

〈論 文〉

개인용 전산기를 이용한 반복이차계획법의 수치성능개선

임오강* · 이병우** · 조수익***

(1990년 3월 28일 접수)

Computational Enhancements of a RQP Algorithm on the PC

O Kaung Lim, Byung Woo Lee and Su Ik Cho

Key Words: RQP Algorithm(반복이차계획법), Optimal Design(최적설계), Structural Analysis(구조해석)

Abstract

RQP(recursive quadratic programming method) is one of numerical algorithms that are reliable, accurate and superlinearly convergent. Many structural optimization problems are solved by this algorithm on the large computer system. An evaluation of a RQP algorithm is offered and several modification are presented on personal computer. Also, a structural optimization software for minimum weight design of truss-type elements subjected to displacement, stress, and bounds on design variables is implemented on personal computer with ROP algorithm.

————— 기 호 설 명 —————

b	: 설계변수, $b \in R^n$
$f(b)$: 목적함수
$g_i(b)$: 제약조건함수
p	: 설계변화 방향벡터
$F(b)$: 최대위반량, $\max\{0, g_1(b) , \dots, g_{m'}(b) , g_{m'+1}(b) , \dots, g_m(b) \}$
G^0	: 설계변수에 관한 목적함수의 미분벡터, $\nabla f^T(b)$
G^i	: 설계변수에 관한 제약함수의 미분벡터, $\nabla g_i^T(b)$
I_1	: 등호활성화 제약집합, $\{i : g_i(b) + \epsilon(b) \geq 0, i=1, m'\}$
I_2	: 부등호활성화 제약집합, $\{i : g_i(b) + \epsilon(b) \geq 0, i=m'+1, m\}$
I_ϵ	: 활성화 제약조건집합, $I_1 \cup I_2$
$L(b, \mu)$: 라그랑지함수, $f(b) + \sum \mu_i g_i(b)$, $i \in I_\epsilon$

R	: 위반매개변수 (penalty parameter)
W	: 양반정행렬 (positive definite matrix) 또는 미트릭 (metric)
α	: 설계변화량
β	: 변화방향벡터에 대한 가중상수
δ	: 활성화 제약조건의 폭
$\epsilon(b)$: 활성화 제약조건의 두께, $\delta - F(b)$
μ_i	: 라그랑지 (Lagrange) 승수
$\Phi(b)$: 기울기 함수 (descent function), $f(b) + RF(b)$

1. 서 론

공학의 최적화문제는 일반적으로 많은 량의 자료를 계산 저장하므로 연산 속도가 빠르고 기억용량이 큰 대형전산기에서 수행되어 왔다. 이것은 기계나 구조물의 최적설계에 나타나는 함수들은 일반적으로 설계변수에 관한 함축함수로 표현되기 때문이다. 따라서 계산량이 많고 기억하여야 할 정보가 많으므로 수치 실행은 대부분 대형전산기에서 수행

*정회원, 부산대학교 공과대학 기계공학과

**부산대학교 대학원

***만도기계

되는 것이 일반적인 관례였다.

최적 구조물설계의 경우에는 많은 계산량이 요구되는 해석과정을 반복적으로 수행하여야 하므로 개인용 전산기를 이용하는데 제약이 많았으나 최근에는 개인용 전산기를 이용한 비선형 유한요소법에 관한 연구⁽¹⁾와 경사법을 이용한 최적 구조물 설계에 관한 연구⁽²⁾가 발표되었다. 이는 공학에 있어서 개인용전산기가 우수한 계산도구로 사용될 수 있음을 보여주고 있다. 또한 국내에 도입되고 있는 전산기 원용 설계 또는 제작장치(CAD/CAM system)의 경우⁽³⁾에서와 같이 개인용전산기 이용은 자본이 적은 소기업이나 대형전산기 사용에 제한을 받는 대학의 연구에 있어서 중요한 개척분야가 될 것으로 전망되고 있다⁽⁴⁾.

본 연구에서는 공학의 최적화문제 해석에서 우수한 성능을 보인 반복 이차 계획법(recursive quadratic programming)을 개인용 전산기에 맞도록 개발하였다. Wilson이 제안한 RQP 알고리즘은 뉴턴 방법의 일종으로 실용화 단계에서 많은 수정 보완이 되었다⁽⁵⁾. 동류의 알고리즘 중 활성화 제약 조건 방식을 제안한 Pshenichny의 선형화 기법⁽⁶⁾이 공학의 최적화문제에 사용되어 좋은 결과^(7,8)를 얻어, 이 알고리즘의 수치적 성능을 높이기 위한 노력^(9,10)이 계속되었다. 그러나 이 알고리즘은 사용되는 매개 변수들에 따라 수치적 성능이 달라진다⁽¹¹⁾. 따라서 대형전산기에서만 수행된 매개 변수들의 변화에 따른 수치성능을 개인용 전산기에서 수행하여 성능을 검토하며 적절한 정보를 제시하고, 이를 대형 전산기에서의 결과와 비교하였다.

