

〈論 文〉

2차원 비점성 천음속 익렬 유동에 대한 수치해석적 연구

이 영 창* · 유 정 열**

(1990년 3월 28일 접수)

A Numerical Study on Two Dimensional Inviscid Transonic Cascade Flow

Young-Chang Lee and Jung Yul Yoo

Key Words : Cascade(익렬), Transonic Flow(천음속 유동), Four Stage Runge-Kutta Integration Scheme(4단계 적분 스킵), Euler Equations(오일러 방정식), Riemann Invariant(리만 상수)

Abstract

Two dimensional inviscid transonic cascade flows have been studied by using the four-stage Runge-Kutta integration scheme for solving the unsteady Euler equations. The boundary conditions can be conveniently described by automatically generating body fitted grids. The use of Riemann invariants for outflow conditions prevents the reflection of disturbances at the boundaries and thus the interruption of convergence. Present numerical technique is shown to be in good agreement with previous numerical results for arc bump cascades and Gostelow cascades, and with previous experimental results for VKI turbine stator flows.

기 호 설 명

A, B : 특성 행렬	t : 시간
C : 음속	U, V : X 와 Y 방향의 반변(contravariant) 속도 성분
c : 익렬 길이(chord length)	u, v : x 와 y 방향의 속도 성분
D : 인공 점성 연산자	X, Y : 계산영역에서의 좌표
E : 전 에너지(total energy)	x, y : 물리적 영역에서의 좌표
F, G : 계산영역으로 변환된 Euler방정식의 벡터	α : 입구에서의 입사각
f, g : 물리적 영역에서의 Euler방정식의 벡터	γ : 공기의 비열비
H : 전 엔탈피(total enthalpy)	Δt : 시간 간격
h : Jacobian의 행렬식	$\epsilon^{(2)}$: 2차 인공점성 계수
P : 압력	$\epsilon^{(4)}$: 4차 인공점성 계수
q_n : 경계면에 수직인 방향의 속도 성분	ρ : 밀도
q_t : 경계면에 평행인 방향의 속도 성분	
R_A, R_B : 행렬 A 와 B 에 대한 Riemann-Invariant	
s : 익렬의 pitch	

첨 자

i : 내부영역의 값
i, j : 격자점의 번호
in : 입구

*서울대학교 대학원

**정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

1. 서론

항공기의 설계조건이 점점 더 고속화 경량화를 요구함에 따라 가스터빈의 단당 길리는 하중도 더욱 커져서 터빈 날개에는 높은 마하수를 가지는 유동이 형성된다. 터빈날개의 복잡한 형상과 이곳을 지나는 큰 유동속도로 인해 날개주위의 유동장을 해석하는 데에는 많은 어려움이 따른다. 즉, 점성 효과에 의한 날개표면의 경계층이나 날개꼬리 부분의 와류, 날개의 끝 부분과 터빈 벽사이의 누설류 등과 같은 복잡한 유동장에 대한 정확한 해석을 위해 전체 유동장을 Navier-Stokes 모델로 해석해야 하겠지만, 이는 대단히 큰 계산용량과 많은 비용을 필요로 한다. 그러므로 아직까지는 Euler 방정식을 채택하는 좀더 경제적인 방법도 많이 사용되고 있다. 특히 비정상 Euler 방정식은 아음속과 초음속 영역에 관계없이 시간에 대해 쌍곡선형이며 엔트로피의 구배가 커지는 강한 충격파를 포착할 수 있는 장점이 있다.

비정상 Euler 방정식의 해를 시간진행 방법으로 구하는 데는 내재적 방법과 외재적 방법이 있다⁽¹⁾. 내재적 방법은 시간간격의 제한을 받지 않지만 그 대신 반복 계산을 필요로 한다. 외재적 시간진행 방법은 내재적인 방법에 비하여 반복계산을 할 필요가 없고 이전 단계에서 직접 해를 구하므로 계산 알고리즘을 구성하기가 쉽다. 그러나 격자의 크기와 유동특성에 따라 시간간격을 제한하는 CFL 조건(Courant, Friedrichs and Lewy condition)⁽²⁾에 의하여 시간간격이 제한되므로 정상상태로 가기 위해서는 많은 횟수의 계산을 필요로 한다. Jameson⁽³⁾은 다단계 Runge-Kutta 방법에 의하여 비정상 Euler 방정식을 적분하면 안정영역이 넓어져서, 예를 들면, 4단계 Runge-Kutta 방법의 경우 보통 1이하로 제한되는 CFL수의 값을 선형 방정식의 해석에서 2.8까지 줄수 있음과 시간에 대한 정도도 향상됨을 보였다. 실제로 다단계 방법 중 4단계 Runge-Kutta 방법이 가장 널리 사용되고 있다. 따라서 본 연구에서도 유한체적법에 의한 4단계 Runge-Kutta 방법으로 2차원 익열에 대한 비점성 천음속 유동장에 대한 해석을 수행하기로 하는데 이는 경계층방정식에 대한 경계조건으로 이용될 수 있고 3차원 계산시 그 기초자료가 될 수 있을 것이다.

