

〈論 文〉

2차원 열간 단조에서의 변형과 온도의 연계 해석과 비연계 해석 비교

조종래* · 박치용* · 천명식** · 윤정호* · 양동열*

(1990년 3월 13일 접수)

Comparative Study of the Coupled and Decoupled Analysis of Deformation and Heat Transfer for Two-Dimensional Hot-Forging

J.R. Cho, C.Y. Park, M.S. Cheon, J.H. Yoon and D.Y. Yang

Key Words : Rigid-Viscoplastic Analysis (강-점소성 해석), Coupled Analysis (연계 해석),
Decoupled Analysis (비연계 해석), Thermo-Viscoplastic Analysis (열-점소성 해석),
Non-Isothermal Deformation (비등온 변형), Isothermal Deformation (등온 변형)

Abstract

The study is concerned with the comparison of coupled analysis with decoupled analysis for plastic deformation and heat transfer analysis in thermo-viscoplastic axisymmetric or plane strain forging. A rigid-viscoplastic material is used so as to take the effect of strain rate and working temperature into account. Axisymmetric and plane strain examples for forging are chosen for computation. Analysis of deformation and heat transfer is carried out for upsetting of cylinder by both coupled and decoupled schemes in order to check whether the computation time can be saved by the the decoupled analysis without impairing the accuracy of the solution. The comparison has shown that the results of the decoupled analysis are almost coincident with those of the coupled analysis. The analysis of heat transfer are carried out both by the finite element method and by the finite difference method. The distribution of temperature by the FDM is coincident with that by the FEM. The finite difference formulation by heat balance of element, however, needs large input data and is less accurate than the FE formulation, since the temperature in an element of the FDM is constant.

기 호 설 명

c : 비열
 f, f_i : 금형과 소재간의 마찰력 및 그 성분
 H' : 가공 경화율
 h : 대류 열전달 계수
 h_e : 대류와 복사를 합한 등가 열전달 계수
 h_{lub}, h_c : 금형과 공작물 사이의 열전달 계수

J : 일의 열당량
 K^* : 벌칙 상수 (penalty constant)
 k : 진단 항복 응력
 K_1, k_1 : 열전도도 (conductivity)
 $l_{ia}, l_{ib}, l_{bi}, l_{ie}$: 요소중심에서 요소면까지 거리
 m : 마찰 상수
 n, n_j : 금형 표면에 수직인 단위 벡터
 q : 단위 체적당 발생 열량
 S_{a1}, S_{a2}, S_b, S_e : 요소면의 열전달 면적

*정회원, 한국과학기술원 생산공학과

**정회원, 산업과학기술연구소

T_i	: i 요소의 온도
T_{a1}, T_{a2}	: i 요소와 동일 재료의 인접요소 온도
T_b	: 경계면에서 접해있는 인접요소 온도
T_e	: 주위 온도(ambient temperature)
T_s	: 표면온도
T_d	: 공작물과 접하는 면의 금형 온도
T_w	: 금형과 접하는 면의 공작물 온도
V	: 절점 속도 벡터
V_s	: 금형과 소재간의 상대속도 벡터
α	: 비 정상 상태의 가공경화를 고려한 수식화에 쓰이는 상수
β	: 감속 계수(deceleration coefficient)
Δt	: 비 정상 상태의 단계당 시간 간격
$\dot{\epsilon}_v$: 체적 변형률 속도
$\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}$: 유효 변형률 및 변형률 속도
$\bar{\sigma}$: 유동 응력(flow stress)
$\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$: 응력 텐서 및 편차응력 텐서
ρ	: 밀도
φ	: Boltzmann 상수
ν	: 표면 방사율(emissivity)

1. 서 론

열간단조 공정은 재결정온도 이상에서 성형하는 방법으로 대형 공작물을 가공하거나 프레스의 용량에 제한을 받을때 주로 이용된다. 재결정온도 이상에서는 재료가 풀립(annealing)작용으로 연화되기 때문에 유동응력(flow stress)이 적어 많은 양의 변형이 가능하게 된다. 열간단조 공정의 최적화를 위해서 유한요소법에 의한 해석이 크게 도움이 되었다.

유한요소법을 이용한 열간단조 공정을 해석하는 방법에는 점소성 해석(viscoplastic analysis)과 이점소성 이론에 온도해석을 목적으로 열역학적 이론을 도입한 열 점소성 해석(thermo-viscoplastic analysis)방법이 있다. 점소성 및 열 점소성 해석에는 탄 점소성(elasto-viscoplastic)^(1,2)과, 강 점소성(rigid-viscoplastic)해석 등으로 나눌 수 있다.

일반적으로 강소성 이론으로는 시간에 종속적인 재료의 거동해석에는 부적합하다. 시간에 종속적인 재료의 거동을 고려하기 위해 변형률 속도(strain-rate)를 도입하여 수식화한 일반적인 이론이 점소성 이론이다. 점소성 이론의 일반화는 주로 Perzyna⁽³⁾와 Cristescu⁽⁴⁾에 의해 확립되었다.

열 점소성 해석에서는 변형과 온도를 한 행렬식

으로 만들어 동시에 구하는 연계(coupled)방식과 변형과 온도를 분리해서 해석하는 비연계(decoupled)방식이 있다. 정상 상태(steady state)의 압출 문제⁽⁵⁾와 같이 계산량이 적을때는 연계방식을 이용하지만 비정상 상태(non-steady state)문제는 주로 비연계 방식을 이용한다.

또한 온도 해석 방법에는 유한 차분법과 유한 요소법을 이용하고 있으며 주로 유한 요소법이 많이 이용되고 있다.

Zienkiewicz와 Cormean⁽⁶⁾은 점 탄소성 재료에 대한 유한 요소해석을 미소 변형이론(infinitesimal deformation theory)에 근거를 두어 해석하였고, Nagarajan와 Popov⁽⁷⁾는 유한 변형률 이론(finite strain theory)에 기초를 두어 해석하였다.