아울러 실용화의 예로 무게를 최소화하는 구조물 설계 소프트웨어를 개인용 전산기에서 개발하였다. 이 프로그램은 유한요소법을 이용하여 각 요소의 응력, 각 절점의 변위와 최소 고유진동수 등의 제약조건을 만족하는 최소 중량의 트러스 구조물의 단면을 설계할 수 있다. 즉 동적기억장소의 데이터 베이스를 이용하여 기존의 프로그램을 재구성하여 반복이차계획법을 이용한 트러스형의 최적구조물설계를 개인용전산기에서 수행하였다. 일반적으로 개인용전산기를 이용한 대형구조물설계에서 나타나는 계산속도와 주기억용량의 부족⁽¹²⁾에 대비하여 Co-processor와 빠른 보조기억장치인 하드 디스크를 장착하였다. 프로그램의 크기가 클 때는 프로그램을 모듈화하고 각 모듈을 주어진 알고리즘에 맞게 운용하는 체제까지 고려하여야 하나 최적화문제의

경우 반복적인 계산량이 많으므로 계산속도를 감안하여 프로그램의 모듈화 작업은 하지않았다.

2. 반복이차계획법과 개선방안

공학에서 해결하여야 하는 최적설계문제를 정식화하면 다음과 같은 형식을 갖는다.

Problem P

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(b) && (1) \\ & \text{subject to} && g_i(b) = 0, \quad i = 1, m' \\ & && g_i(b) \leq 0, \quad i = m'+1, m \end{aligned}$$

이런 비선형 계획법의 문제를 표준형의 이차 계획법으로 바꾸고 이를 거듭하여 풀어 최적해를 구하는 방법을 반복 이차 계획법이라 부른다. 반복적으로 해를 구하기 위하여 초기해를 가정하고 개선된 해를 다음으로 표시 한다.

$$b' = b + \alpha p \quad (2)$$

여기서 p 는 현재의 해 b 에서 개선이 가장 잘된다고 생각하는 방향벡터이고 α 는 정해진 방향에서 이동하고자 하는 변화량을 가리킨다.

2.1 반복이차계획법

식 (1)의 비선형 최적화 문제를 해결하는 일반적인 반복이차계획법의 해석과정은 먼저 변화방향벡터 p 를 구하는 이차계획법을 정의하여 풀고, 변화량 α 를 결정하는 선탐색(line search)을 하는 과정으로 구성된다. 이때 수렴률을 높이기 위하여 변화방향벡터의 계산에 근사 헤세 행렬을 도입하기도 한다.

먼저 이차계획법은 식 (1)의 목적함수 $f(b)$ 와 제한조건식 $g(b)$ 의 일차 미분항까지 전개하고, 변화량을 제한하는 이차항의 조건식이 부가된 최적화문제의 Kuhn-Tucker 필요조건을 생각하여 유도한다.

QP subproblem

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && 1/2 p^T W p + G^{\sigma T} p && (3) \\ & \text{subject to} && G^{i T} p + g_i = 0, \quad i \in I_1 \\ & && G^{i T} p + g_i \leq 0, \quad i \in I_2 \end{aligned}$$

이 부분제를 풀면 설계변수의 변화방향 p 를 얻게 된다. 설계변수 변화방향벡터 p 의 norm($\|p\|$)이 0이 되면 식 (1)의 Kuhn-Tucker 필요조건을 만족하는 것이 되므로 이것을 최적치에 대한 수렴기준이 된다.

설계변수 변화방향벡터 (search direction vector) p 를 식 (3)에서 결정하게 되면 그 방향으로 얼마나 변화시킬 것인가를 결정하는 변화량 α 를 구하는 것이 변화량 결정과정이다. 이 변화량이 결정되면 새로운 설계변수 값 b' 는 식 (2)로 된다.

이 변화량을 구하기 위하여서는 비교변화를 측정할 수 있는 척도가 있어야 한다. 이 기준을 기울기 함수 (descent function)라 하며 Pshenichny는 목적 함수와 최고 위반량을 조합하여 다음 식을 제안하였다⁽⁶⁾.

$$\Phi(b) = f(b) + RF(b) \quad (4)$$

여기서 위반매개변수 (penalty parameter) R 은 활성화 제약조건 (Lagrange 승수)의 절대치를 합한 값보다가 클 경우에 수렴성을 만족하게 되어 있다.

