1104 大韓機械學會論文集 第14卷 第5號, pp. 1104~1111, 1990.

〈論 文〉

오차행렬에 의한 비선형 요소 위치 파악에 관한 연구

변언섭* · 이상설* · 박윤식**

(1990년 2월 19일 접수)

Nonlinear Elements Position Detecting by Error Matrix Method

Uhn Sub Byun, Sang Seol Lee and Youn-sik Park

Key Words: Nonlinear System(비선형계), Equivalent Linearization Technique(등가 선형화 방법), Least Square Error Minimization(최소 자승 오차법), Error Matrix(오차 행렬), Error Vector(오차 벡터)

Abstract

A method to identify nonlinear elements position of a nonlinear system is presented. Nonlinear elements position can be identified by an equivalent error damping and stiffness matrices which are based on the equivalent linearization technique. The procedures of this technique are: (1) Obtain input force and system response. (2) Define error between the actual and linearized restoring forces. (3) Calculate linearized damping and stiffness coefficients to minimize the square error sum. Several examples are tested and found that these methods are very effective not only to locate the nonlinear elements position but also to identify the degree of nonlinearity qualitatively. Nonlinear type can be qualitatively identified by examining the plots of restoring force vs equivalent state values.

기 호 설 명

$[C]$	: 감쇠 행렬
C_{eq}	: 등가 감쇠값
$[E_c]$	: 오차 감쇠 행렬
$[E_k]$	: 오차 강성 행렬
$\{E_v\}$	: 오차 벡터
$\{F(t)\}$	: 가진력
F	: 가진력의 크기
$f(t)$	: 비선형 전달력
$\{g(x,\dot{x})\}$	: 복원력
$[K]$	: 강성 행렬
K_{eq}	: 등가 강성값
$[M]$	: 질량 행렬
x_{eq}	: 등가 변위
$\dot{x}_{eq}$	: 등가 속도
$\{\varepsilon(t)\}$	: 오차

* 한국과학기술원 기계공학과
** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

최근들어 비선형 구조물의 모델링에 대한 관심이 증가하고 있다. 구조물에 존재하는 비선형성이 약한 경우에는 선형계로 취급될 수 있지만 비선형성이 무시될 수 없는 경우에는 비선형 요소를 해석 모델에 포함하여야 한다. 이와같은 경우에 계에 존재하는 비선형성의 정도 및 비선형 요소의 위치파악에 관한 정보를 이용할 수 있으면 상당히 효과적이다. 지금까지 이와 관련된 방법으로는 먼저 정현파 가진응답에서 가진 주파수 이외의 성분 존재 유

무에 따라 비선형성을 탐지하는 방법[1]과 전달함수를 힐버트 변환(Hilbert transform)하여 비선형성을 탐지하는 방법[2,3] 등이 있으나 위의 두 가지 방법으로는 비선형성 유무 판정 이외에 비선형 요소의 위치 또는 형태에 관한 정보를 얻을 수 없다. 또한 힘 상태 그래프법(Force State Mapping Technique)[4]은 계를 구성하는 자유도간의 복원력(restoring force)을 삼차원 공간에 변위와 속도의 함수로 나타내어 이것이 한 평면을 이루면 선형계로 판정하고 곡면을 이루면 비선형계로 판정하는 방법으로 비선형의 형태를 파악할 수 있기 때문에 많은 연구자들의 관심을 끌고 있으나 다자유도계의 적용시에는 모든 자유도간의 복원력을 구하여 삼차원 곡면을 판정해야 하는 문제점이 있다. 복소강성법(Complex Stiffness Method)[5]은 정현파 가진에 의한 주파수 응답 함수의 역을 이용하여 등가 감쇠(equivalent damping)와 등가 강성(equivalent stiffness)을 구하고 이들의 속도와 변위에 대한 그림으로부터 비선형성의 존재 여부 판정 및 비선형 형태를 파악하는 방법이다. 이는 힘 상태 그래프법[4]보다는 간단하나 해석이 대부분 일자유도계에 한정되어 있고 다자유도계로 확장시에는 주파수 응답 함수의 역을 구하는데 문제점이 있다. 이와같은 방법들은 비선형성의 존재유무를 파악할 수 있는 방법이며 비선형 요소의 위치파악에 관한 연구는 미비한 편이다. 일반적인 기계구조물은 국부적으로 존재하는 비선형요소에 의해 전체계가 비선형거동을 하는 경우가 대부분이다. 따라서 본 논문에서는 다자유도계에 국부적으로 존재하는 비선형요소의 위치를 파악하는 방법에 관하여 연구하였다. 이를 위해 먼저 기존의 등가선형화법[6,7]으로 구한 등가행렬에 비선형요소의 위치정보가 포함되어 있음을 밝혔다. 또한 등가행렬에 포함된 위치정보를 효과적으로 이용하기 위하여 오차행렬법과 오차벡터법을 제시하였다. 제시된 두 방법이 계에 존재하는 국부 비선형요소의 위치파악에 적합한 방법임을 시뮬레이션을 통하여 검증하였다. 특히 오차벡터법은 비선형요소의 연결상태 및 비선형성 정도를 파악할 수 있는 방법으로 비선형계의 모델수립에 유용한 도구임을 보였다. 그리고 특수한 경우에는 등가선형화법으로 구한 등가 감쇠 및 등가 강성계수를 응답에 대하여 그래프로 표시하면 그 비선형 형태를 대략적으로 파악할 수 있음을 밝히고 시뮬레이션으로 검증하였다.