2. 이론

2.1 지배방정식

비정상 2차원 Euler 방정식은 아래와 같이 보존형으로 쓸 수 있다⁽⁴⁾.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho Hv \end{bmatrix}$$

여기서 완전기체의 경우에

$$E = \frac{P}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$$H = E + \frac{P}{\rho},$$

$$\gamma = 1.4$$

통상적으로 사용되는 방법을 따라서 지배 방정식의 보존성을 유지하면서도 경계조건을 서술기가 용이하도록 물리적 영역(x, y)으로 부터 계산영역(X, Y)으로 좌표를 변환하면^(4,5), 식 (1)은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \quad (2)$$

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho h U \\ \rho h u U + y_v P \\ \rho h v U - x_v P \\ \rho H h U \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho h V \\ \rho h u V - y_x P \\ \rho h v V + x_x P \\ \rho H h V \end{bmatrix}$$

여기서 U 와 V 는 반변속도성분(contravariant velocity)이며 h 는 좌표변환의 Jacobian 행렬식의 값이다.

$$hU = y_v u - x_v v, \quad hV = -y_x u + x_x v,$$

$$h = |J|, \quad J = \begin{bmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{bmatrix}$$

이 지배방정식을 유한체적법으로 차분하기 위하여 하나의 격자 V 에 걸쳐서 적분한다:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_V h w dX dY + \int_{\partial V} (F dX - G dY) = 0 \quad (3)$$

계산영역 (X, Y) 과 물리적 영역 (x, y) 간의 국소 변환을 다음과 같이 bilinear mapping의 형태로 정의하고⁽⁵⁾

$$x = 4 \sum_{i=1}^4 x_i (1/4 + X_i X) (1/4 + Y_i Y), \quad (4)$$

$$y = 4 \sum_{i=1}^4 y_i (1/4 + X_i X) (1/4 + Y_i Y),$$

$$X_i = \pm 1/2, \quad Y_i = \pm 1/2.$$

한 격자점 (i, j) 에 관하여 적분을 수행하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (hw) + (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) \\ + (G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

위 식에서 하첨자 1/2값은 격자면에서의 값을 나타낸다.

2.2 인공점성

점성항을 가지고 있지 않는 Euler방정식을 수치적으로 해석할때 유동장 내에서 발생된 교란을 감쇄 시켜 줄 기구가 없기 때문에 정상상태로 수렴하기 전에 작은 진폭(예를 들면, 해의 10^{-3} 배의 크기)를 가진 교란이 사라지지 않고 남아서 수렴을 방해한다. 상류차분 방법은 차분식 자체에 내재된 소산적 성질이 교란의 전파나 이에 의한 해의 불안정성을 방지해 주지만 내재적으로 점성항이 포함되어 있으므로 그것의 조정이 어렵다. 그래서 외재적으로 점성항을 첨가해주는 방법이 많이 사용되고 있다. Pulliam⁽⁶⁾의 연구결과에 의하면 앞서 언급된 작은 진폭의 교란을 없애주고 정상상태로 수렴하기 위하여는 4차의 점성항을 첨가해 주어야 하는 것으로 알려져 있다. 그러나 유동의 특성이 급격히 변하는 지역, 예컨대 충격과 부근에서는 4차의 점성항이 wiggle을 일으킨다⁽⁷⁾. 따라서 유동의 특성이 불연속으로 변화하는 지역에서는 2차의 점성으로 교환해줘서 wiggle이 일어나는 것을 방지해 준다. 식 (5)에 점성항을 첨가하여 다시쓰면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (hw) + (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) \\ + (G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}) + Dw = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$Dw = D_x w + D_y w$$

예를 들어, 밀도에 대해서 이 점성항들을 차분식의 형태로 나타내면

$$D_x \rho = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j},$$

$$D_y \rho = d_{i,j+1/2} - d_{i,j-1/2},$$

$$\begin{aligned} d_{i+1/2,j} = \frac{h_{i+1/2,j}}{\Delta t} [\epsilon^{(2)}_{i+1/2,j} (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) \\ - \epsilon^{(4)}_{i+1/2,j} (\rho_{i+2,j} - 3\rho_{i+1,j} \\ + 3\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j})], \end{aligned}$$

$$\epsilon^{(2)}_{i+1/2,j} = k^{(2)} \max(\nu_{i+1,j}, \nu_{i,j}),$$

$$\epsilon^{(4)}_{i+1/2,j} = \max[0, (k^{(4)} - \epsilon^{(2)}_{i+1/2,j})],$$

$$\nu_{i,j} = \frac{|P_{i+1,j} - 2\rho_{i,j} + P_{i-1,j}|}{|P_{i+1,j} + 2P_{i,j} + P_{i-1,j}|}$$

$k^{(2)}$, $k^{(4)}$ 값은 보통 1/4, 1/256 정도가 쓰이고 있으나 수치실험을 통하여 적당한 값으로 조정할 필요가 있다.