Tomita와 Sowerby⁽⁸⁾는 유동응력(flow stress)을 변형률 속도만의 함수로하여 점소성 유한요소 해석을 하였으며, 1982년에 Oh⁽⁹⁾는 초기 속도장을 얻는 방법과 곡면 형상을 갖는 스파이크 단조(spike forging)문제에 점소성 이론을 적용하여 해석하였다. 열 점소성 해석에서는, 1978년 Nagpal등⁽¹⁰⁾이 상계법(upper bound method)으로 변형해석을 하고, 유한 차분법으로 온도해석을 하여 링 압축 문제와 업셋 단조(upset forging)문제를 해석하였다.

그 후 Rebelo와 Kobayashi^(11,12)는 재료 내부의 전위 이론을 이용하여 열역학적인 접근방법을 점소성 유한요소 해석에 도입하여 유한 요소법으로 변형과 온도해석을 하였으며, 같은 방법으로 Park⁽¹³⁾은 콤프레셔 디스크 단조시 조직변화에 따라서 온도분포를 검토하였다. Dadras와 Wells⁽¹⁴⁾ 그리고 Semiatin등⁽¹⁵⁾은 변형은 상계법, 온도는 유한 차분법으로 업셋 단조를 해석하면서 금형과 공작물 사이의 열전달 계수를 구하는 방법을 제시하였다. 제어 체적(control volume)의 열평형에서 유도된 유한 차분법을 이용한 온도해석은 Mahrenholtz⁽¹⁶⁾와 Pillinger등⁽¹⁷⁾에 의해서 해석되어 졌으나, 임의 곡면의 3차원 해석때의 문제점이 지적되었다. Chenot등^(18,19)은 커넥팅 로드(connecting rod)의 초기 단조 단계를 3차원으로 해석을 행한 바 있으나 금형의 온도는 일정하게 두었다.

본 논문에서는 위와 같은 열 점소성 해석의 여러 수치해석 기법을 첫째, 변형과 온도 해석을 연계 방식과 비연계 방식으로 계산한 후 결과를 검토하고, 둘째, 온도해석을 유한 요소법과 유한 차분법으로 계산한 후 각각의 장단점과 효율적 방법을 검

토하는데 목적이 있다. 또한 이 결과로 지속적인 3차원 열 점소성 해석 연구수행의 기초를 마련하고자 한다.

2. 변형 해석

2.1 점소성 이론 및 기초 방정식 유도

점소성 이론은 하중의 경로에 따라서 달라지는 소성(plasticity)의 성질과 시간변화율의 함수인 점성(viscosity)의 성질을 동시에 도입 함으로써 하중의 내력/loading history)과 시간의 변화율에 종속성을 지니게 하는 방법이다. 이와 같이 시간에 종속되는 재료거동에 대한 효과를 얻기 위해서 변형률 속도(strain rate)가 도입 되었다. Perzyna⁽³⁾의 점소성 이론에 의하면 재료가 강 점소성이고 등방성, 비 압축성이며 Von Mises 항복 조건을 따를때 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (1)$$

체적이 V 이고 접촉력 f 가 정의된 표면 S_f 와 속도 U 가 정의된 나머지 표면 S_U 로 둘러싸인 강 소성체는 관성의 효과와 체적력을 무시하면 응력과 속도장은 다음과 같은 관계를 만족한다.

(i) 평형 방정식

$$(\sigma_{ij} + a\Delta\sigma_{ij})_{,j} = 0 \quad (2)$$

(ii) 적합 방정식(compatibility equation)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3)$$

비압축성 조건

$$\dot{\epsilon}_v = v_{i,i} = 0 \quad (4)$$

(iii) 구성 방정식(constitutive equation)

$$\sigma'_{ij} + a\Delta\sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma} + a\Delta t \dot{\bar{\epsilon}} H'}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (5)$$

여기서 σ'_{ij} 는 편차 응력이고 $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon}$ 는 유효 응력과 유효 변형률 속도이다. H' 는 가공 경화율이며 a 는 가공 경화를 고려하기 위한 상수로 해의 수렴성을 증가시키기 위하여 도입되었다⁽²⁰⁾.

(iv) 경계 조건

$$(\sigma_{ij} + a\Delta\sigma_{ij}) n_j = f_i + a\Delta f_i \quad \text{on } S_f \quad (6-a)$$

$$v_i = U_i \quad \text{on } S_u \quad (6-b)$$

여기서 n_j 는 표면에 수직인 단위 벡터이다.

비압축성 조건을 만족하기 위해 벌칙 상수(penalty constant) K^* 을 도입하여 변분식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\int_V (\bar{\sigma} + a\Delta t \dot{\bar{\epsilon}} H') \delta \dot{\bar{\epsilon}} dV - \int_{S_f} (f_i + a\Delta f_i) \delta v_i dS + K^* \int_V \dot{\bar{\epsilon}} \delta \dot{\bar{\epsilon}} dV = 0 \quad (7)$$

2.2 유한요소 분할화

M 개의 요소와 N 개의 절점으로 이루어진 체적 V 를 생각하여 식 (7)을 다음과 같이 요소 분할식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{V_{(m)}} (\bar{\sigma} + a\Delta t \dot{\bar{\epsilon}} H') \delta \dot{\bar{\epsilon}} dV + K^* \int_{V_{(m)}} \dot{\bar{\epsilon}} \delta \dot{\bar{\epsilon}} dV - \int_{S_{f(m)}} (f_i + a\Delta f_i) \delta v_i dS \right] = 0 \quad (8)$$

어느 한 요소안에서의 속도장 V 를 보간 함수 N_{ia} , 유효변형률 속도와 관계를 나타내는 B_{ia} 를 도입하여 요소내 각 절점에서의 속도를 선형조합으로 나타내면 속도 성분과 변형률 속도는 다음과 같다.

$$V = \sum_{a=1}^8 N_{ia} v_a \quad (9-a)$$

$$\dot{\epsilon}_i = B_{ia} V_a \quad (9-b)$$

유효응력과 유효변형률 속도를 절점의 속도항으로 나타내고 $\delta \dot{\bar{\epsilon}}$ 과 δv_i 를 절점속도 성분의 변화량 δV_a 로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} K_{a\beta} V_a V_\beta}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (10-a)$$

$$\dot{\epsilon}_v = Q_a V_a, \quad \delta v_i = N_{ia} \delta V_a,$$

$$\delta \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{2}{3} \frac{K_{a\beta}}{\bar{\epsilon}} V_\beta \delta V_a \quad (10-b)$$

여기서 $K_{a\beta} = B_{ia} B_{i\beta}$ 이고 Q_a 는 체적 변형률 속도로부터 유도된 행렬이며 N_{ia} 는 형상함수(shape function)행렬이다.