2. 이 론

2.1 비선형계의 등가 선형화 방법

일반적으로 비선형 n자유도계의 운동 방정식은 식 (1)과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}\}+\{g(x,\dot{x})\}=\{F(t)\} \tag{1}$$

여기서 $\{g(x,\dot{x})\}$는 계에 작용하는 전달력을 표현하는 벡터로 변위와 속도의 함수이다. 비선형방정식 (1)의 등가선형방정식은 식 (2)와 같이 가정한다.

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\} \tag{2}$$

식 (2)에서 $[C]$는 등가감쇠행렬이고 $[K]$는 등가강성행렬이며 입력에 따라 $[C]$, $[K]$는 변하며, 식 (3)과 같이 오차를 정의하여 구한다.

$$\{\varepsilon(t)\}=\{g(x,\dot{x})\}-\{[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}\} \tag{3}$$

여기서 $\{g(x,\dot{x})\}=\{F(t)\}-[M]\{\ddot{x}\}$이며 식 (3)의 오차 $\{\varepsilon(t)\}$를 구할 때 필요한 질량행렬, 변위, 속도, 가속도 및 입력 정보는 알고 있는 것으로 가정한다.

식 (3)의 오차를 최소화하는 등가 감쇠와 등가 강성 행렬을 구하기 위해 식 (4)와 같이 오차 내적의 평균값이 최소가 되도록하여 구한다.

$$\text{Minimize} \quad E[\{\varepsilon\}^T\{\varepsilon\}] \tag{4}$$

식 (4)를 만족시키는 필요조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial E[\varepsilon^T\varepsilon]}{\partial C_{ij}}=E\Big[-2g_i\dot{x}_j+2\sum_k x_kK_{ik}\dot{x}_j+2\sum_k \dot{x}_kC_{ik}\dot{x}_j\Big]=0$$

$$\frac{\partial E[\varepsilon^T\varepsilon]}{\partial K_{ij}}=E\Big[-2g_ix_j+2\sum_k x_kK_{ik}x_j+2\sum_k \dot{x}_kC_{ik}x_j\Big]=0$$

윗 식을 정리하면

$$E\Big[\sum_k \dot{x}_kC_{ik}\dot{x}_j\Big]+E\Big[\sum_k x_kK_{ik}\dot{x}_j\Big]=E[g_i\dot{x}_j]$$

$$E\Big[\sum_k \dot{x}_kC_{ik}x_j\Big]+E\Big[\sum_k x_kK_{ik}x_j\Big]=E[g_ix_j] \tag{5}$$

이 된다. 식 (5)에서 구한 다자유도계의 등가감쇠행렬과 등가 강성 행렬에 의하여 등가선형계의 방정식 (2)를 구할 수 있다.

2.2 비선형 요소 위치 탐지 방법

다자유도계에 존재하는 비선형요소의 위치 탐지를 위해 등가 선형화식을 이용한다. 즉 식 (5)의 $g_i(x,\dot{x})$는 i번째 자유도에 전달하는 힘을 표현하며 $g_i(x,\dot{x})$는 등가행렬 $[C]$, $[K]$의 i번째행 $[C_{ik}, K_{ik}(k=1, 2, \cdots, n)]$에만 영향이 있음을 식 (5)로부터 알수 있다. 따라서 만일 $g_i(x,\dot{x})$가 비선형 전달력을 포함하고 있다면 가진력이 변함에 따라 각 가진력에 대하여 등가행렬 $[C]$, $[K]$의 i번째행들의 값만 변하게 된다. 만약 $g_i(x,\dot{x})$에 비선형 전달력이 없으면 각 가진력에 대한 $[C]$, $[K]$의 i번째 행들의 값은 일정하게 되어 선형요소만 존재함을 알 수 있다. 위와 같은 이유로 등가감쇠 행렬 $[C]$과 등가강성 행렬 $[K]$의 가진력에 변화에 따른 행(row)값들의 변화를 추적하면 국부적으로 존재하는 비선형 요소의 위치 파악이 가능하다. 본 연구에서는 효과적인 비선형 요소 위치 탐지를 위해서 다음의 두 가지 방법을 제안하였다.