실제로 식 (4)의 최솟치는 해석적으로 구하기 어려워 수치적인 방법이 이용된다. 즉, 다음식을 만족시키는 가장 작은 정수 q 를 J 라 할 때 변화량 α 를 0.5^q 라 둔다.

$$\Phi(b + 0.5^q p) \leq \Phi(b) - 0.5^q \beta \|p\|^2, \quad 0 < \beta < 1 \quad (5)$$

이런 반복이차계획법의 수렴률은 식 (3)에 사용한 W 의 성질에 따라 달라진다. 선형화 기법에서는 단순한 단위행렬을 사용하고 있으나, 수렴속도를 높이기 위하여 BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 법으로 근사 헤세 행렬을 만들어 사용한다. 이를 위하여 Lagrange 함수를 정의하면

$$L(b, \mu) = f(b) + \sum \mu_i g_i(b), \quad i \in I_e \quad (6)$$

여기에 사용된 μ_i 는 식 (3)에서 구한 Lagrange 승수이며 함수식 (6)의 미분치를 이용하여 헤세 행렬을 다음과 같이 구한다.

$$W' = W + aa^T - ee^T \quad (7)$$

여기서 a = Lagrange 함수의 미분치와 반복해의 차를 조합한 벡터

e = 반복해의 차에 헤세행렬을 곱한 벡터

이 방식은 행렬 W 가 양정과 대칭성을 유지되게 한 것으로 간단한 I 행렬로부터 시작한다.

프로그램화 하기 위하여 이를 유통도로 나타내면 Fig. 1과 같다.

2.2 알고리즘의 수치성능 개선

반복이차계획법에서 매 반복회에서의 계산시간과 전체반복횟수를 줄이기 위하여 활성화 제약조건 방책과 근사 헤세행렬을 도입하는 것이 효과적이라고 알려져 있으나, 실제로 사용할 수치에 따라 알고리

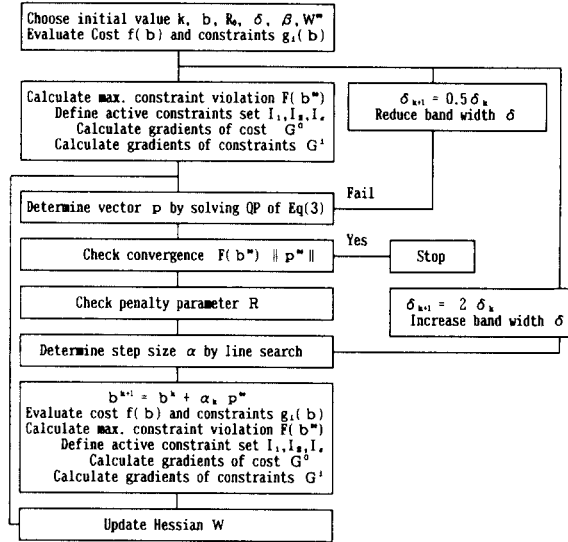


Fig. 1 Flowchart for a RQP algorithm

즘의 수치적 성능은 크게 달라진다. 또한 대형전산기와는 달리 허용되는 유효자리수가 적은 개인용 전산기에서의 평가는 다르게 될 수 있다.

따라서 본 연구에서는 활성화 제약조건식의 선정법과 근사 헤세행렬의 변경방안의 수치 성능을 평가하여 개인용전산기에 적합한 이차계획법을 만들고자 한다.

(1) 활성화 제약조건 선정 방법의 변화

식 (3)의 부분제를 정의할 때 모든 제약조건을 사용하지 않고 위반되거나 위반될 가능성이 많은 조건만을 사용하므로 민감도 계산에 노력이 많이 드는 공학의 최적화문제에서 매 반복회의 계산을 줄여 효율을 높이는 활성화 제약조건 방책을 사용한다. 즉 등호활성화제약집합, I_1 과 부등호활성화제약집합, I_2 를 정하는 방법에 따라서 설계변화 방향 벡터가 다르게 되므로 이러한 선택 변경에 따른 문제점을 지적하고 개선방향을 정하고자 한다.

(가) 활성화 제약조건의 폭, δ 값의 선정

상수 δ 는 최대 위반량, $F(b)$ 에서 활성화 제약조건의 두께 $\epsilon(b)$ 를 결정하게 된다.

$$\epsilon(b) = \delta - F(b) \quad (8)$$

여기서 $F(b) = \max\{0, |g_1(b)|, \dots, |g_m(b)|, g_{m+1}(b), \dots, g_m(b)\}$

등호 제약의 경우에는 제약조건의 절대치를 부등호 제약조건의 경우에는 함수치에서 다음과 같이 활성화

화 제약조건집합을 정한다.

$$I_1 = \{i : |g_i(b)| + \varepsilon(b) \geq 0, i = 1, m'\} \quad (9)$$

$$I_2 = \{i : g_i(b) + \varepsilon(b) \geq 0, i = m' + 1, m\}$$

매개변수 δ 의 값이 크면 많은 제약조건식을 포함하게 되어 설계변수의 변화방향을 결정하는데 좋게 보이기는 하나 민감도 해석에서 시간이 많이 걸릴 뿐 아니라 QP를 풀 때도 많은 시간이 필요하다. 그러나 많은 제약조건이 포함될 경우 각 제약조건식이 수치적으로 독립적이 되지 않을 수도 있고 너무 많은 조건식이 있어서 해석이 힘든 경우도 발생한다. 따라서 표준화 시킨 제약조건에서 δ 의 크기에 따라 비교하였다.