2.3 다단계 시간적분

비정상 Euler방정식을 시간에 대해 적분하는 방법에는 내재적인 방법과 외재적인 방법이 있다. 외재적 방법은 이전 시간에서 현재 시간의 값을 직접 계산하므로 계산 알고리즘을 구성하기가 내재적 방법에 비해 쉽다. 그러나 외재적 방법은 유동조건과 격자크기가 정해지면 한번 계산 하는데 필요한 시간간격이 CFL조건⁽²⁾에 의하여 제한되므로 유동의 특성이 급속히 변화 하는 벽근처 등에 격자를 밀집시키면 CFL조건을 만족하는 시간간격도 작아져서 정상상태에 도달하기 위해서는 더 많은 계산을 필요로 하게 된다.

Zhou와 Zhn⁽⁸⁾은 정상상태의 해만을 필요로 할때 각 격자에 대한 최적시간간격을 사용하여 계산시간을 1/2정도 줄일 수 있음을 보였다. 또한 Jameson⁽⁹⁾은 비정상 Euler방정식을 Runge-Kutta 방법에 의해 다단계 적분 하면 보통 1이하로 제한되는 CFL수(시간 단계와 격자 간격의 비에 비례)를 증가시킬 수 있음을 보였다. 이러한 다단계 Runge-Kutta방법중 4단계 방법^(3,5)이 가장 효율적인 것으로 알려져 있으며 이 방법을 선형방정식의 경우에 적용한 결과 CFL수가 $2\sqrt{2}$ 까지 안정영역에 있음이 확인 되었다. 그러므로 본 연구에서도 이 방법을 채택하기로 한다⁽⁹⁾.

2.4 경계조건

2차원 익렬 계산에는 4가지 경계조건이 적용된다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 익렬입구(A-H)에서 유입류 조건과 날개의 표면(G-F, B-C)에서 벽조건, 그리고 주기조건(A-B, C-D, E-F, G-H)과 출구(D-E)에서의 유출류 조건이 각각

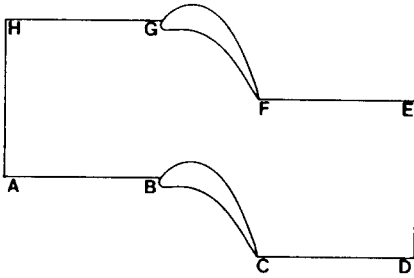


Fig. 1 Physical domain

주어진다. 경계조건을 적용하는 방법은 여러가지가 있으나^(10,11) 본 연구에서는 직전의 시간단계에서의 유동변수값들에 관하여 선형화된 형태의 방정식들의 특성곡선들을 이용하는 방법을 채택한다⁽¹⁾. 이 방정식들은 식 (2)에 연쇄율을 적용함으로써 다음과 같이 구하여진다:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial X} + B \frac{\partial w}{\partial Y} = 0, \quad (7)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad B = \frac{\partial G}{\partial w}$$

여기서 A 와 B 는 4×4 행렬들로서 참고문헌 (1)에 상세하게 쓰여져 있다. 주어진 경계에서 필요한 경계조건들의 수 및 형태는 A 또는 B 의 고유치들에 의하여 결정된다⁽¹⁾. 즉, X 가 일정한 경계에서는 A 행렬의 고유치와 이에 대응하는 Riemann invariant 값이 고려되어야 하며, Y 가 일정한 경계에서는 B 행렬의 고유치와 이에 대응하는 Riemann invariant 값이 고려되어야 한다. 예를 들면, 행렬 A 의 고유치는

$$\lambda_1 = \lambda_2 = U, \quad \lambda_3 = U + \frac{c}{h} \sqrt{y^2 r + x^2 v}, \quad (8)$$

$$\lambda_4 = U - \frac{c}{h} \sqrt{y^2 r + x^2 v}$$

경계에 수직한 속도성분을 q_n , 접선방향의 속도성분을 q_t 라 하면, X 가 일정한 경계에서는 A 행렬의 고유치에 대응하는 Riemann-Invariant 값은

$$R_A = \left[S, q_t, q_n + \frac{2c}{\gamma-1}, q_n - \frac{2c}{\gamma-1} \right], \quad (9)$$

$$S = \frac{P}{\rho^\gamma}$$

양의 고유치는 들어오는 특성곡선에 대응하므로, 아음속 유입류인 경우 3가지 특성값이 유입류 조건에서 결정되고 나머지 하나는 내부로부터 외삽되어야 함을 알 수 있다. 아음속 유출류인 경우 내부로부터 3가지 특성값이 결정되고 한 가지가 출구 밖

