 영향을 미치며, 고정단의 경우는 자유 경계단에 비하여 2차 접촉시간 간격이 짧다.

충격자의 질량 변화는 접촉력과 접촉시간에 모두 영향을 주나 접촉시간에 대한 영향이 현저하다.

충격자의 속도 변화는 접촉력에만 영향을 주며 접촉시간과는 무관하다.

참 고 문 헌

- (1) Sun, C.T. and Chattopadhyay, S., 1975, "Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates under Initial Stress to Impact of a Mass", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp.693~698.
- (2) Whitney, J.M. and Pagano, N.J., 1970, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp.1031~1036.
- (3) Dobyns, A. L., 1981, "Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subjected to Static and Dynamic Loading", *AIAA J.*, Vol. 37, pp.642~650.
- (4) Ramkumar, R.L. and Chen, P. C., 1985, "Low Velocity Response of Laminated Plates", *AIAA J.*, Vol. 21, No. 10, pp.1448~1452.
- (5) Shivakumar, K.N. and Illg, W., 1985, "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp.674~680.
- (6) Greszczuk, K.N., 1982, "Damage in Composite Materials Due to Low Velocity Impact", in Zukas, J. A. et., "Impact Dynamics", John Wiley & Sons, New York, pp.55~94.
- (7) Yang, S.H. and Sun, C. T., 1982, "Indentation Law for Composite Laminates", *ASTM, STP 787*, I.M. Daniel, Ed., pp.425~449.
- (8) Tan, T.M. and Sun, C.T., 1985, "Use of Static Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp.6~12.
- (9) Sun, C.T. and Chen, J.K., 1985, "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", *J. of Composite Material*, Vol. 19, pp.490~504.
- (10) Sun, C.T. and Aggour, H., 1988, "Finite Element Analysis of a Laminate Composite Plates Subjected to Circularly Distributed Central Impact Loading", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 6, pp.729~736.
- (11) Lee, J.P., Du, S. and Liebowitz, H., 1984, "Three Dimensional Finite Element and Dynamic Analysis of Composite Laminates Subjected to Impact", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 5/6, pp.807~813.
- (12) Chang, F.K. and Hsi-Yung, T., 1989, "Transient Dynamic Analysis of Laminated Composites Plates Subjected to Transverse Impact", *Computers & Structures*, Vol. 31, No. 3, pp.453~466.

- (13) 홍창선, 한정호, 1988, "대치짐을 고려한 복합적층판의 저속충격 거동에 대한 연구" 항공우주학회 춘계학술발표 초록집.
- (14) 안국찬, 김문생, 김규남, 1988, "유한요소법에 의한 적층 복합보의 충격해석", 대한기계학회논문집, 제12권, 제 4 호, pp.651~661.
- (15) 김문생, 김규남, 1989, "적층 복합재의 응력과 전파에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제13권, 제 1 호, pp.9~19.
- (16) Lo, K.H. and Christensen, R.M., 1977, "A High Order Theory of Plate Deformation", J. of Applied Mechanics, Vol. 44, pp.663~668.
- (17) Reddy, J.N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", J. of Applied Mechanics, Vol. 51, pp.745~752.
- (18) Phan, J.N. and Reddy, J.N., 1985, "Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Shear Deformation Theory", Int. J. of Numerical Methods in Eng., Vol. 21, pp.2201~2219.
- (19) Putcha, N.S. and Reddy, J.N., 1986, "A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for The Non-linear Analysis of Laminated Plates", Computers & Structures, Vol. 22, No. 4, pp.529~538.
- (20) Kant, T. and Mallikarjuna, 1988, "Dynamics of Laminated Composite Plates with a Higher Order Theory and Finite Element Discretization", J. of Sound and Vibration, Vol. 126, No. 3, pp.463~475.
- (21) Pandya, B.N. and Kant, T., 1988, "Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Displacement Model", Composites Science and Technology, Vol. 32, pp.127~155.
- (22) Bathe, K.J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, pp.499~556.