위의 관계식을 식 (8)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^M \delta V_a \left[\int_{V_{(m)}} \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} + H' a\Delta t \right) K_{a\beta} V_\beta dV + K^* \int_{V_{(m)}} Q_a Q_r V_r dV - \int_{S_{f(m)}} N_{ia} (f_i + a\Delta f_i) ds \right] = 0 \quad (11)$$

식 (11)에서 적분형으로 된 세 항을 $\phi_1^{(m)}$, $\phi_2^{(m)}$, $\phi_3^{(m)}$ 으로 각각 정의하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^M [\phi_1^{(m)} + \phi_2^{(m)} - \phi_3^{(m)}] = 0 \quad (12)$$

식 (12)는 유동응력이 유효변형률 속도에 비선형적인 관계가 있는 비선형방정식이 되므로 Newton-

Raphson 반복방법을 이용하여 다음과 같은 식을 연속적으로 풀다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\frac{\partial \phi_1^{(m)}}{\partial V} + \frac{\partial \phi_2^{(m)}}{\partial V} - \frac{\partial \phi_3^{(m)}}{\partial V} \right]_{(n-1)}$$

$$\Delta V_{(n)} = - \sum_{m=1}^M [\phi_1^{(m)} + \phi_2^{(m)} - \phi_3^{(m)}]_{(n-1)} \quad (13)$$

여기서 $V_{(n-1)}$ 은 이전의 반복단계에서 얻어진 속도장이고, $\Delta V_{(n)}$ 은 현재의 반복계산으로 얻어진 속도의 변화량이다. 이때 현재 반복단계의 새로운 속도장은 해의 발산을 방지하기 위해 β 를 도입하면 다음과 같다.

$$V_{(n)} = V_{(n-1)} + \beta \Delta V_{(n)} \quad (14)$$

식 (14)의 반복은 $\|\Delta V_{(n)}\| / \|V_{(n)}\| \leq \varepsilon$ 의 조건이 만족될 때까지 수행하며 여기서 ε 는 매우 작은 상수이며 $\|\cdot\|$ 는 Euclidean vector norm이다.

변형률 속도가 아주 작은 강체영역이 존재하게 되면 수치적으로 불안정하게 되므로 유효 변형률 속도가 $\dot{\varepsilon}_0$ (보통 금형속도의 1/1000 정도)보다 작으면 구성 방정식을 다음과 같이 수정하여 사용한다⁽²¹⁾.

$$\sigma'_{ij} + a \Delta \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma} + a \Delta t \dot{\varepsilon} H'}{\dot{\varepsilon}_0} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\dot{\varepsilon} \leq \dot{\varepsilon}_0) \quad (15)$$

금형과 소재간의 마찰을 고려하기 위하여 다음식을 적용하였다⁽²²⁾.

$$f = - \frac{2}{\pi} m k \tan^{-1} \frac{|V_s|}{u_0} t \quad (16)$$

여기서 m 은 마찰상수, k 는 전단응력, u_0 는 $|V_s|$ 와 비교하여 매우 작은 양의 상수이고 V_s 는 금형에 대한 소재의 상대속도이며, t 는 V_s 방향으로의 단위 벡터이다.

Newton-Raphson 반복방법을 이용할 때는 초기 속도장의 가정이 매우 중요한데 본 논문에서는 Oh⁽⁹⁾가 제안한 방법을 사용하였다. 소재를 선형 점성 재료로 가정하여 식 (17), (18)의 구성방정식을 유한요소 방정식으로 구성한 후, 점성 μ 가 수렴할때의 속도장을 초기속도장으로 이용한다.

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (17)$$

$$\mu = \mu(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \quad (18)$$

3. 유한 요소법에 의한 온도 해석

3.1 온도해석의 기본방정식

점소성 변형의 온도해석시 연속체 역학방식의 열

역학적 접근은 해석상의 어려움 때문에 실제 적용에 많은 문제점이 있다. 본 논문에서는 열역학제1법칙을 적용하고, 소성변형으로 발생하는 에너지의 85~95%가 변형열이 되며 나머지는 전위 밀도(dislocation density)를 증가시키는 에너지로 소모된다는 실험결과⁽²³⁾를 이용하면 열평형 방정식은 다음과 같다.

$$K_1 T_{,ii} - \rho c \dot{T} + k^* \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} = 0 \quad (19)$$

여기서 k^* 는 변형 에너지가 열로 변화되는 비율을 나타내며 0.85와 0.95사이에 존재하는 값으로 본 논문에서는 0.9를 사용하였다.

열 점소성의 열전달에 대한 경계치 문제는 다음과 같은 경계조건을 갖는다.

(i) 자유 표면(free surface)에서

$$\text{대류 열유량 : } q_n^* = h(T_e - T_s) \quad (20-a)$$

$$\text{복사 열유량 : } q_n^* = \varphi v(T_e^4 - T_s^4) \quad (20-b)$$

(ii) 금형과 소재의 접촉면에서

$$\text{전도 열유량 : } q_n^* = h_{tub}(T_a - T_w) \quad (21-a)$$

$$\text{마찰 열유량 : } q_n^* = m k v_a / J \quad (21-b)$$

여기서 본 논문에서는 φ 는 $5.67 \times 10^{-11} \text{N/mm s K}^4$, v 는 0.6을 사용하였으며, v_a 는 다이와 소재의 상대 속도이고 J 는 열의 일당량이다.

