

〈論 文〉

半無限 彈性體의 헤르츠 接觸下의 傾斜진 表面龜裂의 傳播舉動

金載昊* · 金石三* · 朴重漢**

(1990年 1月 24日 接受)

Propagation Behavior of Inclined Surface Crack of Semi-Infinite Elastic Body under Hertzian Contact

Chae Ho Kim, Seock Sam Kim and Jung Han Park

Key Words: Wear Mechanism(磨滅機構), Hertzian Contact(헤르츠接觸), Linear Fracture Mechanics(線形破壞力學), Inclined Surface Crack(傾斜진 表面龜裂), Stress Intensity Factor(應力擴大係數), Crack Growth(龜裂成長)

Abstract

Analytical study based on linear fracture mechanics was conducted on propagation behavior of inclined surface crack in semi-infinite elastic body. The analytical model was assumed to be inclined surface crack under plane strain condition upon which Hertzian stress was superimposed. Supposing continuous distribution of dislocation and applying Erdogan-Gupta's method to this crack problem, the stress intensity factors K_I and K_{II} at the crack-tip were obtained for various Hertzian contact positions. Analytic results have shown that driving force for crack growth is K_I for non-lubricated condition and K_{II} for fluid and boundary lubricated condition. The coefficient of friction at the hertzian contact and crack surfaces plays an important role in predicting the direction of crack propagation. It is also found that the maximum effective stress intensity factor exists at cracks of a certain specific length depending on lubricated condition.

기 호 설 명

- a : Hertz 接觸中心과 原點 0과의 거리
- B : 轉位密度
- c : Hertz 接觸半徑
- d : 龜裂의 길이
- d_0 : 龜裂의 열려진 부분의 길이
- G : 剪斷彈性係數
- K_I, K_{II} : 應力擴大係數
- K_{eff} : 有效應力擴大係數
- P_0 : 最大 Hertz壓力
- ϕ_0 : 龜裂의 傾斜角度(degree)

- Φ, Ψ, ϕ, ψ : 複素應力函數
- ν : 프와송 比
- μ : Hertz 接觸部の 摩擦係數
- μ^c : 龜裂面사이의 摩擦係數
- θ_0 : 龜裂先端에서의 龜裂傳播角度

1. 序 論

磨滅舉動의 破壞力學的 研究는 Hornbogen⁽¹⁾이 磨滅率에는 破壞靱性이 重要한 影響을 미친다는 점을 指摘한 이래, Suh 등⁽²⁻⁶⁾이 Delamination理論을 제창하여 接觸압력을 받는 表面下 水平龜裂의 發生과 成長 條件에 관하여 研究하였다.

*正會員, 慶北大學教 工科大学 機械工學科

**慶北大學校 大學院

Rosenfield⁽⁷⁾, Hills등^(8,9)은 表面下 水平龜裂의 發生과 傳播 可能性에 對하여 龜裂面의 摩擦을 考慮해서 應力擴大係數를 求하여 考察하였다. Keer 등^(10,11)은 表面龜裂과 內部水平龜裂이 存在하는 半無限 彈性體의 表面에 Hertz 接觸壓力이 移動할 때 龜裂 傳播可能性에 對하여 考察하였다. Kaneta 등^(12,13)은 구름接觸時 피팅 機構의 糾明을 위해서 Hertz 接觸壓力을 받는 表面下 龜裂의 應力擴大係數를 潤滑의 影響을 考慮하여 求하였다. 이와 같이 磨滅舉動은 龜裂의 길이, 方向, 接觸壓力의 크기, 潤滑狀態 등에 따라 크게 달라짐으로 매우 複雜한 現象으로서, 아직까지 磨滅理論의 定立은 未洽한 狀態이다.

本 研究에서는 磨滅過程을 線形破壞力學的 觀點에서 解析하여, 彈性體의 表面에 散在되어 있는 表面龜裂의 傳播舉動을 磨滅過程糾明의 立場에서 살펴보고자 한다. 우선 磨滅舉動에 관한 破壞力學的 接近方式에 의한 磨滅理論의 確立을 위해서, 表面龜裂이 內部龜裂보다 그 傳播 可能性이 높다고 한 Keer등의 主張⁽¹⁰⁾에 着眼하여 Hertz 接觸壓力下의 傾斜진 表面龜裂의 傳播舉動을 線形破壞力學的으로 解析하고자 한다. 理論解析에 있어서는 表面龜裂을 刃狀轉位の 連續分布로 置換⁽¹⁴⁾하고, 轉位密度分布 函數에 관한 特異積分方程式을 誘導해서 Erdogan-Gupta의 方法⁽¹⁵⁾을 利用하여 그 解를 求하였다.

磨滅過程과 같은 微視的인 現象의 경우, 表面및 내부 缺陷에 敏感한 세라믹類의 材料도 彈性體의 한 例로서 간주할 수 있을 것이므로, 本 研究의 內容 및 그 結果는 세라믹류의 材料에도 그대로 適用 可能할 것이다.

2. 解析 모델 및 解析方法

解析 모델 및 座標系는 Fig. 1에 圖示한 것과 같다. 傾斜진 表面龜裂을 가진 半無限彈性體의 表面을 Hertz 接觸壓力이, 左에서 右로 移動한다. 表面龜裂과 半無限 彈性體의 表面과의 交點을 複素座標系 $Z(=X+iY)$ 의 原點으로 定하며 X 軸은 龜裂과 나란하게 잡는다. 複素座標系 $Z_1(=X_1+iY_1)$ 은 半無限彈性體의 表面과 나란히 X_1 을 잡고, 移動複素座標系 $Z_2(=X_2+iY_2)$ 는 Hertz 接觸部의 中心을 原點으로 한다. 原點 O 와 Hertz 接觸部 中心 O_2 사이의 距離를 a , 龜裂의 전체길이를 d , 열려 있는 龜裂의 길이를 d_0 , 均열의 사선부분($d_0 \leq X$

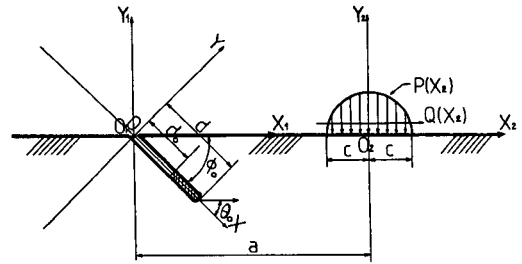


Fig. 1 Analytic model and coordinate systems

$\leq d$)는 均열면끼리 접촉하고 있는 영역, ϕ_0 는 龜裂의 傾斜, θ_0 는 龜裂의 傳播方向을 나타낸다. Hertz 壓力分布 $P(X_2)$, $Q(X_2)$ 는 式 (1)로 表示된다.

$$P(X_2) = -P_0 \sqrt{1 - (X_2/c)^2}, \quad P_0 > 0$$

$$Q(X_2) = \mu P(X_2) \quad (1)$$

여기서, P_0 는 最大 Hertz 壓力, c 는 Hertz 接觸 半徑, μ 는 Hertz 接觸部의 摩擦係數이다.

半無限彈性體는 平面 스트레인상태에 있는 것으로 한다.