방법(1) : 오차 감쇠 행렬 $[E_c]$ 및 오차 강성 행렬 $[E_k]$

서로 다른 가진력을 $\{F_1\}$, $\{F_2\}$라 하고 각 가진력에 대한 응답을 구한 후 각각의 등가 감쇠 행렬 $[C_1]$, $[C_2]$와 등가 강성 행렬 $[K_1]$, $[K_2]$를 구하여 다음과 같이 오차 감쇠 행렬 및 오차 강성 행렬을 정의한다.

(1) 오차감쇠행렬 : $[E_c]$

$$E_{cij}=\left(1-\frac{C_{1ij}}{C_{2ij}}\right) \tag{6-1}$$

(2) 오차강성행렬 : $[E_k]$

$$E_{kij}=\left(1-\frac{K_{1ij}}{K_{2ij}}\right) \tag{6-2}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

여기서 첨자 1은 가진력이 $\{F_1\}$인 경우, 첨자 2는 가진력이 $\{F_2\}$인 경우에 대한 등가행렬을 표시한다. 만일 선형계이면 서로 다른 가진력에 대한 등가감쇠행렬과 등가강성행렬의 값들이 일치되어 오차감쇠행렬과 오차강성행렬의 모든 행의 값들은 영이 되므로 이것으로부터 선형계임을 판정할 수 있다. 또한 비선형 요소가 국부적으로 존재하는 경우에는 오차 행렬의 값들이 모두 영은 아닌 행(row)이 나타나게 되어 이것으로부터 비선형요소의 위치를 탐지할 수 있다. 또한 오차행렬중 각 행(row)의 값들이 모두 영으로 나타난 경우에는 그 행(row)에 대응하는 자유도에는 선형 요소만 연결되어있는 것이므로 이 자유도에 해당하는 등가감쇠 및 등가강성행렬값을 이용하면 선형요소에 대한 모델이 수립되는 것이다.

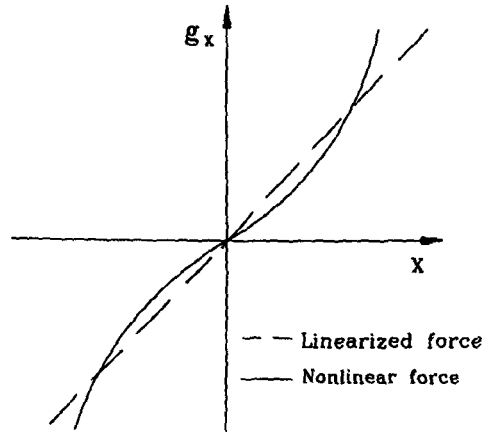


Fig. 1 Nonlinear restoring force vs linearized restoring force

방법(2) : 오차 벡터$\{E_v\}$

앞의 오차 행렬법은 최소한 2회의 서로 다른 가진력에 대한 응답이 필요한 반면 오차벡터법은 한 번의 가진에 대한 계의 전달력을 변위와 속도에 따라 검토하여 비선형요소 위치 탐지가 가능한 방법이다. 오차벡터를 이용하여 선형 및 비선형요소로 판단할 경우에는 이론적으로 영이 아니면 비선형으로 판정되지만 실제의 경우에는 잡음(noise)등의 영향이 있으므로 오차 벡터값에 대한 기준치가 미리 정해져야 한다. Fig. 1은 일반적인 두 자유도간의 전달력 $\{g(x,\dot{x})\}$가 변위만의 함수 $g(x)$인 경우에 대하여 $g(x)=kx$로 선형화시킨 것을 나타낸다. 식 (3)은 이와같은 경우에 $\varepsilon(t)=g(x)-kx(t)$가 된다. 만약 $g(x)$가 변위에 대한 선형함수이면 항상 $\varepsilon(t)=0$이 되나, 비선형함수인 경우는 $\varepsilon(t)\neq 0$인 값들이 존재한다. 따라서 오차벡터 $\{E_v\}$를 식 (7)과 같이 정의하면 비선형요소의 위치를 탐지할 수 있다.

$$\{E_v\}^T=\{E_{v1},\ E_{v2},\ \cdots,\ E_{vn}\}$$
$$\text{where}\quad E_{vi}=\sum_t \varepsilon_i^2(t) \tag{7}$$

단 $\{\varepsilon(t)=\{g(x,\dot{x})\}-\{[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}\}$이고 $\varepsilon_i(t)$는 오차 $\{\varepsilon(t)\}$의 i번째 요소이다. 여기서 $\varepsilon_i(t)(i=1, 2, \cdots, n)$는 각 자유도에서의 비선형 특성에 의한

오차를 표현하므로 $\{E_v\}$의 i번째 요소의 값을 구해 영이 아니면 i번째 자유도에 비선형요소가 연결되어 있음을 의미하고, 만약 i번째 오차 벡터값이 영이되면 i번째 자유도에는 선형 요소만 연결되어 있는 위치임을 의미한다. 이 방법은 비선형요소가 나타나기에 충분한 외력의 일회 가진에의해 임의의 함수형태를 갖는 비선형 요소의 위치 파악 및 비선형성 정도의 파악이 용이한 것이 방법 (1)과의 차이점이다.