응력 변형률의 관계식에서 유효 응력이 변형률, 변형률 속도, 온도의 함수로 가정하고 경계조건을 적용하여 변분식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V K_1 T_{,i} \delta T_{,i} dV + \int_V \rho c \dot{T} \delta T dV - \int_V k^* \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} \delta T dV - \int_{S_q} q_n \delta T dS = 0 \quad (22)$$

3.2 온도 방정식의 분할화

식 (22)은 각 요소에 대해서도 만족하므로 M 개의 요소와 N 개의 절점으로 이루어진 체적 V 을 생각하여 다음과 같이 요소 분할식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{V_{(m)}} K_1 T_{,i} \delta T_{,i} dV + \int_{V_{(m)}} \rho c \dot{T} \delta T dV - \int_{S_{q(m)}} k^* \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} \delta T dV - \int_{S_{q(m)}} q_n \delta T dS \right] = 0 \quad (23)$$

요소내의 온도를 보간함수 N_a 와 절점의 온도로 나타낸다.

$$T = \sum_{a=1}^4 N_a T_a \quad (24)$$

마찬가지로 \dot{T} , δT , $T_{,i}$, $\delta T_{,i}$ 을 보간함수로 표현할 수 있고, 식 (23)을 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{V_{1m}} K_1 N_{a,i} N_{\beta,i} T_a dV + \int_{V_{1m}} \rho C N_a N_{\beta} \dot{T}_a dV \int_{V_{1m}} k^* \bar{\sigma} \bar{\epsilon} N_{\beta} dV - \int_{S_{q(m)}} q_n N_a dS \right] = 0 \quad (25)$$

식 (25)를 벡터형으로 간단히 표현하면

$$KT + C\dot{T} - Q - Q_n = 0 \quad (26)$$

가 되고 여기서 Q_n 는 경계조건을 나타내는 열유동 벡터이다.

$$Q_n = \int_{S_r} q_n^r N_a dS + \int_{S_c} q_n^c N_a dS + \int_{S_a} q_n^a N_a dS + \int_{S_j} q_n^j N_a dS \quad (27)$$

식 (26)은 시간에 대한 1차 미분 행렬식으로 온도 변화를 \dot{T} 를 다음과 같이 시간간격으로 차분화하여 선형화하면 다음과 같다⁽²⁴⁾.

$$t_{\theta} = t_n + \theta \Delta t \quad (28-a)$$

$$\dot{T}_{\theta} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \quad (28-b)$$

$$Q_{\theta} = (1-\theta) Q_n + \theta Q_{n+1} \quad (28-c)$$

이 식들을 식 (26)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left[\theta K + \frac{1}{\Delta t} C \right] T_{n+1} = \left[-(1-\theta) K + \frac{1}{\Delta t} C \right] T_n + (1-\theta) Q_n + \theta Q_{n+1} \quad (29)$$

여기서 θ 는 증분의 크기를 조절하는 인자로 0과 1사이의 값이며 값이 클수록 해가 안정되게 수렴하지만 너무 클 경우 수렴 속도가 늦어진다. 본 논문에서는 0.75를 사용하였다.

4. 유한 차분법에 의한 온도 해석

유한 차분법은 개념이 비교적 단순하고 프로그램 작성이 용이하다는 잇점이 있으나 미분방정식을 차분화하는 방식은 복잡한 소재 형상을 다루는데 번거롭다. 본 논문에서는 요소의 열 평형을 고려하여 지배 방정식을 수립하였으며 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho C T dV = \int_S k_1 \nabla T \cdot n dS + \int_V \dot{q} dV \quad (30)$$

여기서 \dot{q} 은 단위 체적당 발생 열량이며, 소성 변형의 열전달 해석에 적용할때 우변의 항은 변형 에너지(Q_D)와 금형과 소재의 마찰 에너지(Q_F)와 표면을 통과하는 유입 에너지(Q_S)로 구분할 수 있다. 요소내 온도가 균일하다고 가정하면 i 번째 요소가 미소시간 Δt 동안 에너지 증가(Q), Q_D 와 Q_F 는 다음과 같이 표현된다.

$$Q = (\rho C V)_i (T_i^{t+\Delta t} - T_i^t) \quad (31)$$

$$Q_D = k^* \bar{\sigma} \bar{\epsilon} V \Delta t / J \quad (32)$$

$$Q_F = mk S v_a \Delta t / J \quad (33)$$

또한 Q_S 는 동일 물체간에 열전달에 의한 열유량 (Q_a)과 접촉저항이 있는 인접면과의 열전달에 의한 열유량(Q_b)과 경계면과 주위와의 대류 및 복사에 의한 열유량(Q_e)등으로 구분할 수 있으며, Fig. 1(a)의 경우 다음과 같이 표현된다.

$$Q_a = k_{ia} \frac{S_a}{l_{ia}} (T_a - T_i) \Delta t \quad (34)$$

$$Q_b = \frac{S_b}{\frac{1}{h_c} + \frac{l_{ib}}{k_i} + \frac{l_{bi}}{k_b}} (T_b - T_i) \Delta t \quad (35)$$

$$Q_e = h_e S_e (T_e - T_i) \Delta t \quad (36)$$

또한 요소의 중심에서 요소면까지의 거리는 Fig. 1(b)에 도식화되어 있고 중심에서 요소면에 내린 수직선과 만나는 교점 H 를 계산해서 구한다. 직선의 방정식과 g 의 방향 벡터 d 와 벡터 h 는 다음 관계식에서 구해진다.

$$\frac{y - y_1}{a} = \frac{x - x_1}{1} = \xi \quad (37)$$

$$h \cdot d = 0 \quad (38)$$

여기서 a 는 요소면의 기울기이고 ξ 는 매개변수이고 식 (38)이 만족하는 ξ 는 다음과 같이 구해진다.

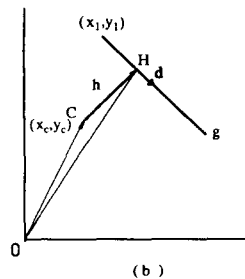
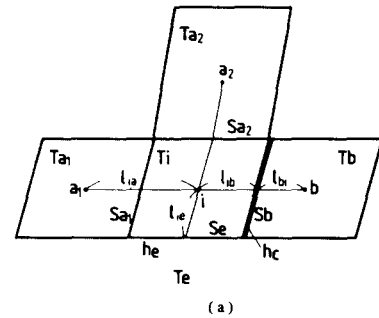


Fig. 1 Heat balance of i -th element

$$\xi = -\frac{x_1 - x_c + a(y_1 - y_c)}{1 + a^2} \quad (39)$$

이 유한차분법에서는 직사각형(정사각형 포함) 요소가 이상적이지만 소재가 변형을 계속하고 있기 때문에 요소 특성이 나빠지거나 요소변에 교점이 존재하지 않을 때는 요소를 재구성(remeshing)하여야 한다.