2.1 境界條件

여기서 Muskhelishvili⁽¹⁶⁾에 의해 정의된 複素應力函數 $\Phi(Z)$, $\Psi(Z)$ 와, $\Phi(Z_1)$, $\Psi(Z_1)$ 와, $\Phi(Z_2)$, $\Psi(Z_2)$ 를 도입한다. Fig. 1의 半無限 彈性體 表面의 境界條件은 式 (2)와 같다.

$$\Phi_2(Z_2) + \overline{\Phi_2(Z_2)} + Z_2 \Phi(Z_2) + \Psi_2(Z_2) = P(X_2) - iQ(X_2) \quad (Y_2=0, |X_2| \leq c) \quad (2)$$

$$\Phi_2(Z_2) + \overline{\Phi_2(Z_2)} + Z_2 \Phi_2(Z_2) + \Psi_2(Z_2) = 0 \quad (Y_2=0, |X_2| \geq c)$$

龜裂面의 열린 部分에 對한 境界條件은 應力自由에 의하여 式 (3)과 같다.

$$\Phi(Z) + \overline{\Phi(Z)} + Z \Phi'(Z) + \Psi(Z) = 0 \quad (3)$$

$$(Y=0, 0 \leq X \leq d_0)$$

또한, 龜裂面의 닫힌 部分에 對한 境界條件은 式 (4)로 表示된다.

$$Im[\Phi(Z) + \overline{\Phi(Z)} + Z \Phi'(Z) + \Psi(Z)] = \pm \mu^c Re[\Phi(Z) + \overline{\Phi(Z)} + Z \Phi'(Z) + \overline{\Psi(Z)}] \quad (4)$$

$$(Y=0, d_0 \leq X \leq d)$$

여기서 Im 과 Re 는 각각 虛數部와 實數部를 意味하며, μ^c 는 龜裂面 사이의 摩擦係數이다. 式 (4)에서 符號의 選擇은 龜裂 윗면이 아랫면에 對하

여 X 의 (-) 방향으로 이동할 때 (+)를擇한다. 龜裂面上에 작용하는 剪斷力이 壓縮力에 의해 야기되는 摩擦力보다 클 경우에 龜裂面間의 미끄럼이 發生하는 것으로 한다.

半無限彈性體의 無限히 먼 領域에서의 複素應力函數는 다음의 漸近 特性을 가진다.

$$\Phi(Z) = 0, \Psi(Z) = 0 \quad (|Z| \rightarrow \infty) \quad (5)$$

2.2 特異積分方程式의 誘導

境界條件 (2)~(5)를 滿足하는 複素應力函數를 求한다. 境界條件 (2)를 滿足하는 複素應力函數 $\Phi_2(Z_2)$, $\Psi_2(Z_2)$ 는 式 (6)과 같다⁽²⁰⁾.

$$\Phi_2(Z_2) = \frac{P_0(\mu-i)}{2c} (\sqrt{Z_2-c} \sqrt{Z_2+c} - Z_2) \quad (6)$$

$$\Psi_2(Z_2) = -\Phi_2(Z_2) - \overline{\Phi_2(\bar{Z}_2)} - Z_2\Phi_2(Z_2)$$

半無限 彈性體 內의 任意的 한점 $E(Z_1=a)$ 에 強度 B 의 刃狀轉位가 表面과 角度 ϕ 를 이루는 미끄럼面에 한개 存在하는 境遇의 複素應力函數 $\Phi_1(Z_1)$, $\Psi_1(Z_1)$ 는 式 (7)로 表示된다⁽²¹⁾.

$$\begin{aligned} \Phi_1(Z_1) &= \frac{iGB}{\pi(k+1)} \frac{e^{i\phi}}{Z_1-a} \\ &\quad - \frac{iGB}{\pi(k+1)} \left[\frac{e^{i\phi}}{Z_1-\bar{a}} + \frac{(\bar{a}-a)\bar{e}^{i\phi}}{(Z_1-\bar{a})^2} \right] \\ \Psi_1(Z_1) &= -\frac{iGB}{\pi(k+1)} \left[\frac{\bar{e}^{i\phi}}{Z_1-a} - \frac{\bar{a}e^{i\phi}}{(Z_1-a)^2} \right] \\ &\quad + \frac{iGB}{\pi(k+1)} \left[\frac{\bar{e}^{i\phi}}{Z_1-\bar{a}} - \frac{\bar{a}e^{i\phi}}{(Z_1-\bar{a})^2} \right] \\ &\quad - \frac{(\bar{a}-a)\bar{e}^{i\phi}}{(Z_1-\bar{a})^2} - \frac{2\bar{a}(\bar{a}-a)\bar{e}^{i\phi}}{(Z_1-\bar{a})^3} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, G 는 剪斷彈性係數, $k=3-4\nu$, ν 는 프와송比이다.

式 (6)을 Z 座標系 複素應力函數로 變換하면 式 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_{oH}(Z) &= \frac{P_0(\mu-i)}{2c} [\sqrt{(Ze^{i\phi_0}-a)} \\ &\quad - c\sqrt{(Ze^{i\phi_0}-a)+c} - (Ze^{i\phi_0}-a)] \\ \Psi_{oH}(Z) &= e^{i2\phi_0} \left[-\frac{P_0(\mu-i)}{2c} [\sqrt{(Ze^{i\phi_0}-a)-c} \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(Ze^{i\phi_0}-a)+c} - (za^{i\phi_0}-a)] \right. \\ &\quad - \frac{P_0(\mu-i)}{2c} [\sqrt{(\bar{Z}e^{-i\phi_0}-a)} \\ &\quad \left. - c\sqrt{(\bar{Z}e^{-i\phi_0}-a)+c} - (\bar{Z}e^{-i\phi_0}-a)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_0(\mu-i)Ze^{i\phi_0}}{2c} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{Ze^{i\phi_0}-a}{\sqrt{Ze^{i\phi_0}-a}-c\sqrt{Ze^{i\phi_0}-a}+c} - 1 \right] \quad (8)$$

半無限 彈性體 表面과 角度 ϕ_0 를 이루는 彈性體 內의 直線 ($Y=0, 0 \leq X \leq d_0$)에서 X 軸에 垂直한 미끄럼面 ($\phi = -90 + \phi_0$)을 가지는 刃狀轉位가 轉位 密度 $B_1(s)$ 로 分布되어 있는 境遇의 複素應力函數 $\Phi_{oV}(Z)$, $\Psi_{oV}(Z)$ 는 式 (7)을 Z 座標系로 變換시킨 후 整理하면 式 (9)로 된다.

$$\begin{aligned} \Phi_{oV}(Z) &= \frac{G}{\pi(k+1)} \int_0^{d_0} \left[\frac{1}{Z-s} - \frac{e^{i\phi_0}}{P_1(Z)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q_1(s)\bar{e}^{i\phi_0}}{P_1^2(Z)} \right] B_1(s) ds \quad (9) \\ \Psi_{oV}(Z) &= \frac{G}{\pi(k+1)} \int_0^{d_0} \left[\frac{1}{Z-s} + \frac{s}{(Z-s)^2} \right. \\ &\quad - \frac{e^{i\phi_0}}{P_1(Z)} + \frac{Q_1(s)e^{i\phi_0}}{P_1^2(Z)} \\ &\quad \left. - \frac{se^{i2\phi_0}}{P_1^2(Z)} + \frac{2sQ_1(s)}{P_1^3(Z)} \right] B_1(s) ds \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} P_1(Z) &= Ze^{i\phi_0} - se^{-i\phi_0}, \\ Q_1(s) &= s(e^{-i\phi_0} - e^{i\phi_0}) \text{이다.} \end{aligned}$$