2.3 비선형 형태 탐지 방법

다자유도계에서 한 개의 비선형 요소가 두 자유도에 영향을 미치는 경우에는 기본적인 비선형 형태를 등가 선형화 방법을 이용하여 예측할 수 있다. 먼저 오차 행렬 또는 오차 벡터를 이용해서 비선형성이 존재하는 두 자유도의 위치를 찾아 낸 후 비선형성이 존재하는 두 자유도와 연결된 선형 요소들의 등가 감쇠값과 등가 강성값들을 이용하여 가상의 외력으로 대치하면 비선형성이 있는 요소의 의미있는 등가 감쇠와 등가강성을 구할 수 있다 (Fig. 2). 즉 자유도 i와 $i+1$사이에 비선형 요소가 존재하는 것으로 판정된 경우에 변위, 속도, 가속도는 식 (8)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{x}_i &= \ddot{x}_i - \ddot{x}_{i+1}\\ \Delta\dot{x}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}\\ \Delta x_i &= x_i - x_{i+1}\end{aligned} \tag{8}$$

자유도 i의 운동방정식은 식 (9)와 같이 구한다.

$$M_i\ddot{x}_i + g_i(\Delta x_i,\ \Delta\dot{x}_i) = f_i + F_i = \Delta F_i \tag{9}$$

여기서 F_i는 외부가진력이고 g_i는 자유도 i와 $i+1$ 사이의 복원력을 표현하고 f_i는 자유도 i와 연결된

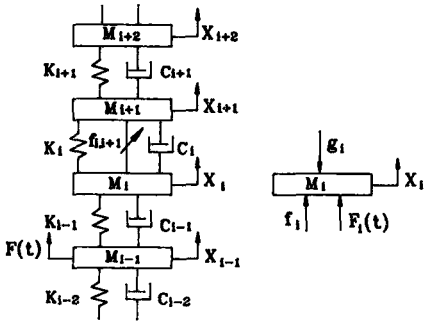


Fig. 2 1 DOF modelling of multi-DOF system

모든 자유도에 의한(자유도 $i+1$ 제외) 복원력을 외력처럼 취급한 것이다. 이때의 등가감쇠값과 등가강성값은 다음과 같이 오차를 정의하여 구한다.

$$\varepsilon_i(t) = \Delta F_i - M_i\ddot{x}_i - C_i\dot{x}_i - K_i x_i \tag{10}$$

식 (10)의 오차 $\varepsilon_i(t)$를 최소화하는 등가 C_i와 K_i는 오차 내적의 평균값이 최소가 되도록하여 구한다.

$$\text{Minimize}\quad E[\varepsilon_i(t)^2] \tag{11}$$

식 (11)을 만족하는 필요 조건은 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned}C_iE[\Delta\dot{x}_i\Delta\dot{x}_i] + K_iE[\Delta x_i\Delta\dot{x}_i] &= E[g_i\Delta\dot{x}_i]\\ C_iE[\Delta\dot{x}_i\Delta x_i] + K_iE[\Delta x_i\Delta x_i] &= E[g_i\Delta x_i]\end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)에서 자유도 i, $i+1$에 연결된 비선형 요소의 등가감쇠값과 등가강성값을 구하여 등가 변위(x_{eq})와 등가속도($\dot{x}_{eq}$)에 따른 각각의 변화로부터 자유도 i, $i+1$에 존재하는 비선형요소의 기본적인 형태를 예측할 수 있다. 이때의 등가 변위는 변위(Δx_i)의 최대값으로 등가속도는 속도($\Delta\dot{x}_i$)의 최대값으로 정의한다.

3. 적용예 및 고찰

3.1 비선형 요소 위치 탐지

이론의 타당성을 보이기 위하여 4자유도 선형모델에 Fig. 3, 4, 5와 같이 비선형요소가 첨가된 비선형계에 제시된 방법을 적용하여 실제 비선형요소의 위치와 일치된 결과인 지를 검토하였다. 선정된 세가지 예제의 자유도 1에 정현파 외력 $F(t)=F\sin(50t)$[N]을 가하여 계의 응답을 IMSL의 Runge-Kutta법을 이용하여 계산하였다. 계의 응답을 계산한 후에 식 (5)를 이용하여 등가감쇠행렬과 등가강성행렬을 구하고 식 (6)과 (7)로 오차행렬과 오차벡터를 구하여 Fig. 3, 4, 5의 (b), (c), (d)에 도시하였다.