여기서 h_e 는 대류 열전달과 복사 열전달이 고려된 등가 열전달 계수이다. 위의 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\rho c V)_i T_i^{t+\Delta t} &= k^* \bar{\sigma} \epsilon V \Delta t + mk S_a v_a \Delta t \\ &+ [(\rho c V)_i - a_i \Delta t] T_i^t \\ &+ \sum_a k_{ia} \frac{S_a}{l_{ia}} T_a^t \Delta t + \sum_b \frac{1}{\frac{1}{h_c} + \frac{l_{ib}}{k_i} + \frac{l_{bi}}{k_b}} T_b^t \Delta t \\ &+ \sum_e \frac{S_e}{\frac{1}{h_e} + \frac{l_{ie}}{k_i}} T_e^t \Delta t \end{aligned} \quad (40)$$

여기서 해가 안정하고 수렴하기 위한 시간 증분 Δt 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \frac{(\rho c V)_i}{a_i} \quad (41-a) \\ a_i &= \sum_a k_{ia} \frac{S_a}{l_{ia}} + \sum_b \frac{1}{\frac{1}{h_c} + \frac{l_{ib}}{k_i} + \frac{l_{bi}}{k_b}} \end{aligned}$$

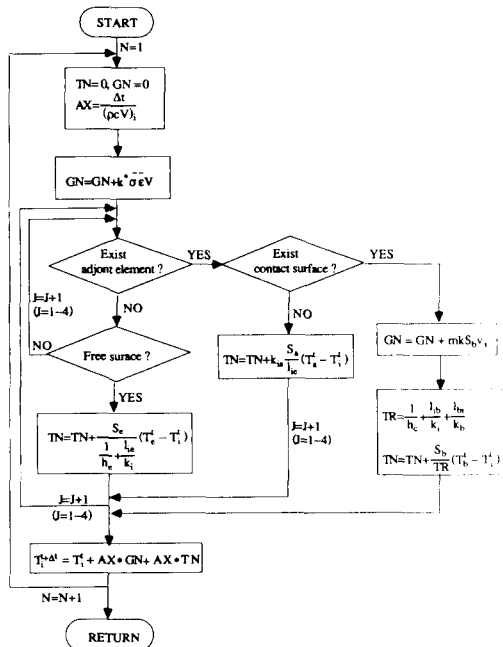


Fig. 2 Flow chart of heat transfer analysis by the finite difference method

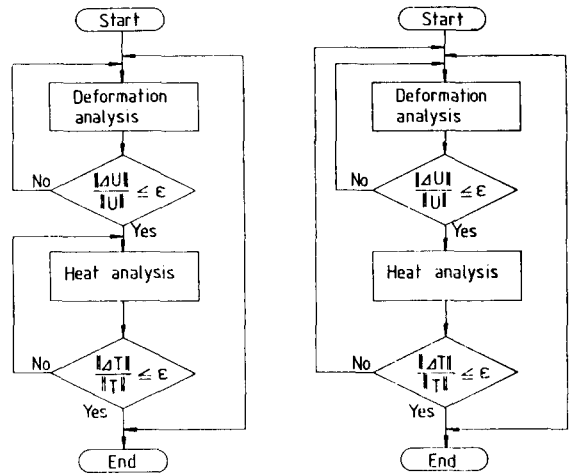
$$+ \sum_e \frac{S_e}{\frac{1}{h_e} + \frac{l_{ie}}{k_i}} \quad (41-b)$$

유한 차분법에 의한 온도해석 흐름도(flow chart)는 Fig. 2에 있다.

5. 예제해석

5.1 연계와 비연계 비교

소재가 변형하는 도중에는 열이 발생하며, 동시



Decoupled analysis

Coupled analysis

Fig. 3 Flow chart of the coupled analysis and the decoupled analysis

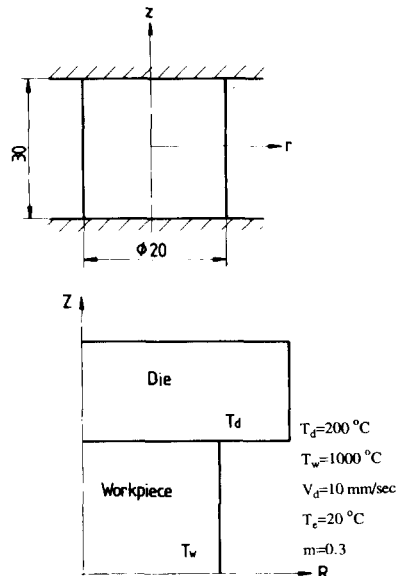


Fig. 4 Specimen dimensions and initial temperature condition

Table 1 Thermal properties and heat transfer coefficients(SN 15C, SNCM8)

Coeff.	k (N/sec · °C)	Pc (N/mm ² · °C)	k (N/secmm°C)	h_{tub} (N/secmm°C)	v
DIE (SNCM 8)	27.8	4.08	0.003	15.0	0.6
W.P. (SM15C)	36.8	4.0			

Table 2 Stress-strain rate properties of SM15C for different temperatures

Temp(°C)	$\sigma = c(\dot{\epsilon})^n$ (KN/mm ²)	
	c	n
600	276	0.121
800	148.4	0.104
1000	127.9	0.015
1200	46.9	0.169

에 열은 금형과 대기로 전달된다. 따라서 변화된 온도는 재료의 유동에 영향을 미치기 때문에 열해석과 변형의 해석을 한 단계 내에서 서로 연계시켜서 계산하였다^(11~13). 따라서 각 단계에서 속도장과 온도장을 동시에 수립시키는데 많은 시간이 요구된다. 이를 해결하기 위해 온도변화가 극심하지 않는 해석에서는 변형해석과 온도해석을 서로 독립적으로 계산하는 비연계방식을 이용한다. 이들을 비교한 개략도가 Fig. 3에 나타나 있다. 연계나 비연계를 비교하기 위하여 Fig. 4와 같은 축대칭 업셋팅

문제를 적용시켜 보았다. 이때 사용한 소재와 금형의 열 물성치는 Table 1와 같고 소재의 고온 물성치는 Table 2와 같으며 금형과 소재의 초기 온도는 각 200°C, 1000°C이다.