또, 直線 ($Y=0, 0 \leq X \leq d$)에서 X 軸에 平行的한 미끄럼 面 ($\phi = \phi_0$)을 가지는 刃狀轉位가 轉位 密度 $B_2(s)$ 로 分布되어 있는 境遇의 複素應力函數 $\Phi_{oP}(Z)$, $\Psi_{oP}(Z)$ 는 式 (7)을 Z 座標系로 變換시킨 後 整理하면 式 (10)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Phi_{oP}(Z) &= \frac{iG}{\pi(k+1)} \int_0^d \left[\frac{1}{Z-s} + \frac{e^{i\phi_0}}{P_1(Z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q_1(s)e^{-i\phi_0}}{P_1^2(Z)} \right] B_2(s) ds \\ \Psi_{oP}(Z) &= \frac{iG}{\pi(k+1)} \int_0^d \left[-\frac{1}{Z-s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{(Z-s)^2} + \frac{e^{i\phi_0}}{P_1(Z)} - \frac{Q_1(s)e^{i\phi_0}}{P_1^2(Z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{se^{i2\phi_0}}{P_1^2(Z)} - \frac{2sQ_1(s)}{P_1^3(Z)} \right] B_2(s) ds \end{aligned}$$

이제 境界條件 式 (2), (5)를 滿足하는 複素應力函數 $\Phi(Z)$, $\Psi(Z)$ 는 式 (11)과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= \Phi_{oV}(Z) + \Phi_{oP}(Z) + \Phi_{oH}(Z) \\ \Psi(Z) &= \Psi_{oV}(Z) + \Psi_{oP}(Z) + \Psi_{oH}(Z) \quad (11) \end{aligned}$$

複素應力函數 式 (11)은 境界條件式 (3), (4)를 滿足하여야 한다. 따라서 式 (11)을 條件式 (3)과 (4)에 각각 代入하여 整理하면 다음式과 같은 聯立 特異積分方程式을 얻는다.

$$\int_0^{d_0} \frac{B_1(s)}{X-s} ds + \frac{1}{2} \int_0^{d_0} k_1(X, s) B_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^d k_2(X, s) B_2(s) ds + \frac{1}{D} Re[F(X)] = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^d \frac{B_2(s)}{X-s} ds + \int_0^{d_0} \left[\frac{1}{2} h_1(X, s) \mp H(X) \mu^c \left[\frac{1}{X-s} + \frac{1}{2} k_1(X, s) \right] B_1(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^d [h_2(X, s) \mp H(X) \mu^c k_2(X, s)] B_2(s) ds + \frac{1}{D} [Im[F(X)] \mp H(X) \mu^c Re[F(X)]] = 0 \quad (13)$$

여기서,

$$H(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq X \leq d_0 \\ 1 & d_0 \leq X \leq d \end{cases} \quad (14)$$

$$D = \frac{2G}{\pi(k+1)}$$

$$F(X) = \Phi_{OH}(X) + \overline{\Phi_{OH}(X)} + X \Phi'_{OH}(X) + \overline{\Psi_{OH}(X)}$$

$$k_1(X, s) + ih_1(X, s) = -\frac{e^{i\phi_0}}{P_1(X)} - \frac{2e^{-i\phi_0}}{P_1(X)} + \frac{e^{-i\phi_0} Q(s)}{P_1^2(X)} + \frac{Q_1(s)(e^{i\phi_0} + e^{-i\phi_0})}{P_1^2(X)} + \frac{e^{-i2\phi_0}(X-s)}{P_1^2(X)} + \frac{2Q_1(s)(s-X)}{P_1^3(X)}$$

$$k_2(X, s) + ih_2(X, s) = -\frac{ie^{i\phi_0}}{P_1(X)} - \frac{ie^{-i\phi_0} Q_1(s)}{P_1^2(X)} + \frac{iQ_1(s)(e^{i\phi_0} + e^{-i\phi_0})}{P_1^2(X)} - \frac{ie^{-i2\phi_0}(X-s)}{P_1^2(X)} + \frac{i2Q_1(s)(s-X)}{P_1^3(X)}$$

複素應力函數 $\Phi(Z)$, $\Psi(Z)$ 에서 誘導되는 變位가 半無限彈性體內的 領域에서 一價로 存在한다는 事實로 부터 다음의 補充 條件式이 얻어진다.

$$\int_0^{d_0} B_1(s) ds = \int_0^d B_2(s) ds = 0 \quad (15)$$

3. 數值解析

特異積分方程式 (12) 와, (13)을 풀기 위하여 다음과 같이 無次元 變數들을 導入한다.

$$\zeta_1 = \frac{s}{d_0}, \quad \eta_1 = \frac{X}{d_0},$$

$$\beta_1 = \frac{d_0}{c}, \quad \phi_1(\zeta_1) = \frac{\pi D}{P_0} B_1(s)$$

$$\zeta_2 = \frac{s}{d}, \quad \eta_2 = \frac{X}{d}, \quad \beta_2 = \frac{d}{c},$$

$$\phi_2(\zeta_2) = \frac{\pi D}{P_0} B_2(s)$$

$$F(X) = P_0 f(\eta_1, \beta_1), \quad \overline{F(X)} = P_0 \overline{f(\eta_2, \beta_2)}$$

$$H_0(\eta_2) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta_2 \leq d_0/d \\ 1 & d_0/d \leq \eta_2 \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

式 (12), (13), (14)을 無次元化 시킨 후, 다시 式 (17)과 같이 $-1 \leq \zeta_1, \zeta_2 \leq 1$ 의 영역에서만 정의되는 未知函數 $g_1(\zeta_1), g_2(\zeta_2)$ 를 도입함으로써, 特異積分方程式을 $(-1, 1)$ 에 정규화 한다.

$$\phi_1(\zeta_1) = \frac{g_1(\zeta_1)}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}, \quad g_1(\zeta_1) = g_1(-\zeta_1) \quad (|\zeta_1| < 1) \quad (17)$$

$$\phi_2(\zeta_2) = \frac{g_2(\zeta_2)}{\sqrt{1-\zeta_2^2}}, \quad g_2(\zeta_2) = g_2(-\zeta_2) \quad (|\zeta_2| < 1)$$

式 (17)을 特異積分 方程式에 적용하여 얻어진 式에 Gauss-Chebyshev 積分公式⁽²²⁾을 利用하면 특이적분 방정식은 다음과 같이 未知函數 $g_1(\zeta_{1k}), g_2(\zeta_{2k})$ 에 관한 聯立方程式으로 變換된다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} \frac{1}{\zeta_{1k} - \eta_{1r}} g_1(\zeta_{1k}) - \frac{\beta_1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} k_{10}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=1, n=1} g_1(\zeta_{1k}) - \frac{\beta_2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} k_{20}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=1, n=2} g_2(\zeta_{2k}) = \pi Re[f(\eta_{1r}, \beta_1)] \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} \frac{1}{\zeta_{2k} - \eta_{2r}} g_2(\zeta_{2k}) - \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} \left[\frac{1}{2} h_{10}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=2, n=1} \mp H_0(\eta_{2r}) \mu^c \left[\frac{1}{\eta_{2r} \beta_2 - \zeta_{1k} \beta_1} + \frac{1}{2} k_{10}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=2, n=1} \right] \right] g_1(\zeta_{1k}) \beta_1 - \frac{\beta_2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} \left[h_{20}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=2, n=2} \mp H_0(\eta_{2r}) \mu^c k_{20}(\eta_{mr}, \zeta_{nk}, \beta_m, \beta_n, \phi_0) \Big|_{m=2, n=2} \right] g_2(\zeta_{2k}) = \pi [Im[f(\eta_{2r}, \beta_2)] \mp H_0(\eta_{2r}) \mu^c Re[f(\eta_{2r}, \beta_2)]] \quad (19)$$

여기서,

$$\eta_{ir} = \cos\left(\frac{\pi r}{2n+1}\right), \quad r=1, 2, \dots, n$$

$$n_{ik} = \cos\left(\frac{2k-1}{4n+2}\pi\right), \quad k=1,2,\dots,n \quad (20)$$

(i=1, 2)

式 (15)는 다음과 같이 된다.

$$\sum_{k=1}^n g_1(\zeta_{1k}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n g_2(\zeta_{2k}) = 0 \quad (21)$$

X = d_o에서 특異성이 없음으로 다음의關係가 얻어진다.

$$g_1(1) = 0 \quad (22)$$

以上으로 부터 g₁(1), g₂(1), d_o가 求해진다.