(1) 연화강성(softening spring)인 경우

Fig. 3(a)와 같이 연화 강성 요소가 자유도 2, 3에 $f_{23}=-5(x_2-x_3)^3$으로 존재하는 경우이다. Fig. 3(b)의 오차행렬을 보면 2, 3행의 값들 중 영이 아닌 것이 나타나므로 비선형요소가 자유도 2와 3 사이에 연결되어 있음을 알 수 있고, Fig. 3(c)에서 오차 벡터는 가진력이 작을 때($F=1000$N)에는 비선형성이 거의 무시되어 나타나지 않음을 나타내고, 가진력이 커지면 ($F=9000$N) 비선형성이 크게 되어 자유도 2와 3에 비선형 유소가 존재하는

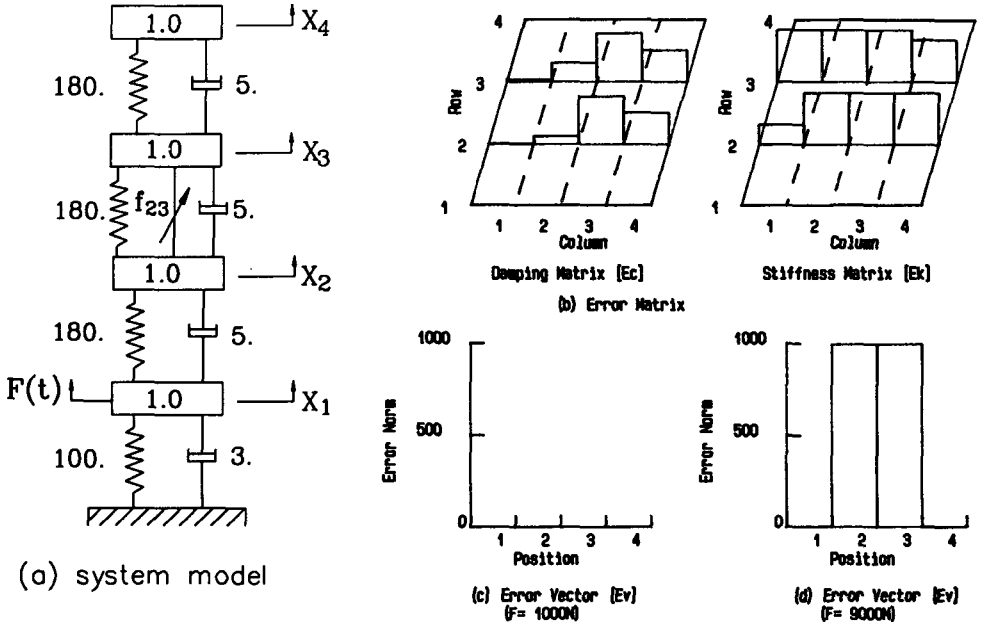


Fig. 3 Example structure 1 having a softening spring element

것을 나타낸다.

(2) 쿨롱 감쇠(coulomb damping)인 경우

Fig. 4(a)와 같이 쿨롱 감쇠 요소가 자유도 1, 2에 $f_{12}=5\mathrm{sgn}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$으로 존재하는 경우로 가진력의 변화는 $F=1000$N과 $F=19000$N의 두 경우로 하였다. Fig. 4(b)의 오차행렬에서 비선형 특성이 거의 나타나지 않는 것은 쿨롱감쇠인 경우는 가진력의 변화에 따른 등가강성행렬값과 등가감쇠행렬