(나) 활성화 제약조건의 두께 $\varepsilon(b)$ 선정

식 (8)의 정의에서 최대위반량이 적을 경우에 큰 δ 를 사용하게 되면 이미 만족하고 있는 제약조건들도 많이 포함되므로 비효율적이 된다. 그러나 적은 δ 를 사용할 경우 최대 위반량이 커지면 극히 일부의 제약조건만을 사용하게 되어 설계변화방향 벡터가 나쁘게 될 수 있다. 따라서 위배된 제약조건을 모두 포함시킬 수 있게 $\varepsilon(b)$ 의 값을 양으로만 제한해 보았다. 그러면 헤세행렬의 수정 때 생긴 문제를 줄일 수 있으며 이들 제약조건식의 정보를 이용하여 보다 나은 설계변수 변화방향벡터를 구할 수 있다. 이럴 경우 취급하여야 할 조건식이 증가 한다는 약점도 있으므로 음의 값이 되어 크게 위배된 조건만을 사용하는 경우와 비교하였다.

(다) Lagrange승수 값에 따른 선정

근사 헤세행렬을 구성하기 위하여서는 식 (6)에서 정의된 Lagrange함수의 미분치가 식 (7)과 같이 사용된다. 따라서 헤세행렬의 수정을 위하여 함수치를 가진 제약조건의 모든 Lagrange승수가 필요하다. 주 영이 아닌 승수치의 제약조건식은 활성화 조건식 집합에 포함되어 있는 것이 계산상 유리한 점이 많다. 그리고 다음에 나타날 것으로 예측되는 부분까지 포함할 수는 없으나, 현재의 반복회에서 비록 제약조건을 만족하더라도 영이 아닌 Lagrange승수값을 가진 제한조건식은 식 (9)의 정의에 부가하여 활성화 제약조건집합을 구성하여 비교하였다.

(2) 근사 헤세행렬의 조정

수렴속도를 빠르게 하는데 큰 비중을 차지하고 있는 헤세행렬도 일차의 민감도해석 결과를 이용하여 식 (9)로 구한다. 이때 활성화 제약조건 방책과 함수의 비선형성 등으로 인하여 근사 헤세행렬이 틀린 정보를 포함할 경우도 있어서, 오히려 잘못된 설계변수 변화방향을 줄 수 있고 행렬의 수치들의 크기가 너무 차이가 날 경우에는 수치해석의 결과가 나쁘게 되기도 한다. 이를 피하기 위하여 틀린 근사 헤세행렬을 단위행렬로 바꾸어주는 것이 필요하므로 변환의 적절한 기준을 선정할 필요가 있다.

(가) 활성화 제약조건식 변화율에 따른 조정

근사 헤세행렬은 식 (6)의 Lagrange함수 미분치

Table 1 Cases of computational modifications for RQP

Case	Notation	Computational modification
Band width for active constraint δ	$\delta = 0.1$	Band width for normalized constraints is 0.1
	$\delta = 10.0$	Band width for normalized constraints is 10.0
Constraint checking parameter $\varepsilon(b)$	$\varepsilon(b)^+$	ε must be greater than zero. Active set involves all violated constraints
	$\varepsilon(b)$	ε can be negative. Active set involves only some of larger violated constraints
Value of Lagrange multiplier (LM)	I_c^1	Constraints with nonzero LM in previous iteration must be active
	I_c^0	$I_1 \cup I_2$
Rate for changes of active constraints	XNAC = 50%	Rate is greater than 50%
	XNAC = 80%	Rate is greater than 80%
Ratio of diagonal elements	$c = 1.0E7$	Ratio, $c = D \max / D \min$ is greater than 1.0E7
	$c = 1.0E9$	Ratio, $c = D \max / D \min$ is greater than 1.0E9

를 사용하므로 정의된 활성화 제약집합이 바뀌게 되면 지금까지 사용한 근사 해세행렬의 정보가 사실과 다르게 되어 이 행렬을 이용한 설계변수 변화방향 벡터가 잘못 선정될 가능성이 많다. 이런 경우에는 초기의 단위행렬을 이용하는 것이 타당성이 많으나 변화될 때마다 단위행렬을 사용하게 되면 수렴속도가 떨어질 가능성도 높게 되므로 활성화조건식수의 변화율 XNAC를 기준으로 단위행렬로 취환하였다. 예를 들면 앞반복에서 10개의 활성화 제약조건식이 있었고 현반복에서 그들 중 5개가 활성화 제약조건식에서 제외되면 XNAC는 50%가 되며 80%라고 하면 10개중 8개가 제외되는 경우를 비교하였다.