龜裂 先端의 應力擴大係數 K_I, K_{II}는 다음과 같이 구해진다.

- (1) 全體 또는 一部가 닫힌 龜裂인 境遇
 $K_I = 0$
 $K_{II} = P_o\sqrt{\pi d} \cdot g_2(1) \quad (23)$
- (2) 全體가 열린 龜裂인 境遇
 $K_I = P_o\sqrt{\pi d} \cdot g_1(1)$
 $K_{II} = P_o\sqrt{\pi d} \cdot g_2(1) \quad (24)$

龜裂 傳播 條件과 龜裂 傳播 方向에 對한 條件은 몇가지 紹介되어 있지만, 여기서는 混合모우드荷重下의 脆性材料의 龜裂傳播를 경우로한 Erdogan-Sih의 maximum circumferential stress criterion⁽²³⁾을 擇하였다. 이것은 Fig. 1에 表示한 것처럼 龜裂先端 近處에서 極座標(r, θ)를 定義하는 境遇, 龜裂은 θ方向의 引張應力 σ_o가 最大인 面을 擇하여 그 面에서의 應力擴大係數가 破壞靱性 K_{Ic}와 같아질 때 傳播하기 始作한다는 것이다. 이 條件에 의하면 龜裂의 傳播角度 θ_o는 式 (25)에 의하여 決定된다.

$$\tan \frac{\theta_o}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8\gamma^2}}{2}, \quad \gamma = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (25)$$

式 (25)에서 決定되는 θ_o에 對한 두개의 根 중에서 σ_o가 큰 쪽의 角度가 龜裂이 傳播되는 方向을 나타내게 되는 것이다. 또 σ_o의 最大값 σ_{o,max}를 規定하는 有效應力擴大係數 K_{eff} (effective stress intensity factor)는 다음과 같이 表示된다⁽²³⁾.

$$K_{eff} = \cos \frac{\theta_o}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_o}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_o \right] \quad (26)$$

4. 計算結果 및 考察

Fig. 1에서 Hertz 接觸壓力이 左에서 右로 移動함에 따른 傾斜진 表面龜裂의 傳播 可能性을 式 (26)으로 정의되는 有效應力擴大係數의 相對的인

크기로 比較, 분석, 檢討하여 보기로 한다.

解析에 있어서, Hertz 接觸部와 龜裂面 사이의 摩擦係數 μ^o를 0.02, 0.1, 0.7로 한 것은 流體潤滑, 境界潤滑, 無潤滑을 각각 意味한다.

4.1 摩擦의 影響

Hertz 接觸壓力의 移動에 따른 無次元 應力擴大

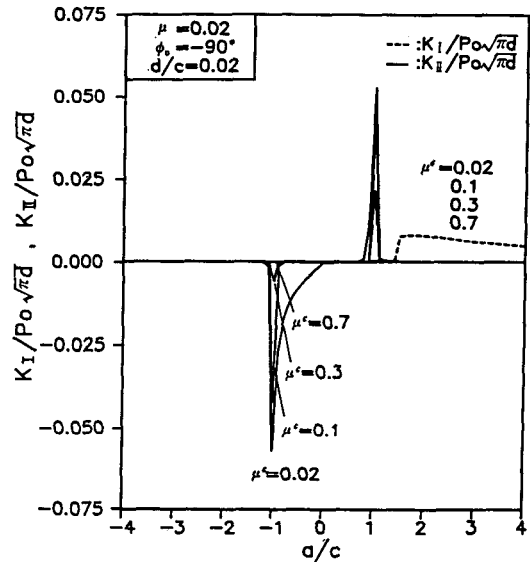


Fig. 2(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.02, \phi_o = -90^\circ, d/c = 0.02, \mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

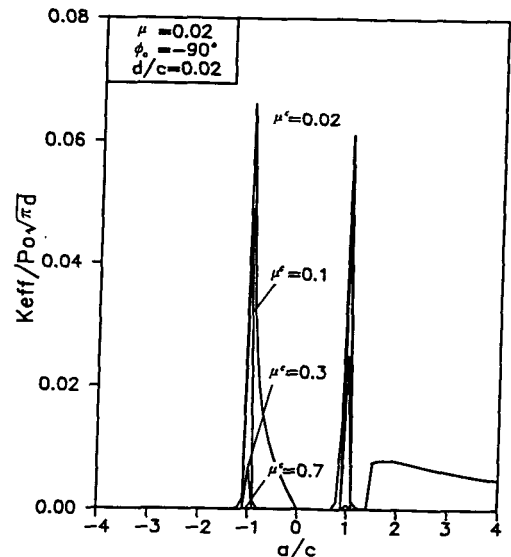


Fig. 2(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.02, \phi_o = -90^\circ, d/c = 0.02, \mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

係數 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$, $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$, $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ 의 變化值들을 Fig. 2에서 Fig. 7까지 나타내었다. 여기서는 垂直 表面龜裂($\phi_o = -90^\circ$)에 대하여만 整理하였다.

Fig. 2(a)는 $\mu = 0.02$, $d/c = 0.02$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$ 인 경우의 變化를 나타내고 있다. 이 그림

에서 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 는 龜裂의 一部分이 닫혀있는 領域까지는 0이다가 龜裂이 열린 $a/c = 1.4$ 近處에서 부터 값이 나타나기 始作하였으며 龜裂面사이의 摩擦抵抗의 크기에 關係없이 同一함을 알수 있는 데, 이는 열려있는 龜裂面의 引張應力은 龜裂面사이의 摩擦에는 無關하다는 것을 의미한다. $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$

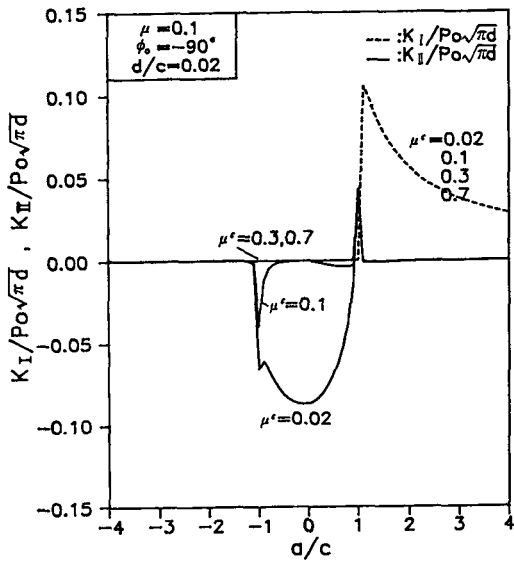


Fig. 3(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.1$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.02$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