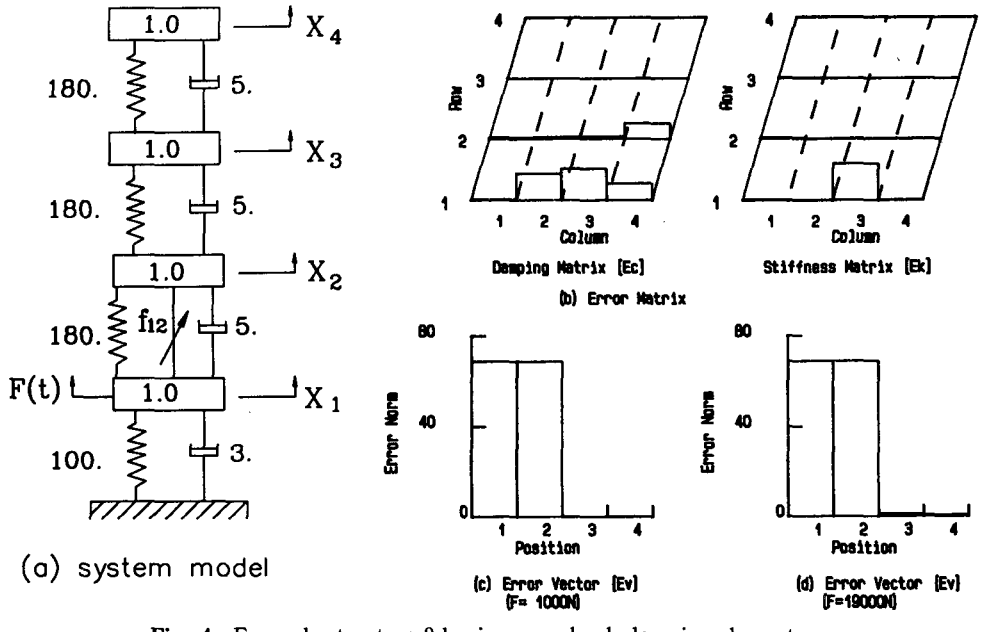


Fig. 4 Example structure 2 having a coulomb damping element

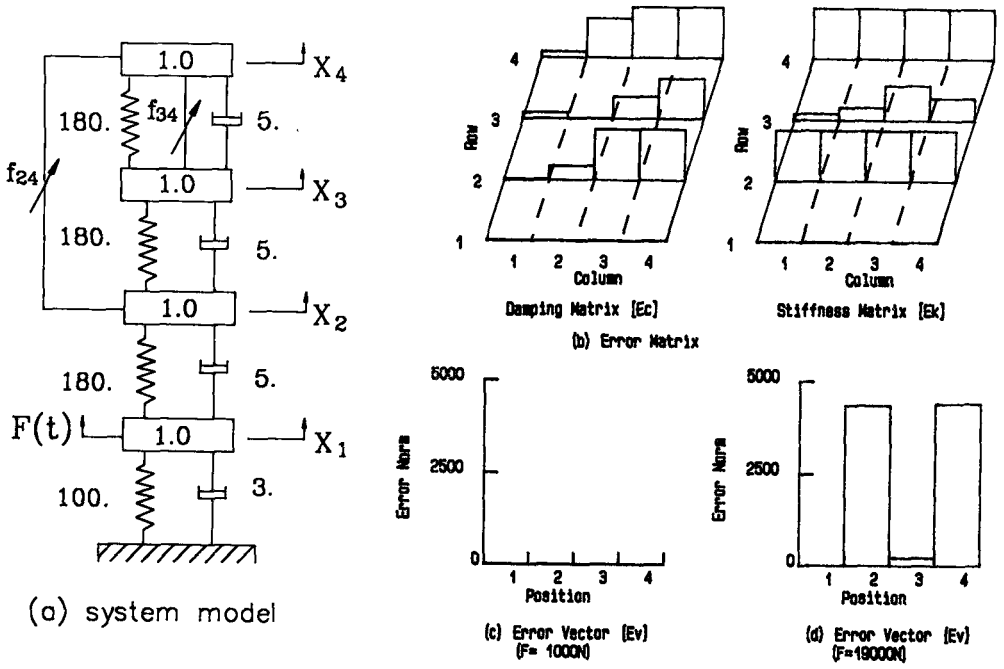


Fig. 5 Example structure 3 having two nonlinear elements

값의 변화가 적기 때문이다. Fig. 4(c)의 오차 벡터는 가진력의 크기에 관계없이 어떤 일정한 값이 되므로 비선형요소가 자유도 1과 2사이에 존재하는 것을 알 수있다.

(3) 두 개의 비선형요소인 경우

Fig. 5(a)와 같이 경화스프링요소가 자유도 2, 4에 $f_{24}=5(x_2-x_3)^2$로 존재하고, 자유도 3, 4에 2차 감쇠요소가 $f_{34}=0.1(\dot{x}_3-\dot{x}_4)|\dot{x}_3-\dot{x}_4|$로 존재하는 경우로 가진은 $F=1000$N과 $F=19000$N으로 하였다. Fig. 5(b)의 오차행렬에서 2, 3, 4행에 영이 아닌 값들이 존재하는 것은 비선형 요소가 자유도 2, 3, 4에 연결되어 있음을 나타낸다. Fig. 5(c)에서 가진력의 크기가 작을 때에는 ($F=1000$N) 비선형 특성이 거의 나타나지 않음을 나타내고, 가진력이 큰 경우에는($F=19000$N) 자유도 2, 4에 연결된 비선형요소가 자유도 3에 연결된 비선형요소보다는 비선형성이 크다는 것을 나타낸다.

3.2 비선형 형태 예측

자유도 2, 3에만 비선형요소가 존재하는 경우 (Fig. 6)에 대하여 변위, 속도, 가속도를 식 (13)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{x}_2&=\ddot{x}_2-\ddot{x}_3\\ \Delta\dot{x}_2&=\dot{x}_2-\dot{x}_3\\ \Delta x_2&=x_2-x_3\end{aligned} \tag{13}$$

자유도 2에 관한 운동방정식은 식 (14)와 같다.

$$M_2\ddot{x}_2+g_2(\Delta x_2,\ \Delta\dot{x}_2)=f_2+F_2=\Delta F_2 \tag{14}$$

여기서 $f_2=180(x_2-x_1)+5(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$이며 자유도 2에는 외력이 없으므로 $F_2=0$이다. 주어진 입, 출력