Table 3은 계산시간을 비교한 것으로서 비연계방식이 경제적임을 알 수 있다. 특히 고온의 경우 일수록 더 많은 시간이 절약되는데 이는 고온 상태가 상온의 상태보다 재료가 온도의 영향에 더 민감하기 때문이다. 상부 금형의 속도가 일정하고, 금형과 소재의 초기 온도가 각각 20°C, 1000°C인 경우에 대해서 연계와 비연계방식의 하중과 유효 변형률 속도 분포, 온도 분포를 Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7에 각각 비교하였는데 동일한 결과를 얻을 수 있기 때문에 비연계방식이 훨씬 경제적이다. 그러나 시간 증분이 클수록 온도 계산에서 오차가 많이 발생하므로 온도계산의 단계를 더 작은 시간증분으로 몇회 반복계산이 요구된다. Fig. 14의 경우 50%의 높이 감소까지는 2.5초가 소요되는데 변형해석에서 시간증분은 0.1초로 하고 온도계산의 시간증분을 0.1초와 0.02초로 하였을때 최대오차는 4% 정도였다.

Table 3 Comparison of the coupled analysis with the decoupled analysis for computation time given with respect to working temperature and die velocity

	Vel. type	Ini. temp (°C)	couple (cpu)	Decouple (cpu)	Rate
$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$	Mechanical	20	4228	3484	1.2 : 1
	Press	400	4885	3513	1.4 : 1
$\bar{\sigma} f(\bar{\epsilon}, T)$	Mechanical Press	100	5672	2834	2.0 : 1
	Hydraulic Press	1000	9620	2462	3.0 : 1

$m = 0.3 \quad \Delta h/h = 33\%$
(Prime Mode 2755)

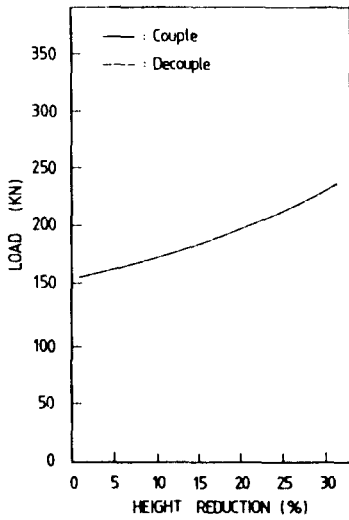


Fig. 5 Comparison of forging load between coupled analysis and decoupled analysis

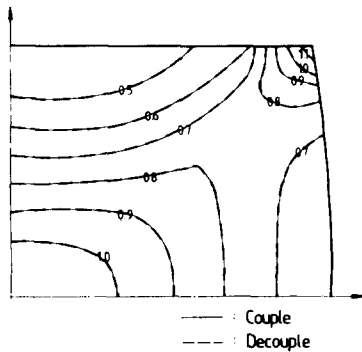


Fig. 6 Comparison of the distribution of effective strain rate between coupled analysis and decoupled analysis(33% height reduction)

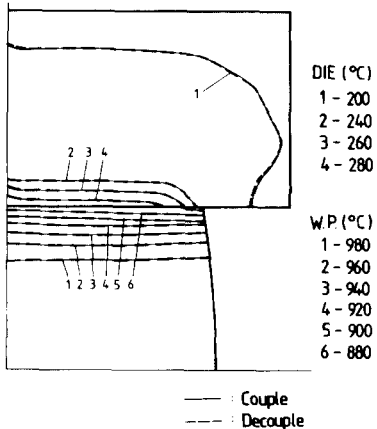


Fig. 7 Comparison of the temperature distribution between coupled analysis and decoupled analysis(33% height reduction at 1sec)

5.2 축대칭 업셋팅 해석

Fig. 8의 축대칭 업셋팅 문제에 비연계 열-점소성을 적용하여 다음 3가지의 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 변형과 마찰에 의해 발생하는 열로인해 상승하는 온도분포를 구한것으로 Fig. 9에 나타나 있다. 50%의 높이 감소에서 금형과 접촉 부위의 마찰열이 큰 것을 알 수 있다.

둘째, 소재의 물성치를 초기조건으로 일정하게 두고 온도해석을 하지않는 등온변형(isthermal)과 온도 해석을 동시에 하는 비등온 변형(non-isothermal)을 비교하였다. Fig. 10에서와 같이 비등온 변형의 경우 내부온도 상승으로 유동응력이 낮아져 하중이 조금 낮아짐을 알 수 있다. Fig. 11에서 유효 변형률 분포에서도 조금의 차이가 있으며 등온변형의 경우가 벌징이 더 적음을 알 수 있다. Fig. 12의 유효 변형률 속도 분포에서도 차이를 나타내고 있다. Fig. 13은 온도해석을 FDM과 FEM을 비교한 것이다. FDM의 경우에는 한 요소

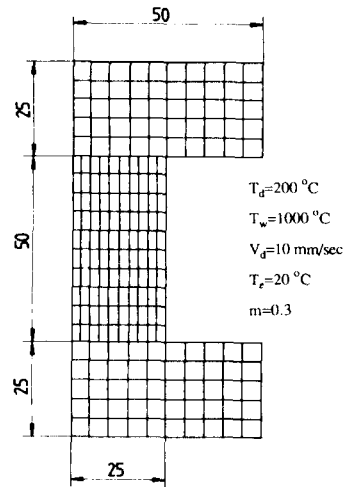


Fig. 8 Initial finite element mesh and geometry for axisymmetric upsetting

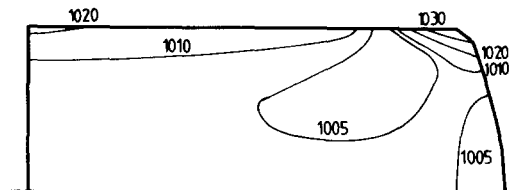


Fig. 9 Temperature distribution of adiabatic condition (50% height reduction at 2.5sec)