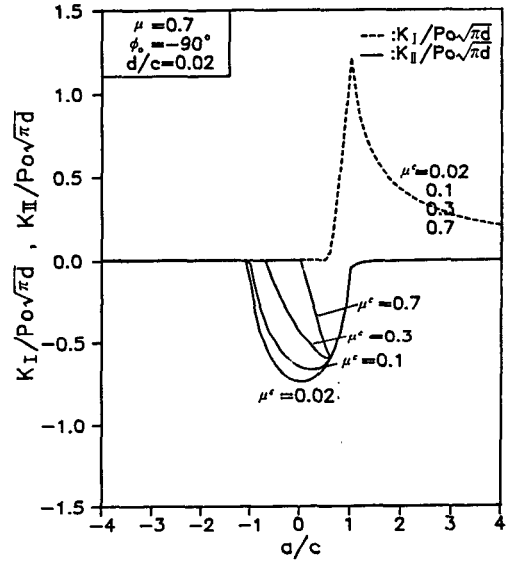


Fig. 4(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.7$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.02$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

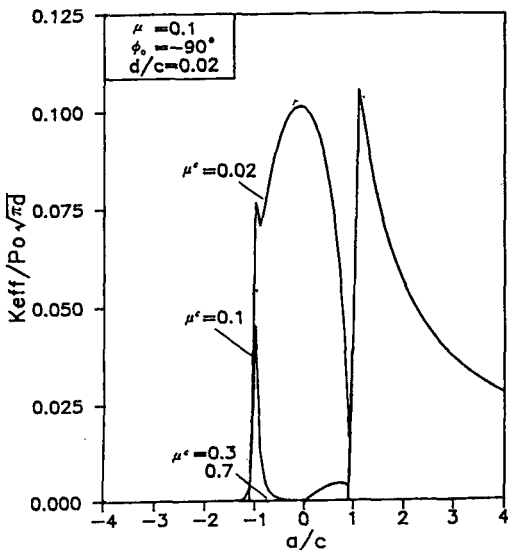


Fig. 3(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.1$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.02$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

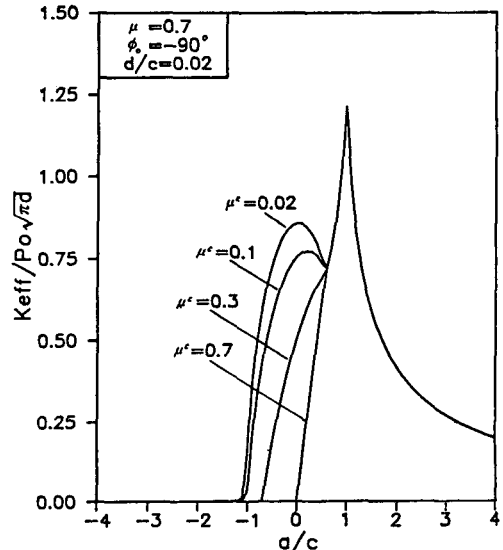


Fig. 4(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.7$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.02$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

는 a/c 값의 두 점에서 큰 값을 나타내고 있으며,龜裂面 사이의 摩擦係數 μ^c 값이 커짐에 따라 絶對값은 크게 減少하고 있다. 이는 龜裂面の 摩擦抵抗이 클수록 龜裂은 傳播되기 어렵다는 사실을 意味한다. Fig. 2(b)는 無次元有效應力擴大係數 $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ 의 값을 보여준다. 여기서 $\mu^c=0.02$, $\mu^c=$

0.1일 때는 $a/c=-1$ 近處에 각각 그 傳播可能性이 가장 높으며, 傳播形態는 $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ 가 driving force로 作用하고 있음을 알 수 있다. 그러나 $\mu^c=0.7$ 일 때는 $a/c=1.5$ 近處에서 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 가 driving force로 作用하고 있다. 卽 流體潤滑狀態에서는 $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ 가 driving force로 作用하게 됨을

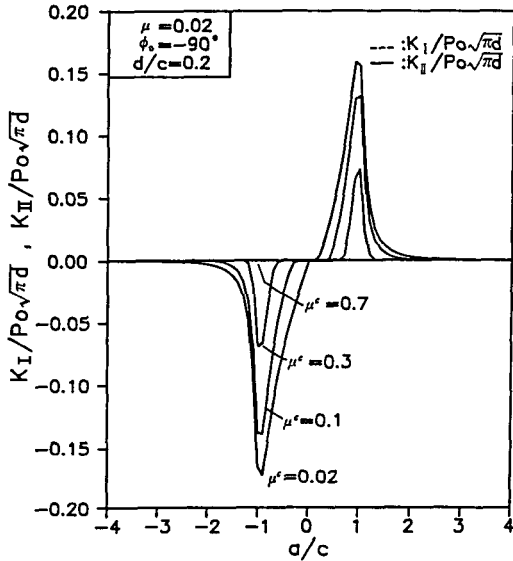


Fig. 5(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu=0.02$, $\phi_o=-90^\circ$, $d/c=0.2$, $\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

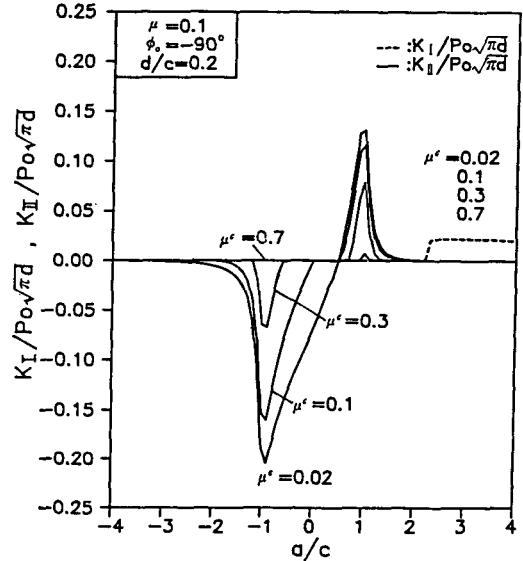


Fig. 6(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu=0.1$, $\phi_o=-90^\circ$, $d/c=0.2$, $\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

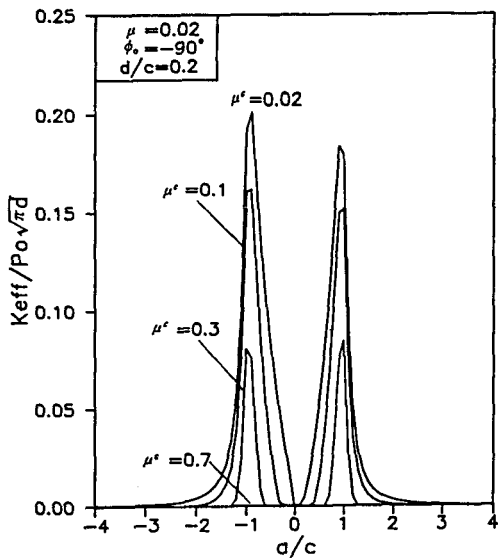


Fig. 5(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu=0.02$, $\phi_o=-90^\circ$, $d/c=0.2$, $\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