(나) 대각선 행렬의 수치비에 따른 조정

행렬의 조건수(condition number)에 따라 수치계산 결과의 정확도가 많이 달라진다. 그러나 행렬의 조건식을 정확히 계산하기는 계산량이 너무 많아서 실제로 적용할 경우 크게 도움이 되지 않는다. 다행히도 대각선 행렬을 이용하여 해세행렬을 수정하는 과정을 택하고 있으므로 근사적으로 이 대각선 행렬의 요소크기를 비교하여 행렬의 수치계산의 정확도를 비교하는데 사용하였다. 따라서 이들의 비가 일정한 범위를 벗어날 경우에 단위행렬을 다시 사용하는 경우를 비교하였다.

이들의 각 개선방안을 정리하면 Table 1과 같다.

3. 소형전산기를 이용한 수치해석

DOS 3.20 운영체계에 Co-processor와 30MB 하드디스크가 장착된 IBM PC/AT 호환기종에 Fig. 1의 RQP 알고리즘을 FORTRAN 77로 프로그램화하였다. 본 프로그램은 입력자료 파일과 목적함수와 제약조건식을 제공하는 사용자 서브루틴으로 구성되어 Fig. 2와 같이 데이터 베이스로 결합되어 있다.

Table 1의 RQP 알고리즘의 개선방안에서 활성화

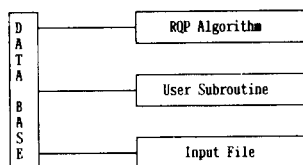


Fig. 2 Programming system

화 제한조건의 변화와 근사 해세행렬의 치환 조건에 대한 연구를 위하여 각 경우를 조합하면 32가지의 경우의 수가 생긴다. 이 32가지와 원래의 RQP 알고리즘(RQP : I_e^* , $\epsilon(b)^*$, $c=1.0E9$, $\delta=0.1$)을 합한 33경우들에 대해 그 성능을 조사하기 위하여 3가지 문제의 사용자 서브루틴과 입력자료 파일을 준비하였다.

그중 최소의 무게를 가지며 절점의 변위, 요소의 응력, 단면적의 크기 제약과 최소 고유진동수에 대한 제약 등을 만족하는 트러스 구조물의 단면설계를 위한 유한요소 프로그램을 준비하여 사용자 서브루틴 형태로 만들었다. 이들 제약조건의 민감도 해석을 위하여서는 Adjoint변수법⁽¹³⁾을 사용하였다. 보조기억장치를 이용하여 알고리즘에 사용되는 제약조건의 기울기, 해세행렬의 개선 수정 정보와 유한요소 모델의 강성행렬, 질량행렬, 절점의 변위, 부재의 기하학적 정보등을 직접집행파일로 구성한 데이터베이스로 만든 최적 구조물 해석 프로그램은 Fig. 3과 같다.

매개변수의 초기치는 $R_0=1.0$, $\beta=0.00001$, 수렴기준 $ACC=0.0001$ 을 택하고, 변화량 결정의 수치해석 반복횟수인 NFLINE은 10으로 하였다. 만일 적당한 변화량 α 를 10번의 시도에서 구하지 못하면 모든 제약조건이 활성화될 때까지 δ 값을 2배 증가시키도록 했고 최대 반복횟수는 200번으로 일단 제한하였다.

IBM PC/AT 호환기종에서의 결과와 CYBER

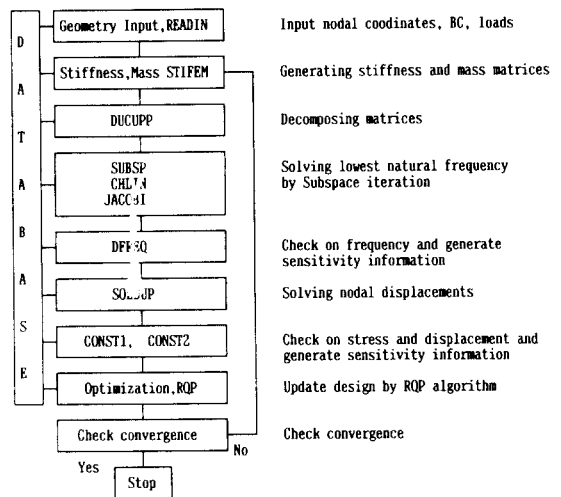


Fig. 3 Flowchart for truss optimization program

180/830에서의 결과를 비교한 항목은 반복횟수 ITER, 최적해에서의 활성화 제약조건수 NAC, 목적함수와 제약조건함수 계산 부프로그램의 호출수 FE, 목적함수 민감도 계산 부프로그램의 호출수 GCF와 제약조건식의 민감도 해석 부프로그램의 호출수 GCO이다.