으로 부터 결정되어야 하는데 노즐이나 터빈 등의 출구에서는 출구 정압을 정해 준다. 출구 경계에서의 값을 계산하기 위해 이상에서 설명된 방법을 적용하면

$$q_n + \frac{2C}{\gamma-1} = q_n^i + \frac{2C^i}{\gamma-1}, \quad (10)$$

$$q_t = q_t^i,$$

$$\frac{P}{(\rho)^\gamma} = \frac{P^i}{(\rho^i)^\gamma},$$

$$P = P_{exit}$$

위의 4개식에는 4개의 미지량들이 있으므로 상첨자 'i'가 붙은 내부점의 값과 출구에서의 정압을 가지고 경계점에서의 유동값을 알 수 있게 된다. 본 연구에서는 H-type 격자계를 채택하였으므로 입구와 출구 모두 X 가 일정한 경계면이 되며 따라서 행렬 A 에 대한 특성치만이 필요하게 된다.

날개의 벽에서는 no-flux 조건이 적용 되는데 Y 좌표가 물체표면과 일치하므로 반변속도 성분 (contravariant velocity)인 $V=0$ 가 된다. 유한체 적법에서는 격자의 중심점이 벽면에 놓여 있지 않기 때문에 벽면에서의 압력을 외삽해줄 필요가 있다. 벽에서의 압력보정은 no-flux 조건을 이용하는 데 반변속도의 정의에 의하여

$$hV = x_x v - y_x u = 0 \quad (11)$$

위식을 시간에 대해 미분하고 식 (1)의 운동량 방정식에 대입하여 아래와 같은 식을 얻는다.

$$(x^2_x + y^2_x) P_Y = (x_x x_Y + y_x y_Y) P_X + \rho (y_Y u - x_Y v) (v_{x_{xx}} - u_{y_{xx}}) \quad (12)$$

여기서 얻어진 수직 방향의 압력구배를 이용 하여 벽에서의 압력을 외삽해 주게 된다.

2.5 Kutta 조건

비점성 등엔트로피 유동에서는 물체의 후연에서 유동의 속도가 무한대로 되지 않도록 하기 위해 Kutta 조건을 주게 되는데 보통 끝단의 상하면에서의 정체압력이 단일의 값을 가지도록 한다. 본 계산에서는 Kutta 조건이 그대로도 만족되므로 이를 별도로 고려할 필요가 없는데⁽¹²⁾, 그 이유는 구체적으로 다음과 같다.

첫째로 끝단의 위아래점에 주기조건이 주어지므로 위아래 두점의 압력이 같아지게 된다. 둘째는 끝단의 격자점에 대한 플럭스를 계산할 때 물체위에 있는 격자점과 물체의 바깥쪽으로 바로 인접한 격자점에서의 평균값을 취하므로 두점간의 불연속한

값이 나타나는 것을 막아 준다. 세째 가장 중요한 역할을 하는 것으로써 앞서 기술한 바 있는 인공점성이다. 끝단에서 압력의 불연속이 생길때 충격과에서의 경우와 같이 큰 값의 점성이 가해져서 그같은 불연속을 방지해 준다.

2.6 수렴 가속방법

정상상태로의 진행을 가속시키기 위해 엔탈피 가속방법을 사용한다. 정상상태로 수렴하게 되면 전체유동장의 엔탈피는 자유류의 엔탈피와 같아지므로 다음 식에서 엔탈피항은 정상상태로의 수렴을 가속시키는 역할을 하며 수렴된 해에는 영향을 주지 않는다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial Y} + \alpha(H - H_\infty)\Omega = 0 \quad (13)$$

$$\Omega = [\rho, \rho u, \rho v, 1]^T$$

2.7 격자계 생성

유동장에 놓인 물체가 복잡한 형상을 가지면 경계조건을 정확하게 적용하기가 어렵고 유동이 민감하게 변화하는 벽 근처에서 부정확한 경계조건 적용은 해의 불안정성을 가져올 수 있다. 따라서 통상적으로 물체의 표면과 좌표면을 일치시켜서 경계조건 적용을 보다 정확하고 쉽게한다. 특히 압력과 속도가 급속히 변화하는 물체의 선단과 벽 근처 그리고 끝단에서 격자를 밀집시켜야 안정성있고 정확한 해를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 널리 알려져 있는 Thompson의 방법⁽¹³⁾으로 타원형방정식의 해를 구해서 격자계를 생성시켰다.