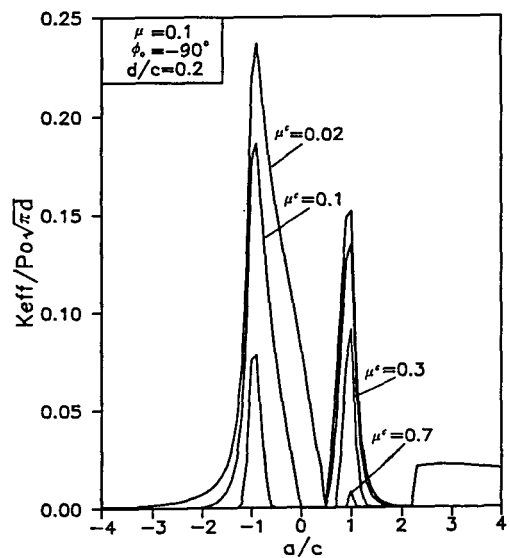


Fig. 6(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu=0.1$, $\phi_o=-90^\circ$, $d/c=0.2$, $\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

알 수 있다. Fig. 3(a)는 Fig. 2(a)와 동일조건이나 Hertz接觸部の 摩擦係數 μ 를 0.1로 한 境遇이다. 즉 境界潤滑 狀態에서의 無次元應力擴大係數 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 와 $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ 를 나타내었으며, Fig. 3(b)는 無次元有效應力擴大係數 $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ 를 나타낸 것이다. Fig. 2(a)(b)와 비교하면 應力擴大係數의 값이

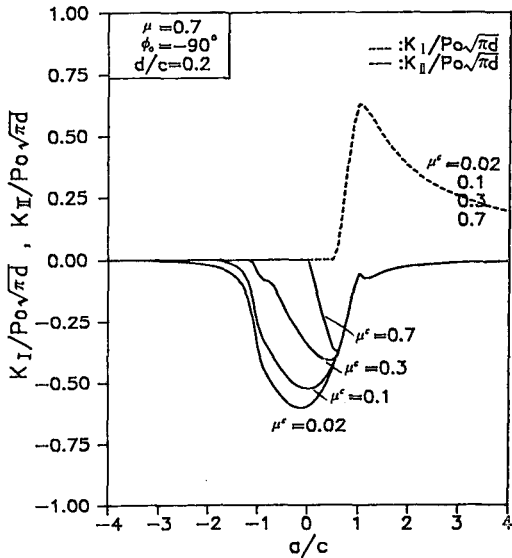


Fig. 7(a) $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ and $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.7$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.2$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

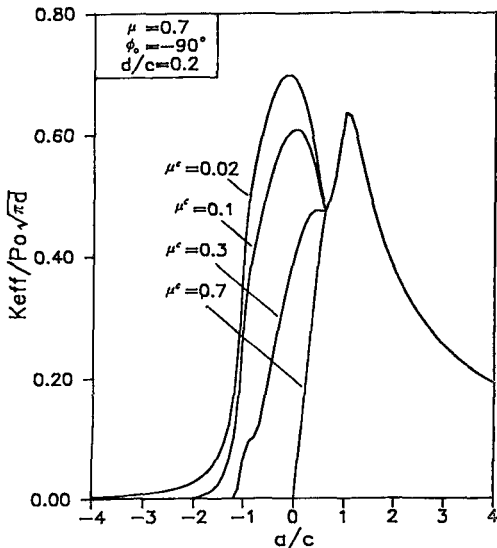


Fig. 7(b) $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus a/c for $\mu = 0.7$, $\phi_o = -90^\circ$, $d/c = 0.2$, $\mu^c = 0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

약 2배정도 增加하였음을 알 수 있다. Fig. 3(b)에서 알 수 있듯이 龜裂面간의 摩擦係數 μ^c 를 0.1로 看做하면, 즉 Hertz接觸部와 같은 境界潤滑 狀態라면 $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ 의 最大값은 $a/c = 1.0$ 近處에서 最大값이 되며, 이것은 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 에 의한 값이다.

Fig. 4(a)와 (b)는 Hertz 接觸部の 摩擦係數 $\mu = 0.7$ 인 境遇이다. 以上으로부터 有效應力擴大係數는 Hertz 接觸部の μ 가 增加함에 따라서 增加 하고, 龜裂 成長의 driving force도 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 로 됨을 알 수 있다.

Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7은 Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4의 境遇에 각각 龜裂의 크기를 10배로 增加하여, $d/c = 0.2$ 로 한 計算結果이다. Fig. 5(a), (b)와 Fig. 6(a), (b)의 해, 龜裂의 크기를 10로 增加한 境遇에도 $\mu = 0.02$ 와 $\mu = 0.1$ 즉 流體潤滑과 境界潤滑의 境遇의 driving force는 $K_{II}/P_o\sqrt{\pi d}$ 임을 알 수 있다. Fig. 7은 $\mu = 0.7$ 즉 無潤滑상태에 대한 結果를 나타낸 것이다. Hertz 接觸部가 無潤滑상태인 境遇에는 龜裂面 사이도 無潤滑상태인 $\mu^c = 0.7$ 로 看做하면 driving force는 $K_I/P_o\sqrt{\pi d}$ 가 됨을 알 수 있다. 이것은 Kaneta의 結果⁽²³⁾와도 一致하고 있다.

以上の 結果를 綜合하면, 龜裂의 傳播形態는 Hertz接觸部와 龜裂面 사이의 摩擦係數가 流體潤滑이나 境界潤滑狀態에서는, 龜裂成長의 driving force는 K_{II} 에 의하여 mode II의 形態로 傳播할 것이다. 또한, 龜裂길이에 따라 程度의 差異는 있으나 Hertz 接觸部와 龜裂面사이의 摩擦抵抗이 클 수록, driving force는 K_I 에 의한 것으로서 mode I의 形態로 龜裂傳播 傾向이 높아질 것이다.

4.2 龜裂 傾斜의 影響

Hertz 接觸荷重 a/c 가 -4에서 +4까지 移動하는 동안에 $K_{eff}/P_o\sqrt{\pi d}$ 의 最大値와 龜裂의 傾斜 ϕ_o 와의 關係를 구하였다.

Fig. 8은 $\mu = 0.02$, $d/c = 0.02$, 0.1, 0.3, 0.7인 境遇의 $K_{eff,max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ 가 龜裂의 傾斜 ϕ_o 에 따라 變化하는 傾向을 보여준다. $\mu^c = 0.02$ 인 境遇 $\phi_o = -75^\circ \sim -60^\circ$ 近處에서, $\mu^c = 0.1$ 인 境遇 $\phi_o = -60^\circ$ 近處에서, $\mu^c = 0.3$ 인 境遇 $\phi_o = -60^\circ \sim -45^\circ$ 近處에서, $\mu^c = 0.7$ 인 境遇 $\phi_o = -45^\circ \sim -30^\circ$ 近處에서 각각 龜裂의 傳播可能性이 가장 높다. 아울러 龜裂의 傳播傾向은 mode II型임도 짐작할 수 있는데 이는 龜裂面 사이의 摩擦係數의 變化에 따라 서로 다른 크기의 $K_{eff,max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ 를 나타내고 있다는

事實에 起因한다.

Fig. 9와 10은 d/c 는 Fig. 8과 같고 μ 가 각각 0.1, 0.7일 때의 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ 와 龜裂의 傾斜 ϕ_o 와의 관계이다. 대체로 $\phi_o = -135^\circ$ 와 -45° 近處에서 龜裂의 傳播 可能性이 높고, 最大값은 $\phi_o = -45^\circ$ 近處에서 發生하였다. 이 지점에서는 龜裂面의 摩擦抵抗의 크기에 關係없이 同一한 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ 의 값을 보이는데, 이는 mode I의 傳播가 支配的임을 의미한다.