3.1 Rosen-Suzuki문제

알고리즘의 성능비교에 자주이용되는 이 문제는 순수한 수학문제로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } f &= b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2 + b_4^2 - 5b_1 \\ &\quad - 5b_2 - 21b_3 + 7b_4 + 100 \\ \text{subject to } g_1 &= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_1 - b_2 \\ &\quad + b_3 - b_4) / 8 - 1.0 < 0 \\ g_2 &= (b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 + 2b_4^2 - b_1 \\ &\quad - b_4) / 10 - 1.0 < 0 \\ g_3 &= (2b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1 - b_2 \\ &\quad - b_4) / 5 - 1.0 < 0 \end{aligned}$$

설계변수 (0.0, 0.0, 0.0, 0.0)을 출발점으로 하여

치적해 (0., 1., 2., -1.)와 최적치 56.0을 얻었다. 각 경우의 요약 결과는 Table 2에 있다. Cyber에서는 δ 가 0.1일 때 비교적 좋은 결과를 주었으나, PC에서 수행한 결과는 $\epsilon(b)$ 의 조건과 함께 사용하였을 때 가장 나쁘게 나타났다. $\epsilon(b)^+$ 와 $\delta=1.0$ 인 경우가 공히 가장 좋았으며 PC의 경우 $\delta=10.0$ 일 때 비교적 좋았다. 그러나 근사 해세행렬을 단위행렬로 치환하는 효과는 나타나지 않았는데 이것은 전 반복회에서 활성화 조건의 변화가 적었고 조건수도 작았기 때문이다.

전체적으로 보면 PC로 수행할 때 반복회수나 계산횟수가 크게 증가함을 알 수 있다. 이것은 두 기종의 유효숫자 처리기능 차이가 크므로 반복적인 계산이 많은 최적설계에서 당연히 발생할 수 있다.

3.2 Shell(Colville) Primal문제

문제는 다음과 같이 정의되며 이때 사용된 계수 a_{ij} , c_{ij} , b_i , b_j 와 e_j 는 상수로써 참고문헌 (14)에 주어져 있다.

Table 2 Summarized results for Rosen-Suzuki problem

No	δ	$\epsilon(b)$	$I\epsilon$	XNAC	c	CYBER 180/830					IBM PC/AT				
						ITER	NAC	FE	GCF	GCO	ITER	NAC	FE	GCF	GCO
1	A	A	A,B	A,B	A,B	11	3	26	11	10	39	2	115	39	38
2	A	B	A,B	A,B	A,B	12	2	31	12	11	69	3	274	70	69
3	B	A	A,B	A,B	A,B	15	3	40	15	15	54	3	151	54	54
4	B	B	A,B	A,B	A,B	15	3	40	15	15	54	3	151	54	54
RQP	A	A	A		B	11	3	26	11	10	39	2	115	39	38

- ① δ A : 0.1 B : 10.
- ② $\epsilon(b)$ A : $\epsilon(b)^+$ B : $\epsilon(b)$
- ③ $I\epsilon$ A : $I\epsilon^+$ B : $I\epsilon^0$
- ④ XNAC A : 50% B : 80%
- ⑤ c A : 1.0E7 B : 1.0E9

Table 3 Summarized results for shell(colville)primal problem

No	δ	$\epsilon(b)$	$I\epsilon$	XNAC	c	CYBER 180/830					IBM PC/AT				
						ITER	NAC	FE	GCF	GCO	ITER	NAC	FE	GCF	GCO
1	B	A,B	A,B	A,B	A,B	6	10	10	6	6	11	10	37	11	11
2	A	A	A,B	A,B	A,B	10	4	32	10	10	22	4	90	22	22
3	A	B	A	A,B	A,B	15	4	51	15	15	25	4	95	25	25
4	A	B	B	A,B	A,B	18	4	68	18	18	25	4	95	25	25
RQP	A	A	A		B	8	4	26	8	8	22	4	90	22	22

- ① δ A : 0.1 B : 10.
- ② $\epsilon(b)$ A : $\epsilon(b)^+$ B : $\epsilon(b)$
- ③ $I\epsilon$ A : $I\epsilon^+$ B : $I\epsilon^0$
- ④ XNAC A : 50% B : 80%
- ⑤ c A : 1.0E7 B : 1.0E9

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f = \sum e_i x_i + \sum \sum c_{ij} x_i x_j + \sum d_j x_j^3 \\ &\text{subject to } g_i = -\sum a_{ij} x_j + b_i < 0 ; i = 1, \\ &\quad 2, \dots, 10 \\ &\text{and } x_i > 0 ; i = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

초기설계변수로 (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)을 선택하였다. 최적값은 -32.25이며 최적해는 (0.3, 0.3335, 0.4, 0.4283, 0.2240)으로 요약한 수치결과가 Table 3에 주어져 있다. 가장 효과적인 선택은 $\delta=10.0$ 일 경우에 가장 성능이 우수하였다. 이 문제는 제약조건식의 위반정도가 비슷하여 활성화 제약조건 의 폭을 크게 하므로써 다른 개선안을 많이 포함하 여 큰 차이가 나지 않았기 때문이다. 가장 작은 활 성화 조건을 취하게 되는 $I_e^0, \epsilon(b)^-, \delta=0.1$ 의 경 우가 반복횟수가 많아 계산량이 크게 됨을 알 수 있다.