3. 수치계산 예 및 결과

3.1 대칭 원호익형의 익렬을 지나는 아음속 및 천음속 유동 해석

본 연구에서 채택한 계산방법의 타당성을 검토하고 기존의 수치해석적 연구⁽¹⁴⁾와 비교하기 위하여 우선 2개의 대칭 원호로 구성된 익형의 익렬 유동을 고려하였는데, 원호의 형상은 Fig. 2에 보여진 바와 같이 그 최대 높이가 길이방향으로 중심점에서 익현 길이의 10%이다. Fig. 2에는 입구 마하수가 0.5, 영각이 0인 경우에 유동장의 절반부분에서의 등 마하 수 곡선들이 주어졌는데, 여기서 가장 작은 격자간격과 익현 길이에 대한 비는 0.03125이다. Fig. 3은 동일한 조건에서 아랫면과 윗 면을

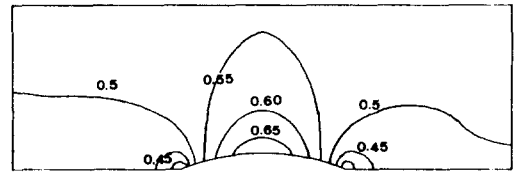


Fig. 2 Mach number contours for arc bump cascade for $M_{in}=0.5$, and $\Delta M=0.05$

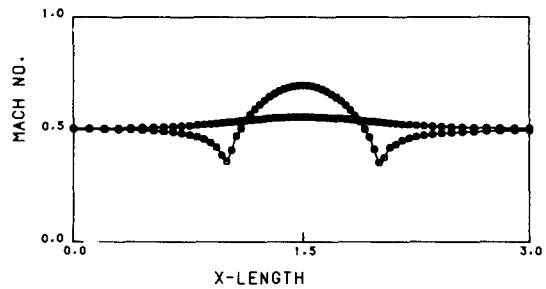


Fig. 3 Surface Mach number distribution for arc bump cascade for $M_{in}=0.5$

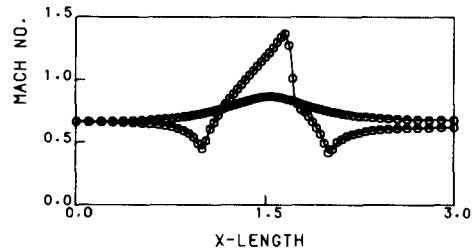


Fig. 4 Surface Mach number distribution for arc bump cascade for $M_{in}=0.675$

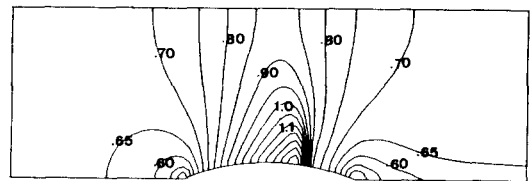


Fig. 5 Mach number contours for arc bump cascade for $M_{in}=0.675$ and $\Delta M=0.05$

따르는 마하수의 분포를 그린 것으로서 Ni⁽¹⁴⁾의 연구결과와 완전히 일치하는 것을 알 수 있다.

Fig. 4와 5는 입구 마하수가 0.675인 경우의 유동장에서의 등 Mach 수 곡선과 표면 Mach수의 분포를 그린 것으로서 천음속 유동장이 얻어지는 것을 알 수 있다. 최고 마하수는 1.4정도이고 충격

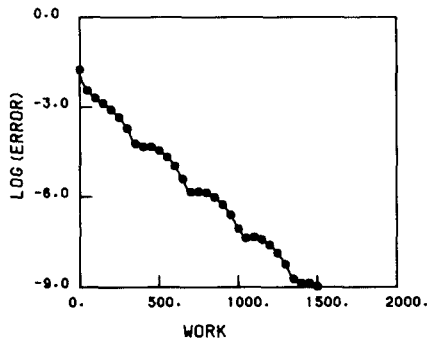


Fig. 6 Convergence history for arc bump cascade flow for $M_{in}=0.5$

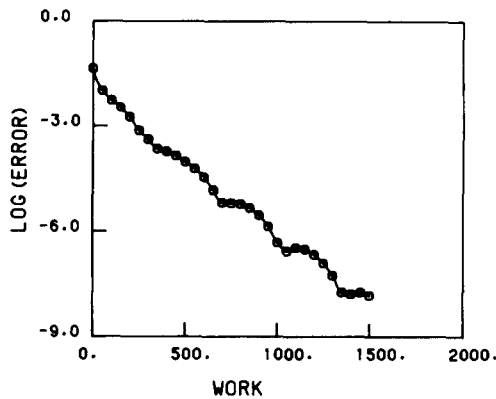


Fig. 7 Convergence history for arc bump cascade flow for $M_{in}=0.675$

파가 생기는 지점은 익현길이의 73%되는 곳에 위치하였는데 Ni의 결과에서는 72%되는 곳에 위치하는 것으로 되어 있다. Fig. 6과 7의 수렴 이력에서 볼 수 있듯이 1500회의 반복 계산결과 엔탈피에 대한 상대 오차는 아음속일 경우 10^{-9} 까지 얻어졌으며 천음속일 경우 10^{-6} 까지 얻어졌다.