Fig. 11은 $\mu=0.02, d/c=0.2, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$ 인 境遇이다. 이 그림에서는 $\mu^c=0.02$ 인 境遇 $\phi_o = -90^\circ$ 近處에서, $\mu^c=0.1$ 인 境遇 $\phi_o = -75^\circ$ 近處에서, $\mu^c=0.3$ 인 境遇 $\phi_o = -75^\circ \sim -60^\circ$ 近處에서 $\mu^c=0.7$ 인 境遇 $\phi_o = -45^\circ$ 近處에서 각각 龜裂의 傳播 可能性이 最大이다. 아울러 龜裂傳播의 形態가 모두 mode II 型이다.

Fig. 12는 $\mu=0.1, d/c=0.2, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$ 인 境遇이다. $\mu^c=0.02$ 인 境遇 $\phi_o = -75^\circ$ 近處에서, $\mu^c=0.1$ 인 境遇 $\phi_o = -60^\circ$ 近處에서, $\mu^c=0.7$ 인

境遇 $\phi_o = -45^\circ$ 近處에서 각각 가장 높은 龜裂의 傳播 可能性을 보인다. 龜裂傳播의 形態는 모두 mode II이다.

Fig. 13은 $\mu=0.7$ 이고 $d/c=0.2, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$ 인 境遇이다. $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ 를 龜裂의 傾斜에 따라 그 變化를 구한 것이다. 이 그림에서 μ^c 의 크기에 상관없이 $\phi_o = -45^\circ$ 에서 最大값이 發

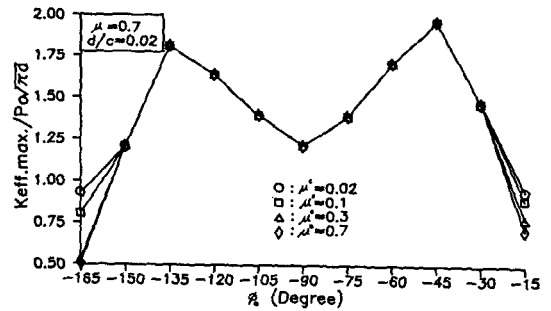


Fig. 10 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.7, d/c=0.02, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

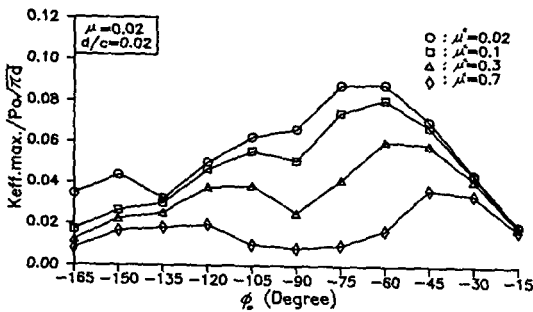


Fig. 8 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.02, d/c=0.02, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

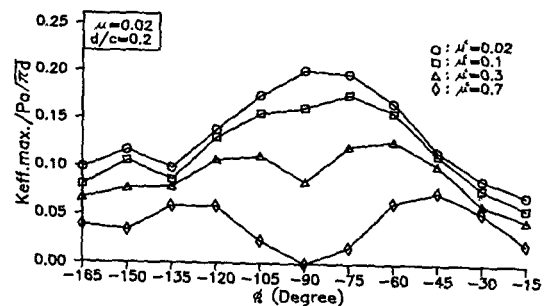


Fig. 11 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.02, d/c=0.2, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

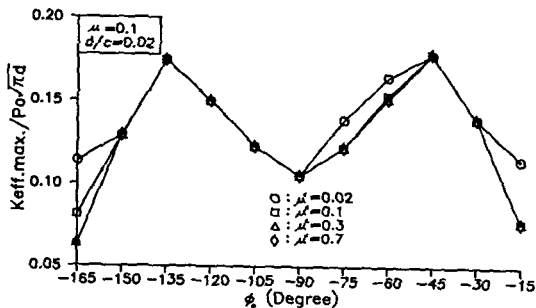


Fig. 9 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.1, d/c=0.02, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

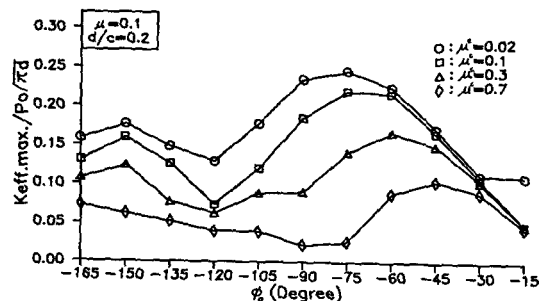


Fig. 12 $K_{eff.max.}/P_o\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.1, d/c=0.2, \mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

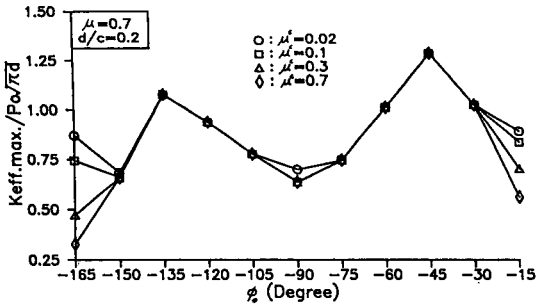


Fig. 13 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{\pi d}$ versus ϕ_o for $\mu=0.7$, $d/c=0.2$, $\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

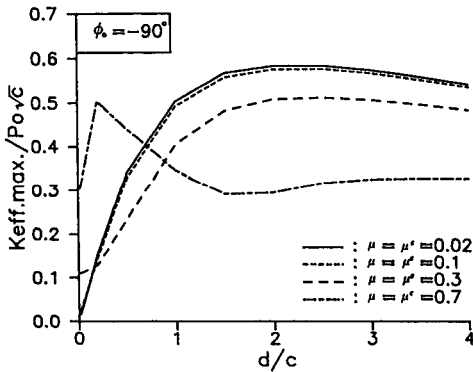


Fig. 14 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ versus d/c for $\phi_o=-90^\circ$, $\mu=\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

生하였으며 龜裂의 形態는 mode I 이다.

以上の 結果에서 龜裂 傾斜에 따른 龜裂 傳播可能性은 μ, μ^c 가 커질수록 $\phi_o=-45^\circ$ 쪽으로 移動하고 있으며 龜裂의 傳播形態 또한 mode II에서 mode I로 變化하는 傾向을 보이고 있다. 이는 潤滑 狀態가 나뉠수록 $\phi_o=-45^\circ$ 近處에서 mode I 形態로 龜裂이 傳播될 可能性이 높음을 意味한다.