3.3 Ten Bar Truss

10개의 부재로 구성된 외팔보의 최소 중량을 가 지는 구조물을 설계하는 문제로 Fig. 4에 나타나 있다. 하중은 아래방향으로 절점 1과 3에서 222.4 kN(50kips)이 절점 2와 4에서 667.2kN(150kips) 이며 탄성계수 $E=70\text{GPa}(10^4\text{ksi})$, $\rho=1.6\text{kg/m}^3$ (0.10 lb/in³)인 재질로 되어 있다. 제약조건은 각

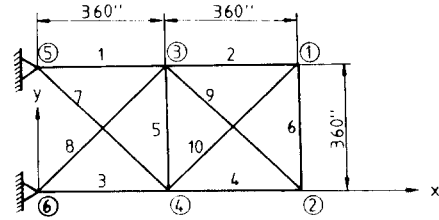


Fig. 4 Ten bar truss

절점의 변위한계는 50.8mm(2.0in), 단면적의 하 한은 64.5mm²(0.1 in²)이며 각 부재의 응력한계는 172.4MPa(25ksi)이다. 설계하고자 하는 단면의 크기인 설계변수의 초기치는 10개의 변수를 각각 64.5mm²(1.0in²)인 경우에 대하여 수행하였다.

최적해는 2169kg(4783 lb)이며 그때의 단면적은 (25.14, 1.075, 26.13, 12.99, 0.1, 1.965, 14.225, 15.66, 17.28, 0.1)in²이다. 요약한 결과 Table 4를 보면 $\delta=10.0$ 일 때 가장 개선 효과가 많았음을 알 수 있다. $\delta=0.1$ 을 사용하였을 때에도 역시 활 성화 조건을 많이 갖게 하는 I_e^+ 와 $\epsilon(b)^+$ 가 좋았으 며, PC를 사용하는 경우에는 특히 $\epsilon(b)^+$ 가 효과적 임을 알 수 있다.

Table 4 Summarized results for ten bar truss problem

No	δ	$\epsilon(b)$	I_e	XNAC	c	CYBER 180/830				IBM PC/AT					
						ITER	NAC	FE	GCF	GCO	ITER	NAC	FE	GCF	GCO
1	B	A,B	A,B	A,B	A,B	7	23	18	7	7	26	13	36	26	26
2	B	A,B	A,B	A,B	A,B	9	23	23	9	9	26	13	36	26	26
3	A	A	A	A	A	12	10	34	12	9	300	10	1574	301	297
4	A	A	A,B	A,B	A,B	15	10	33	15	15	300	10	1574	301	297
5	A	A	B	A	A,B	25	10	89	25	25	300	10	1574	301	297
6	A	A	A	B	A,B	46	10	152	46	46	300	10	1574	301	297
7	A	B	A	A	B	61	10	197	61	61	381	10	2343	381	377
8	A	B	A	A	A	68	10	234	68	68	381	10	2343	381	377
9	A	A	B	A	A	94	10	339	94	94	300	10	1574	301	297
10	A	B	B	B	A	101	10	493	101	101	381	10	2343	381	377
11	A	B	B	A	B	114	10	538	114	114	381	10	2343	381	377
12	A	B	B	B	B	123	10	531	123	121	381	10	2343	381	377
RQP	A	A	A		B	21	10	28	21	21	300	10	1574	301	297

- ① δ A : 0.1 B : 10.
- ② $\epsilon(b)$ A : $\epsilon(b)^-$ B : $\epsilon(b)^+$
- ③ I_e A : I_e^+ B : I_e^0
- ④ XNAC A : 50% B : 80%
- ⑤ c A : 1.0E7 B : 1.0E9

4. 결 론

공학의 최적화 문제는 일반적으로 함축함수로 나타나므로 함수와 그의 미분치를 구하는 민감도 해석에 시간이 많이 걸린다. 이런 특성 때문에 많은 최적화 기법 중 뉴턴 방법을 제약조건이 있는 경우에 적용할 수 있게 한 반복 이차 계획법 중 근사해세 정보를 이용하여 수렴속도를 높이고 활성화 제약조건식 기법을 혼합하여 만든 알고리즘이 많이 쓰이고 있다.