수치실험결과 2차 인공점성계수는 3/5, 4차점성계수는 1/107이 적합하였음을 알 수 있었다. 충격파는 3개의 격자점 사이에서 wiggle이 없이 나타났다. 2차의 점성계수를 지나치게 크게 잡으면 수렴된 해라 할지라도 불안정한 모습을 볼 수 있었다. 4차의 점성계수는 수렴에 강한 영향을 주었다. 적당하지 않은 값은 수렴을 방해하고 때에 따라서 발산하는 경우도 있었다. CFL수는 아음속 유동의 경우 최고 2.7까지 안정하였으나 천음속 계산시에는 충격파 등의 영향으로 다소 낮은 값으로 주어졌다. 또한 인공 점성항을 처음 단계에서 계산된

값으로 고정시켜 사용하였는데 각 단계마다 계산된 값을 사용했을 때에는 한계 CFL수가 더욱 감소하였다.

3.2 Gostelow익렬

다음에는 널리 알려진 Gostelow익렬에 대한 계산결과를 고찰한다. Fig. 8에는 입사각이 53.5° , 피치와 코드(chord)의 비가 $s/c=0.9901573$ 인 Gostelow익렬 유동을 해석하기 위한 65×24 격자계

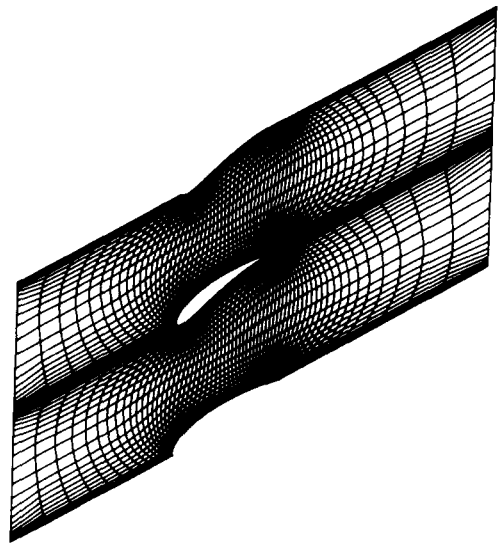


Fig. 8 Grid generation for Gostelow cascade (65×24)

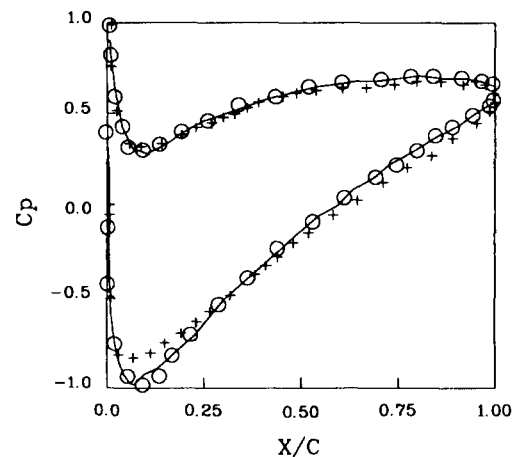


Fig. 9 Pressure coefficient distribution for Gostelow cascade for $M_{in}=0.5$: —, present calculation; ○, implicit LU scheme⁽¹⁾; +, incompressible solution⁽¹⁾

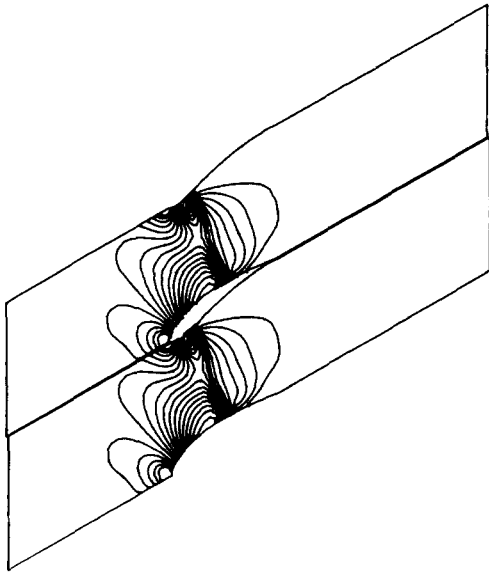


Fig. 10 Mach number contours for Gostelow cascade for $M_{in}=0.75$

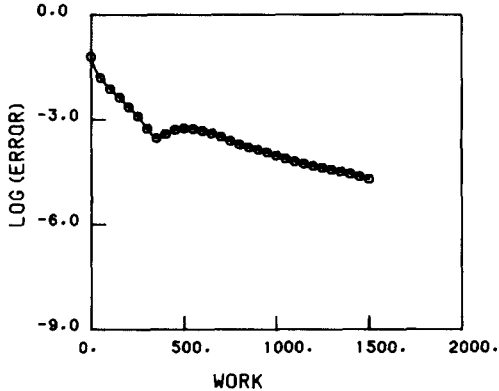


Fig. 11 Convergence history for Gostelow cascade for $M_{in}=0.75$

가 보여진다. Fig. 9에는 입구 마하수가 0.5인 경우에 익형의 압력면과 흡입면에서의 압력계수 분포가 Buratynski와 Caughey⁽¹¹⁾의 내재적 LU스킴에 의한 계산 결과 및 비압축성 유동에 대한 해석해와 비교되었다. 전자와의 매우 근사한 일치는 본 연구에서 채택한 외재적 4단계 시간 적분 방법의 신뢰성을 결정적으로 입증해 주며, 후자와의 차이는 압축성 보정 효과를 나타낸다. Fig. 10은 장차의 연속적인 연구를 위한 참고자료로서 입구 마하수가 0.75인 경우에 등 마하수 곡선들을 보여주는데, 익