4.3 龜裂길이의 影響

Fig. 14는 $\phi_o=-90^\circ$ 인 境遇에 대해서 最大有效應力擴大係數 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ 와 龜裂의 길이 d/c 와의 關係를 나타낸 것이다. $\mu=\mu^c=0.02, 0.1, 0.3$ 일 때는 $d/c=2$ 近處까지는 Hertz 接觸面과 龜裂面 사이의 摩擦抵抗이 커질수록 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ 의 값도 增加하였으나, $d/c=2$ 以後에서는 앞에서 얻은 一般의인 傾向과는 달리 Hertz 接觸面과 龜裂面 사이의 摩擦抵抗이 커질수록 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ 가

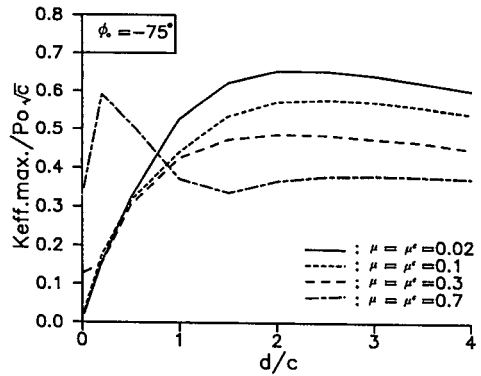


Fig. 15 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ versus d/c for $\phi_o=-75^\circ$, $\mu=\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

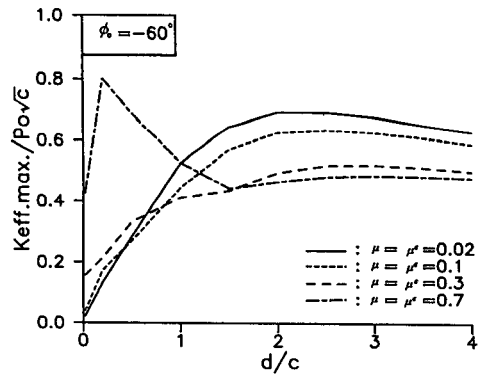


Fig. 16 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ versus d/c for $\phi_o=-60^\circ$, $\mu=\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

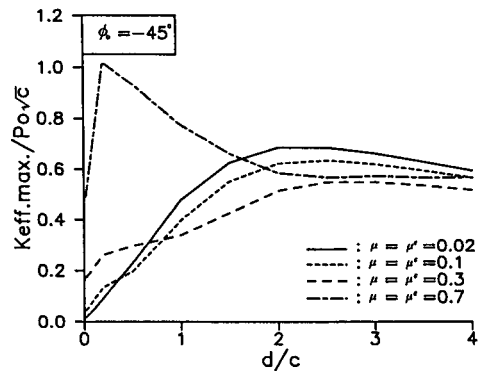


Fig. 17 $K_{eff,max.}/Po\sqrt{c}$ versus d/c for $\phi_o=-45^\circ$, $\mu=\mu^c=0.02, 0.1, 0.3, 0.7$

작아지는 傾向을 보인다. 한편 $\mu=\mu^c=0.7$ 일 때는 $d/c=0.2$ 近處에서 最大値가 나타나고 있다.

Fig. 15, Fig. 16, Fig. 17은 각각 $\phi_o=-75^\circ, -$

60°, -45°에 대한 것이다. 이境遇도 全體的인 傾向은 Fig. 14와 同一하다.

以上の 解析結果로 부터 最大有效應力擴大係數의 最大値가 特定龜裂의 길이에 存在함을 알 수 있고, 摩擦係數의 값이 클수록 最大有效應力擴大係數를 갖는 龜裂의 크기는 작게 된다.

5. 結 論

半無限彈性體 表面에 傾斜진 表面龜裂이 存在할 境遇 Hertz 接觸荷重의 移動에 따른 表面龜裂의 舉動을 線形破壞力學의 觀點에서 解析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

Hertz 接觸部와 龜裂面사이의 潤滑狀態가 流體潤滑이나 境界潤滑狀態인 境遇는 K_H 가 龜裂成長의 driving force로 作用하게 되고, 無潤滑狀態에서는 K_I 가 龜裂成長의 driving force로 作用하게 된다. 또한, Hertz 接觸部와 龜裂面 사이의 摩擦係數가 增加 할수록 龜裂의 傳播角度는 -45°로 接近한다. 潤滑狀態와 龜裂의 傾斜角에 의해 결정되는 特定の 龜裂의 길이에 대해서 最大有效應力擴大係數가 存在한다.

後 記

本 論文은 1988年度 文教部支援 韓國學術振興財團의 自由公募課題 學術研究助成費에 의하여 研究 되었으며, 이에 關係者 여러분께 感謝드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Hornbogen, E., 1975, "The Role of Fracture Toughness in the Wear of Metals", *Wear*, Vol. 33, pp. 251~259.
- (2) Suh, N.P., 1973, "The Delamination Theory of Wear", *Wear*, Vol. 25, pp. 111~124.
- (3) Suh, N.P., 1977, "An Overview of the Delamination Theory of Wear", *Wear*, Vol. 44, pp.1~16.
- (4) Jahanmir, S. and Suh, N.P., 1977, "Mechanics of Subsurface Void Nucleation in Delamination Wear", *Wear*, Vol. 44, pp.17~38.
- (5) Fleming, J.R. and Suh, N.P., 1977, "Mechanics of Crack Propagation in Delamination Wear", *Wear*, Vol. 44, pp.39~56.
- (6) Fleming, J.R. and Suh, N.P., 1977, "The Relationship between Crack Propagation Rates and Wear Rates", *Wear*, Vol.44, pp.55~64.
- (7) Rosenfield, A.R., 1980, "A Fracture Mechanics Approach to Wear", *Wear*, Vol. 61, pp.125~132.
- (8) Hills, D.A. and Ashelby, D.W., 1980, "On the Determination of Stress Intensification Factors for a Wearing Half-space", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 13, pp. 69~78.
- (9) Hills, D.A. and Ashelby, D.W., 1980, "On the Application of Fracture Mechcnics to Wear", *Wear*, Vol. 54, pp. 321~330.
- (10) Keer, L.M., Bryant, M.D. and Haritos, G.K., 1982, "Subsurface and Surface Cracking Due to Hertzian Contact", *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 104, pp.347~351.
- (11) Keer, L.M. and Bryant, M.D., 1983, "A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue", *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 105, pp. 198~205.
- (12) Kaneta, M., Murakami, Y. and Okazaki, T., 1986, "Growth Mechanism of Subsurface Crack Due to Hertzian Contact", *Trans. ASME, Journal of Tribology*, Vol. 108, pp.134~139.
- (13) Kaneta, M., Suetsugu, M. and Murakami, Y., 1986, "Mechanism of Surface Crack Growth in Lubricated Rolling/Sliding Spherical Contact", *Trans. ASME, Journal of Applied mechanics*, Vol. 53, pp. 354~360.
- (14) Hayashi, K. and Nemat-Nasser, S., 1981, "On Branched Interface Cracks", *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 529~533.
- (15) Erdogan, F. and Gupta, G.D., 1972, "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 32, pp. 525~534.
- (16) Kim, S.S., Kato, K., Hokkirigawa, K. and Abe, H., 1986, "Wear Mechanism of Ceramic Materials in Dry Rolling Friction", *Trans. ASME, Journal of Tribology*, Vol. 108, pp. 522~526.
- (17) 金石三, 加藤康司, 堀切川一男, 1989, "구름접촉시 세라믹의거시적마모특성", *潤滑學會志*, 第5卷, 第1號, pp.28~35
- (18) 金石三, 加藤康司, 堀切川一男, 1989, "SEM관찰에 의한 세라믹의 구름마모기구", *潤滑學會志*, 第5卷, 제1號, pp.36~43
- (19) Muskhelishvili, N.I., 1963, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff, The Nether lands.
- (20) 金石三, 1987, *セラミックスの ころかり磨耗機構と*

- その 破壊力學的考察, 東北大學博士學位論文, pp.91~93.
- (21) 玉手統, 1971, 彈性體の變形, コロナ社, 東京, pp. 209~265.
- (22) Gupta, G.D. and Erdgan, F., 1974, "The Problem of Edge Cracks in an Infinite Strip", Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, p. 1001~1006.
- (23) Erdogan, F. and Sih, G.C., 1963 "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear", Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Vol. 85, pp.519~527.