본 연구에서는 개인용 전산기에서 이 알고리즘을 사용하기 위하여 프로그램화하고 이 알고리즘이 갖는 매개변수변화에 따른 수치적 성능을 평가하였다. 변화는 주로 활성화 조건식을 결정하는 기준을 바꾸어 보았으며, 근사 해세 행렬의 정보를 정확하게 유지할 수 있게 사용중이던 행렬을 단위행렬로 치환하는 기준의 선정에 관한 것이다.

성능을 비교하는 예로 무게를 최소화 하는 구조물 설계 소프트웨어를 개인용 전산기에서 개발하였다. 이 프로그램은 유한요소법을 이용하여 각 요소의 응력, 각 절점의 변위와 최소 고유진동수 등의 제약조건을 만족하는 최소 중량의 트리스 구조물의 단면을 설계하도록 한 것이다. 개인용 전산기를 이용하여 최적설계를 할 경우 반복되는 계산으로 오차가 발생할 가능성이 많으나 일반 공학에 필요한 자료는 얻을 수 있었다.

유효자리숫자가 많은 대형전산기에서는 구조물 설계와 같은 제약조건이 많고 민감도 해석이 어려운 문제에서는 활성화된 조건이 적게 되도록 하는 것이 비록 설계변수 변화방향벡터를 결정하는데 나쁜 영향을 주어 반복횟수를 늘이기는 하지만 오히려 전체풀이 시간을 줄이는데 도움이 된다고 알려졌으나, 개인용 전산기에서는 많은 조건을 포함하도록 활성화 제약조건식의 선정폭을 표준화 시킨 제약조건식에서 큰 값인 10.0을 택하는 것이 좋다. 또 근사 해세 행렬의 계산에 도움을 주는 Lagrange 승수에 따라 활성화 조건식을 확대한 것도 도움이 되었다.

그러나 설계변수가 많은 대규모 구조물의 설계에서는 기억용량의 제한보다도 실행 시간이 너무 걸리게 되므로 전산기의 하드웨어의 성능개선이 요망된다.

아울러 개인용 전산기에서 수행한 성능의 객관적

평가를 위하여서는 많은 연구가 계속되어야 할 것이다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 873-0916-014-2연구지원에 의하여 수행된 결과의 일부입니다. 동재단의 관계제위께 감사드립니다.

인 용 문 헌

- (1) 정세희, 조규중, 1986, "연성파괴 해석을 위한 비선형 유한요소 모델의 개발 -소형 컴퓨터를 위한-", 대한기계학회논문집, 제10권, 제1호, pp. 25~33.
- (2) Nguyen, D.T. and Rogers, J.L., 1986, "Optimal Design of Structural with Multiple Design Variables per Group and Multiple Loading Conditions on Personal Computer", Computer and Structures, Vol. 22, No. 2, pp. 179~184.
- (3) 이종원, 1986, "국내 CAD/CAM기술의 활용상태와 전망", 대한기계학회지, 제26권, 제4호, pp. 278~283.
- (4) 이진우, 1986, "전산기 원용 설계 연구의 전망", 대한기계학회지, 제26권, 제5호, pp. 360~362.
- (5) Schittkowski, K., 1981, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han and Powell with Augmented Lagrangian Type Line Search Function, Part I: Convergence Analysis; Part II: An Efficient Implementation with Linear Least Squares Subproblems", Numer. Mathematics, Vol. 38, pp. 83~127.
- (6) Pshenichny, B.N., 1970, "Algorithms for the General Problem of Mathematical Programming", Kibernetica, Vol. 5, pp. 120~125.
- (7) Choi, K.K., Haug, E.J., Hou, J.W. and Sohoni, V.N., 1983, "Pshenichny's Linearization Method for Mechanical System Optimization", Trans, ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 105, No. 1, pp. 97~103.
- (8) 이희각, 1988, "Application of Linearization Method for Large-Scale Structure Optimization -구조물 최적화를 위한 선형화 기법-", 전산구조공학, 제1권, 제1호, pp. 87~94.
- (9) Lim, O.K. and Arora, J.S., 1986, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, Vol. 57, pp. 51~65.
- (10) Gabriele, G.A. and Beltracchi, T.J., 1987, "An Investigation of Pshenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization", Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 248~256.
- (11) 임오강, 이병우, 변준석, 1990, "최적구조물 설계를 위한 RQP 알고리즘의 매개변수 성능평가", 전산구조공학회, 제 3 권, 제 1 호, pp. 83~95.
- (12) 이영희, 1988, "퍼스널컴퓨터 하드웨어 소개 및 활용", 전산구조공학회, 제 1 권, 제 2 호, pp. 18~25.
- (13) Arora, J.S. and Haug, E.J., 1979, "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization", AIAA J. Vol. 17, No. 9, pp. 970~974.
- (14) Hock, W. and Schittkowski, K., 1980, "Test Examples for Nonlinear Programming Codes", Lecture Notes in Economics and Mathematical and Structural Systems, Vol. 187, SpringerVerlag.