렬의 내부통로에서 충격파가 발생하였음을 볼 수 있다. 이 경우에는 1500회 이상 반복 계산을 하여야 비로소 엔탈피에 대한 오차가 10^{-5} 으로 떨어졌는데 (Fig. 11), 이와같이 수렴이 느려진 이유는 벽의 압력계수를 정확하게 계산하기 위하여 익형표면에 격자를 조밀하게 배치하였기 때문이며, 또한 충격파의 발생도 영향을 미쳤을 것으로 생각된다.

3.3 VKI터빈 익렬

마지막 이면서도 가장 중요한 경우로써 터빈 익렬 유동을 고찰하기 위하여, 수치계산에 대한 시험 대상으로 1973년 Von Karman Institute for Fluid Dynamics에서 지정된 이래 여러 연구가들에 의하여 자주 사용되며 1985~86년에 걸쳐서 유럽의 4개 풍동시설에서 실험된 2차원 선형터빈 익렬⁽¹⁵⁾을 채택한다. 편의상 이 익렬을 VKI터빈 익렬이라고 부르는데, Kiock, 등⁽¹⁵⁾에는 이 익렬의 블레이드 좌표, 익렬 자료와 4개 풍동에서의 실험조건, 실험 결과등이 제시되어 있다. 본 연구에서는 위의 4개 풍동시설 중 특히 Göttingen의 것에 대한 실험 자료들을 참고하기로 한다. 즉, 블레이드 좌표는 Kiock 등⁽¹⁵⁾의 Table 1을 사용하고, 피치/익현 길이=0.71, 입사각(입구 유동각)=30°, 입구 블레이드 각=33°, 입구 마하수=0.281로 하여 계산을 수행하였다. Fig. 12에는 이 익렬 유동을 계산하기 위한 82×24 격자계가 보여진다. Fig. 13은 출구 마하수가 0.97인 경우의 표면 마하 수 분포를 나타낸 그림으로서, Kiock 등⁽¹⁵⁾의 실험 결과와 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 즉, 익형의 압력면 끝단에서 발생하는 수직 충격파가 흡입면의 약 60%되는 지점에 영향을 주어서 이 지점의 마하수가 갑자기 증가하는 VKI터빈 익렬 실험 결과를 잘 나타내고 있다. 이와같이 압력면의 끝단에서 발생하는 수직 충격파에 의한 영향을 제대로 예측하기 위하여는 날개의 끝단에 격자를 극단적으로 밀집시켜야 하나, 이는 많은 컴퓨터 시간을 요하며 큰 절삭오차를 발생시킬 우려가 있으므로, 대신에 날개의 끝단을 적절히 모델링함으로써 이런 문제를 극복한다. Arnone와 Stecco⁽¹⁶⁾는 둥근 끝단 주위의 비점성 유동 계산에서 끝단에 작은 뾰기를 세심하게 부가시킴으로써 효과적으로 재순환을 모사할 수 있음을 구체적으로 설명하였으며, 본 연구에서도 이와 유사한 모델링을 채택하였다. 이 계산방법의 타당성은 출구에서의 유동각을 비교해 봄으로써도 알

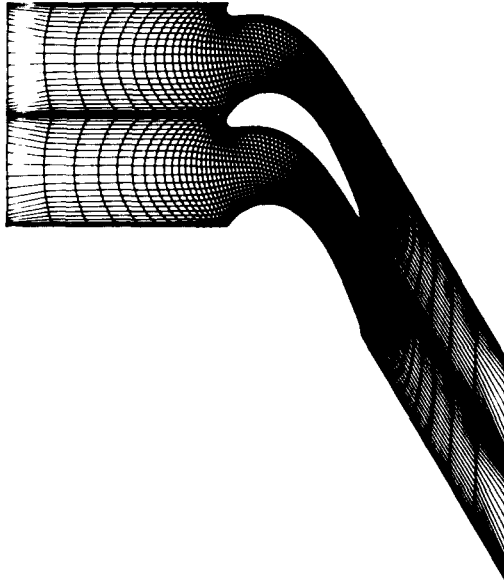


Fig. 12 Grid generation for VKI turbine blade (82×24)