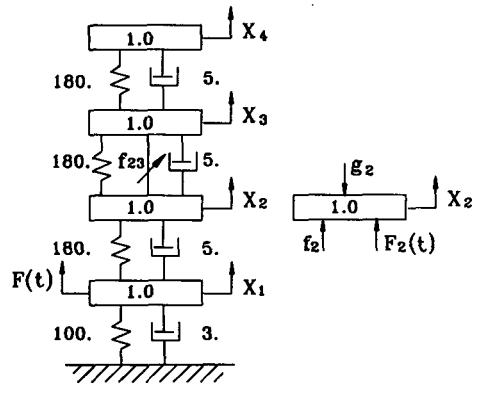


Fig. 6 1 DOF modelling of 4-DOF system

상태에서 비선형 방정식 (14)의 등가선형화 방정식은 식 (15)와 같다.

$$C_2E[\Delta\dot{x}_2\Delta\dot{x}_2]+K_2E[\Delta x_2\Delta\dot{x}_2]=E[g_2\Delta\dot{x}_2]$$
$$C_2E[\Delta\dot{x}_2\Delta x_2]+K_2E[\Delta x_2\Delta x_2]=E[g_2\Delta x_2] \quad (15)$$

식 (15)에서 등가감쇠값(C_2)과 등가강성값(K_2)을 구하여 등가속도($\dot{x}_{ep}$)와 등가변위(x_{eq})에 대한 그림으로부터 비선형 형태를 예측할 수 있다. 위와같은 이론의 타당성을 보이기 위해 다음의 세가지 비선형 형태에 대하여 시뮬레이션하여 고찰하였다. Fig. 7, 8, 9의 C_{eq}와 K_{eq}는 식 (15)에서 구한 등가값 C_2와 K_2에서 선형계수값을 각각 뺀 것으로 정의하였다. 즉 $C_{eq}=C_2-5.0$, $K_{eq}=K_2-180.0$이며, 이후로는 C_{eq}와 K_{eq}를 각각 등가 감쇠값과 등가 강성값이라 한다.

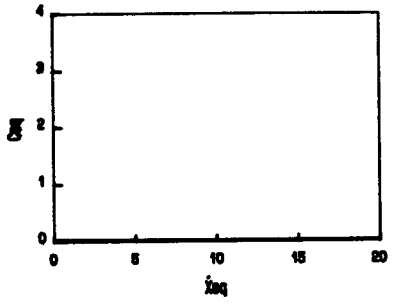
(1) 연화강성(softening spring)인 경우

연화특성을 갖는 스프링을 고려하기 위해 Fig. 6의 4자유도 선형계 모델의 자유도 2, 3에 $f_{23}=-5(x_2-x_3)^3$를 적용하였다. 등가 감쇠값과 등가 강성값을 등가 속도와 등가 변위에 대하여 각각 나타낸 Fig. 7(a), (b)에서 감쇠값은 등가 속도에 대해 영으로 나타나므로 감쇠 특성은 선형임을 알 수 있고, 등가 변위의 증가에 따라 등가 강성값은 감소하므로 연화 특성이 있는 스프링 요소만 자유도 2, 3사이에 비선형 요소로 존재함을 알 수 있고, 이는 실제와 일치된 결과이다.

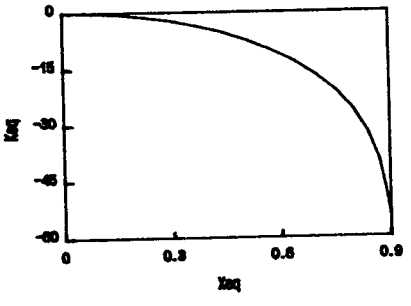
(2) 2차감쇠(quadratic damping)인 경우

2차감쇠인 경우를 고려하기 위해 Fig. 6의 4자유도 선형계 모델의 자유도 2, 3에 $f_{23}=0.025(\dot{x}_2-\dot{x}_3)|\dot{x}_2-\dot{x}_3|$를 적용하였다. Fig. 8 (b)는 등가 변위에 대해 등가 강성값이 영으로 나타나므로 자유도 2, 3사이의 스프링 요소의 특성은 선형임을 나타내고, Fig. 8(a)에서 등가 감쇠값은 등가 속도의 증가에 대해 선형적으로 증가하므로 자유도 2, 3사이에는 2차의 특성을 갖는 비선형 감쇠요소가 존재함을 예측할 수 있어서 실제의 일치된 결과를 얻게 된다.