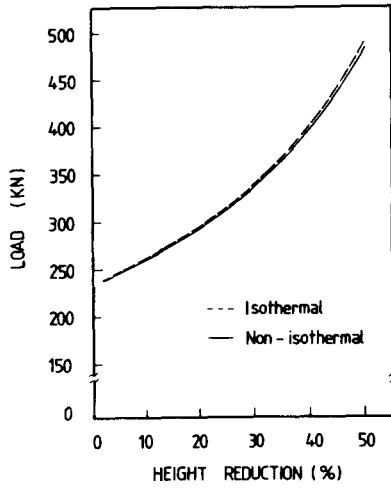


Fig. 10 Comparison of forging load between isothermal deformation and non-isothermal deformation

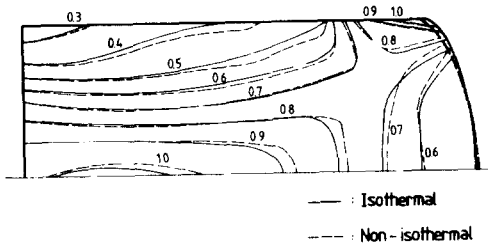


Fig. 11 Comparison of distribution of effective strain between isothermal deformation and non-isothermal deformation (50% height reduction)

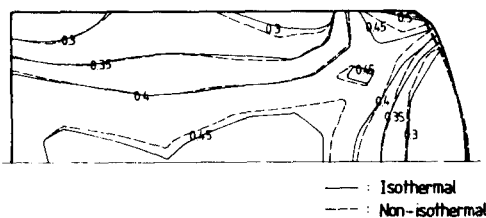


Fig. 12 Comparison of distribution of effective strain rate between isothermal deformation and non-isothermal deformation (50% height reduction)

내에서 온도는 균일하게 가정하고 있기 때문에 요소를 세분화하고 시간증분을 줄여야 한다. Fig. 14는 FEM해석이 경우 소재와 금형의 온도 분포이다.

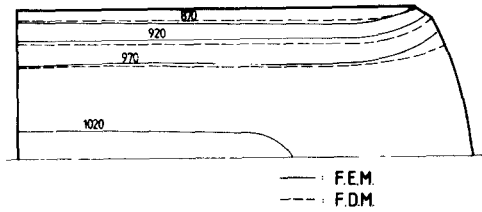


Fig. 13 Comparison of temperature distribution between FEM analysis and FDM analysis (50% height reduction)

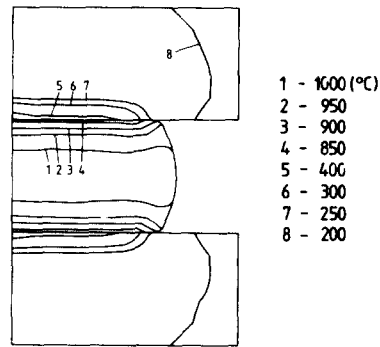


Fig. 14 Temperature distribution of the die and the workpiece for axisymmetric upsetting (50% height reduction at 2.5sec)

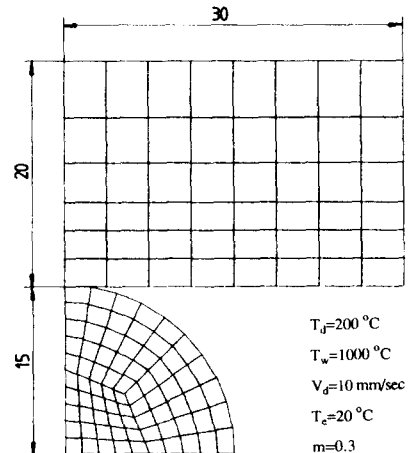


Fig. 15 Initial finite element mesh and geometry for plane strain forging

5.3 평면 변형 해석

Fig. 15와 같은 형상의 환봉 단조를 평면 변형으로 해석 하였다. 이때 소재의 초기 온도는 1000°C

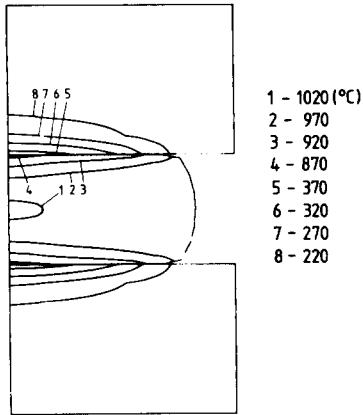


Fig. 16 Temperature distribution of the die and the workpiece for plane strain forging (50% height reduction at 1.5sec)

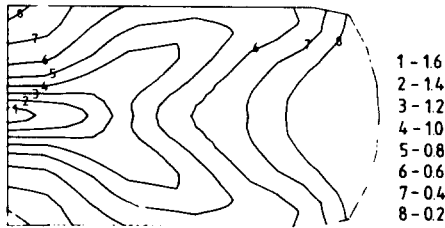


Fig. 17 Distribution of effective strain for plane strain forging (50% height reduction)



Fig. 18 Distribution of effective strain rate for plane strain forging (50% height reduction, die speed 10mm/sec)

이고 금형의 초기 온도는 200°C이며 물성치는 축대칭 업셋팅과 동일하며 초기 높이를 50%까지 단조하였다. Fig. 16은 소재와 금형의 온도 분포를 나타내고 있다. 중심부에서는 역시 초기 온도보다 상승한 것을 알 수 있다. Fig. 17은 유효 변형률 분포로 중심부위에서 가장 변형이 심하며 중심에서 대각선 방향으로 변형이 많으며 금형과 접하는 중심 부위와 환봉의 바깥부위는 변형이 적다. Fig.

18은 유효 변형률 속도 분포로 중심과 대각선 형태로 변형 속도가 큰 것을 알 수 있다.