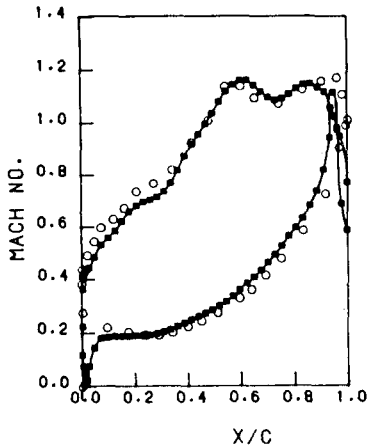


Fig. 13 Surface Mach number distribution for VKI turbine blade for $M_{in}=0.28$, $M_{ex}=0.97$, and $\alpha=30^\circ$; ■, present calculation; ○, experimental result⁽¹⁵⁾

수 있는데, 실험 결과에서는 출구 마하 수 0.957에 대하여 출구 유동각이 67° 인 것으로 나타났으나, 본 계산 결과는 출구 마하 수 0.97에 대하여 출구 유동각 66.5° 가 얻어졌다.

4. 결 론

비정상 Euler방정식의 해를 유한체적법에 의한 4

단계 Runge-Kutta방법으로 구하는 수치해석 코드를 작성하고, 이를 2차원 터빈 정지익렬 주위의 유동에 적용하였다. 출구에서의 경계값을 주는 방법으로서 Riemann invariant를 고려하는 방법을 채택하였는데, 이는 출구에서 교란이 반사되어 수렴을 방해하는 것을 방지해준다. 인공점성의 첨가는 Kutta조건을 별도로 고려하지 않아도 날개의 끝단에서 유동값이 불연속적이 되지 않고 유한한 값을 가지도록 해주며 선단과 끝단 그리고 벽에서의 적절한 격자 배치도 정확한 해를 구하는데 중요한 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 대칭 원호형 익렬과 Gostelow익렬에 대한 계산 결과는 기존의 수치해석적 연구결과와 매우 잘 일치하였으며, VKI터빈 정지 익렬에 대한 계산 결과는 기존의 실험적 연구결과와 잘 일치하였으므로 본 연구에서 채택된 수치 해석 방법의 타당성이 입증되었다. 따라서 이 연구는 계속된 3차원 비점성 계산 방법에 관한 연구의 기초를 이룬다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 목적기초 연구의 일부로 수행되었으므로 심심한 감사의 뜻을 표하며 아울러 수치해석 코드작성 과정에 많은 도움을 주신 이동호 교수님께도 진심으로 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Buratynski, E.K., and Caughey, D.A., 1986, "An Implicit LU Scheme for the Euler Equations Applied to Arbitrary Cascades", AIAA J., Vol. 24, No. 1, pp. 39-46.
- (2) Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill.
- (3) Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., 1981, "Numerical Solutions of the Euler Equation by Finite Volume Methods Using Runge Kutta Time-stepping Scheme", AIAA Paper, 81-1259.
- (4) Chakravarthy, S.R., and Osher, S., 1983, "Numerical Experiments with the Osher Upwind Scheme for the Euler Equations", AIAA J., Vol. 21, No. 9, pp. 1241-1248.
- (5) 안 존, 1987, "유한체적법을 이용한 축대칭 천음속 유동장에 대한 Euler방정식의 수치해석", 서울대학교 항공공학과 석사학위논문.

- (6) Pulliam, T.H., 1986, "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations", AIAA J., Vol. 24, No. 12, pp. 1931~1940.
- (7) Harten, A., 1983, "A High Resolution Scheme for the Solution of Hyperbolic Conservation Laws", J. Computational Physics, Vol. 49.
- (8) Zhou X., and Zhn, F., 1983, "Numerical Computation of Transonic Flows Over Airfoils and Cascades", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 37, pp. 277~288.
- (9) 이영창, 1989, "2차원 비점성 천음속 터어빈 익렬 유동에 대한 연구", 서울대학교 공학석사 학위 논문.
- (10) Gottlieb, D., and Turkel, E., 1978, "Boundary Conditions for Multistep Finite-Difference Methods for Time-Dependent Equation", J. Computational Physics, Vol. 26, pp. 181~196.
- (11) Bayliss, A., 1982, "Far Field Boundary Condition for Compressible Flows", J. Computational Physics, Vol. 48, pp. 182~199.
- (12) Rizzi, A., 1982, "Damped Euler-Equation Method to Compute Transonic Flow Around Wing-Body Combinations", AIAA J., Vol. 20, No. 10, pp. 1321~1328.
- (13) Thompson, J.F., Thames F.C., and Mastin, C.W., 1977, "Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary 2-Dimensional Bodies", NASA CR-2729.
- (14) Ron-Ho Ni, 1982, "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA J., Vol. 20, No. 11, pp. 1565~1571.
- (15) Kiock, R., Lehthaus, F., Baines, N.C., Sieverding, C.H., 1986, "The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels", J. Eng. for Gas Turbines and Power, Vol. 108, pp. 277~285.
- (16) Arnone, A.A., Stecco, S.S., 1989, "Inviscid Cascade Flow Calculations Using a Multigrid Method", ASME Paper, 89-GT-22.