(3) 경화강성과 2차감쇠(hardening spring and quadratic damping)인 경우

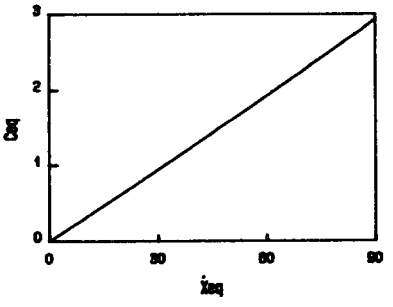


(a) Equivalent damping

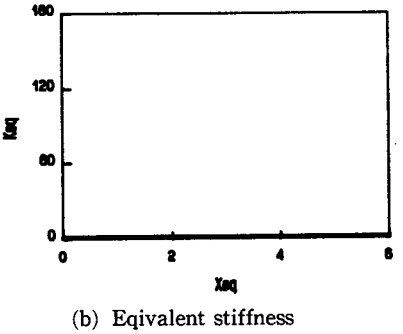


(b) Eqivalent stiffness

Fig. 7 4-DOF system having a softening spring element

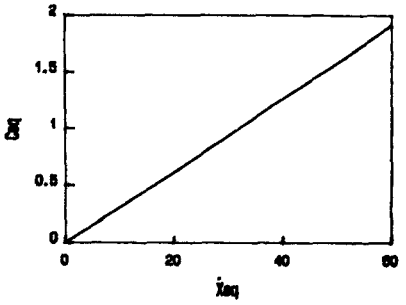


(a) Equivalent damping

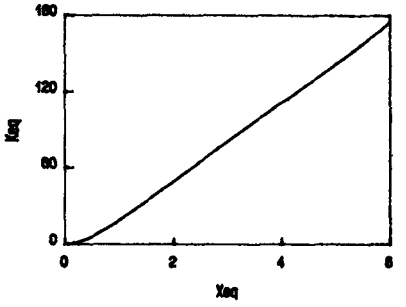


(b) Eqivalent stiffness

Fig. 8 4-DOF system having a quadratic damping element



(a) Equivalent damping



(b) Eqivalent stiffness

Fig. 9 4-DOF having a hardening spring element and a quadratic damping element

변위와 속도에 대해 모두 비선형 특성을 갖는 경우를 고려하기 위해 Fig. 6의 4자유도 선형계 모델의 자유도 2, 3에 $f_{23}=5(x_2-x_3)^3+0.025(\dot{x}_2-\dot{x}_3)|\dot{x}_2-\dot{x}_3|$를 적용하였다. Fig. 9(a), (b)에서 등가속도와 등가변위에 대해 등가 감쇠값과 등가 강성값이 모두 증가하고 있으므로 변위 및 속도에 대해 경화특성이 있는 비선형 요소가 존재하는 것을 나타내며 앞의 두 경우와 마찬가지로 실제와 일치된 결과를 얻는다.

4. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 오차행렬은 계의 비선형 요소 위치를 탐지하는 경우에 효과적으로 사용되어질 수 있으나 2회 이상의 가진이 필요하다.

(2) 오차 벡터 또한 비선형 요소 위치 탐지에 사용가능하며 특히 비선형성 정도를 정성적으로 파악할 수 있는 특징이 있으며 1회의 가진으로 가능한 방법이다.

(3) 본 논문에서 제시된 오차 행렬법과 오차 벡터법은 다자유도계에서 비선형 요소가 여러 곳에 존재하는 경우에도 적용할 수 있다.

(4) 한 개의 비선형 요소가 두 자유도 사이에 존재하는 경우에는 비선형 요소의 위치를 파악한 후, 두 자유도 사이의 등가 감쇠값과 등가 강성값으로부터 비선형 요소의 기본적인 형태 예측이 가능하다.

참 고 문 헌

(1) Merten, M. Van Der Auweraer, H. Vanherck, P. and Soneys, R., 1987, "Measuring and Evaluating Nonlinear Dynamic Behaviour of Mechanical Structures Using Sinusoidal Excitation", 5th IMAC, pp. 721~727.

(2) Tomlinson, G.R., 1987, "Developments in the Use of the Hilbert Transform for Detecting and Qualifying Nonlinearity Associated with Frequency Response Functions", Mechanical Systems and Signal Processing 1, pp. 151~171.

(3) Tomlinson,, G. R., 1989, "A Simple Method of Accurately Determining the Apparent Damping in Nonlinear Structures", 7th IMAC, pp. 1336~1346.

(4) Crawley, E.F. and O'Donnell, K.J., 1987, "Force-State Mapping Identification of Nonlinear Joints", AIAA, Vol. 25, No. 7, July, pp. 1003~1010.

(5) Mertens, M., 1989, "The Complex Stiffness Method to Detect and Identify Nonlinear Dynamic Behavior of SDOF Systems", Mechanical Systems and Signal Processing, 3(1), pp. 37~54.

(6) Iwan, W.D. and Yang, I-Min, 1972, "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multi-degree of Freedom Systems", ASME, J. of Applied Mechanics, pp. 545~550.

(7) Caughey, T.K., 1963, "Equivalent Linearization Techniques", JASA, Vol. 35, No. 11, pp. 1706~1711.