6. 결 론

점소성 이론을 근거로한 축 대칭 문제와 평면 변형 문제의 변형해석과 온도해석을 위한 열점소성 해석 방법중에서, 변형과 온도해석의 연계와 비연계, 온도해석을 유한 차분법과 유한 요소법으로 비교 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 축대칭 및 평면 변형의 열간 단조 해석을 할 수 있는 점소성 유한요소 해석 프로그램을 개발하였다.

(2) 열간 단조의 점소성 해석시 변형과 온도해석을 연계와 비연계 방식으로 비교 해석하였으며, 비연계 방식이 해석 결과면에서 연계 방식과 차이가 없으며 계산 시간이 훨씬 적게 걸리기 때문에 경제적이다. 특히 3차원 확장시 더욱 경제적이다.

(3) 유한 차분법과 유한 요소법에 의한 온도해석 결과를 비교하였으며, 열평형에서 유도된 유한 차분법의 경우 요소 크기와 시간 증분에 큰 영향을 받고, 입력 데이터양도 유한 요소법과 비슷하기 때문에, 변형이 심한 밀폐형 단조해석등에서는 유한 요소법이 편리한 것으로 사료된다.

(4) 온도 해석시 시간증분은 변형해석의 시간 증분 보다 적게하여 한 변형 증분에서 몇번의 반복 계산이 필요하다.

이론 해석의 타당성을 검토하기 위해서 추후 실험과 비교할 예정이며, 더 실제적인 해석을 위해서는 금형과 소재의 고온 열 물성치와 대류 열전달 계수등을 정확히 구하는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

- (1) Dawson, Paul R. and Thompson, Erik G., 1978, "Finite Element Analysis of Steady-State Elasto-Viscoplastic Flow by The Initial Stress-Rate Method", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 12, pp. 47~57.
- (2) Chandra, Abhijit and Mukherjee, Subrata, 1984, "A Finite Element Analysis of Metal Forming Problems with an Elasto-Viscoplastic Material Model", Int. J. fo Num. Meth. in Eng., Vol. 20, pp. 1613~1628.
- (3) Perzyna, P., 1966, "Fundamental Problems in

- Viscoplasticity", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 243~315.
- (4) Cristescu, N., 1977, "Dynamic Plasticity", North Holland Press, Amesterde.
- (5) Zienkiewicz, O.C., Jain, P.C. and Onate, E., 1978, "Flow of Solids during Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solutions", *Int. J. Solids and Structure*, Vol. 14, pp. 15~38.
- (6) Zienkiewicz, O.C. and Cormean, I.C., 1974, "Viscoplasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids-A Unified Numerical Solution Approach", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 8, pp. 821~845.
- (7) Hagarajan, S. and Popov, E.P., 1975, "Plastic and Viscoplastic Analysis of Axisymmetric Shells", *Int. J. Solids and Structure*, Vol. 11, pp. 1~19.
- (8) Tomita, V. and R. Sowerby, R., 1978, "An Approximate Analysis for Studying the Deformatioun Mechanics of Rate Sensitive Materials", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 20, pp. 361~371.
- (9) Oh, S.I., 1982, "Finite Element analysis of Metal Forming Processes with Arbitrary Shaped Dies", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, No. 8, pp. 479~493.
- (10) Nagpal, V., Lahoti, G.D. and Altan, T., 1978, "A Numerical Method for Simultaneous Prediction of Metal Flow and Temperatures in Upset Forging of Rings", *Tran. ASME j. of Eng. for Ind.*, Vol. 100, pp. 413~420.
- (11) Rebelo, N. and Kobayashi, S., 1980, "A Copupled Analysis of Viscoplastic Deformation and Heat transfer-I: Theoretical Considerations", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 22, pp. 707~718.
- (12) Park, J.J., 1982, "Application of the Finite Element Method to Metal Forming Problems", Ph. D, dissertation, Univ. of California, Berkery.
- (13) Dadras, P. and Wells, W. R., 1984, "Heat Transfer Aspects of Nonisthermal Axisymmertic Upset Forging", *Tran. ASME J. Eng. for Ind.*, Vol. 106, p. 187.
- (14) Semiatin, S.L., Collings, E. W., Wood, V.E., Altan, T., 1987, "Determination of the Interface Heat Transfer Coefficient for Non-isothermal Bulk-Forming Processes", *Tran. ASME, J. of Eng. for Ind.* Vol. 109, pp. 49~57.
- (15) Mahrenholtz, 1988, "Thekrmomechanical Analysis of Metal Forming Processes Through Combined Approach FEM/FDM", *Proc. of the 1st Int. Workshop, Stuttgart*, June 3, pp. 19~50.
- (16) Pillinger, I., Hartley, P., Sturgess, C.E.N. and Rowe, G.W., 1988, "Finite Element Modelling of Metal Flow in Three Dimensional Forming", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 25, pp. 87~97.
- (17) Surdon, G. and Chenot, J.L., 1987, "Finite Element Calculation of Three Dimensional Hot Forging", *Int. J. Num. Meth. in Eng.* Vol. 27, pp. 2107~2117.
- (18) Soyris, N., Cescutti, J.P., Coupez, T., Brachotte, G. and Chenot, J.L., 1988, "Three Diemensional Finite Element Calcuation of the Forging of a Connecting Rod", *Modelling of Metal Forming Processes*, p. 227.
- (19) Kim, Y. J. and Yang, D.Y., 1985, "A Formulation for Rigid Plastic Finite Element Method Considering Work-Hardening Effect", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 27, No. 7/8, pp. 487~495.
- (20) Osakada, K., Nakano, J. and Mori, K., 1982, "Finite Element Method for Rigid-Platic Analysis of Methal Froming Formulation for Finite Deformation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, pp. 459~468.
- (21) Chen, C.C. and Kobayashi, S., 1978, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Ring Compression", *Application of Numerical Methods to Forming Processes*, ASME, AMD 28, pp. 163~174.
- (22) Greefield, P. and Bever, M. B., 1956, "The Evolution of the Energy Storged by a Gold-Silver Alloy Cold-Worked at -195°C and at Room Temperature", *ACTA Meta.*, Vol. 4, pp. 433~443.
- (23) Heuber, K. H. and Thornton, E.A., 1982, "The Finite Element Method for Engineers", John Wiley Sons.