

〈論 文〉

구와 평면간의 구름접촉거동에 관한 연구

김 경 모* · 정 인 성**

(1989년 9월 6일 접수)

A Study on Rolling Contact Behaviors of a Flat Rough Surface with a Smooth Ball

Kyoung Mo Kim and In Sung Chung

Key Words : Rolling Contact(구름접촉), Elastic Hysteresis Loss(탄성이력손실), Rolling Friction Force(구름마찰력), Free Vibration(자유진동), Contact Width(접촉폭), λ - X_0 Curve(대수감쇠율-변위곡선)

Abstract

The rolling contact behaviors between a smooth ball and a flat rough surface under dynamic load are intricately affected by many factors, such as the diameter of a ball, normal load and the roughness of a flat surface etc. Accordingly, the experimental study is done to find them on the base of elastic hysteresis loss as theoretical approach is very difficult. The experimental apparatus composed of damped-free vibration system is used. This paper investigates the damping characteristics on the rolling contact area through rolling friction force and logarithmic decrement versus displacement obtained in accordance with the variations of those factors, and presents a new experimental method to find out contact width using the relations of logarithmic decrement and rolling friction force with displacement.

기 호 설 명

- | | |
|---|--|
| a : 접촉원 직경(접촉폭) | f_p : 한 접촉면에서 반 사이클을 수행하는데 필요한 구름마찰력 |
| a_h : Hertz접촉폭 | f_{p0} : 계에서 반 사이클을 수행하는데 필요한 구름마찰력 |
| a_f : 마찰이론에 의한 접촉폭 | k : 스프링 상수 |
| D : 볼의 직경 | P : 한 접촉면에 작용하는 법선력 |
| E : 한 사이클에 대한 계의 최대에너지 | P_1 : 볼 한개에 작용하는 수직하중 |
| E_{p0} : 접촉부 평판에서의 전탄성에너지 | r : 볼의 반경 |
| E_g : 한 접촉면에서의 탄성에너지 | S : 한 접촉면에서 손실에너지 |
| E_k : 스프링의 탄성에너지 | X_0 : 상부평판의 수평변위 |
| E_1 : 고탄소크롬베어링강 볼의 영(216GPa) | X_m : 최대 대수 감쇠율이 존재할 때의 변위 |
| E_2 : 기계구조용 강 평판의 영률(205 GPa) | α : 무차원 수($ak/8f_p$) |
| E^* : 등가영률($1/E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$) | ΔE : 한 사이클에 대한 계의 손실에너지 |
| * 정회원, 전북산업대학 기계공학과 | θ : V-노치 노치홈의 각도(45°) |
| ** 정회원, 전북대학교 공과대학 기계공학과 | |

- λ : 대수 감쇠율
 μ : 무차원 변위 (X_0/a)
 μ_m : 최대 대수감쇠율이 존재할 때의 무차원 변위
 μ_0 : 정지마찰계수(0.147)
 ν_1 : 고탄소 크롬 베어링강 볼의 프와송비(0.34)
 ν_2 : 기계구조용 강 평판의 프와송비(0.33)

1. 서 론

구름접촉은 마찰이 수반 되므로써 구름베어링과 마찰차와 같은 기계요소가 동력전달이나 기계시스템의 정밀화와 고속화에 지대한 영향을 미치고 있기 때문에 접촉변형거동의 보다 정확한 해석이 요구되고 있다. 그러나 전동체의 구름접촉 이론은 접촉면의 성질뿐만 아니라 구름속도, 접촉면에 수직하게 작용하는 법선력, 전동체의 직경 및 변형 등에 복잡하게 관계하기 때문에⁽¹⁾ 이에 관한 연구는 이론보다는 실험적인 방법에 의해 접근되어 왔으며 20세기 초반부터 그 체계가 세워지기 시작하였다. 구름접촉의 원인으로써 두 면간의 미끄름, 표면조도, 응축⁽²⁾, 소성변형⁽³⁾, 탄성변형 및 탄성이력손실⁽⁴⁾ 등에 의한 것으로 보고 되어 왔으나 Tabor⁽⁴⁾가 진동법을 이용한 실험에서 탄성이력손실이 전동체의 구름접촉의 발생원인 이라는 체계를 세운 이래 Drutwski⁽⁵⁾, Flom⁽⁶⁾, 渡部 川口^(7,8) 등이 이를 증명한 다음부터 재료의 변형과 밀접한 관계가 있는 탄성이력손실에 의한다는 학설이 가장 유력시되고 있다.

정적인 상태에서 구와 평면의 접촉기구에 대해서는 Hertz⁽⁹⁾ 이론을 기초로 한 Archard⁽¹⁰⁾, Nuri⁽¹¹⁾, Greenwood^(12,13), Goodman 와 Keer⁽¹⁴⁾, Hartnett and Kannel⁽¹⁵⁾, Johnson⁽¹⁶⁾, 石垣 川口^(17,18), 山田⁽¹⁹⁾ 등의 보고가 있으나 전동체인 구와 평면의 구름접촉과 같은 동적인 상태에서 접촉부의 마찰로 인하여 발생하는 접촉거동의 결과가 확연히 제시되어 있지 않음으로 정·동적인 접촉기구를 비교, 검토할 수 없음은 물론 접촉거동을 정량적으로 분석하지 못하고 있다.

따라서 본 연구에서는 동적인 상태에서 구름접촉 거동을 좀더 명확히 하기 위해서 마찰의 발생기구가 탄성이력손실에 기인한다는 이론을 기초로 압축코일스프링을 이용한 감쇠자유진동시스템으로 구성된 실험장치에 의해서 구의 직경, 수직하중, 평면만의 표면거칠기를 변화시켜 구름접촉면의 감쇠특

성을 검토하고 이로부터 구름마찰력과 대수감쇠율을 구한 다음 대수감쇠율과 진폭의 관계를 이용해서 실험에 의한 새로운 접촉폭 산출방법을 제시하고 Hertz이론에 의한 접촉폭과 마찰이론의 역학적 해석에 의한 접촉폭과 비교, 분석해 보았다.

2. 구름접촉거동에 관한 이론적 고찰

2.1 구름접촉

Fig. 1과 같이 일정한 방향으로 구름접촉 운동이 일어나도록 볼의 규격에 따라 90° V-노치(V-notch)를 낸 상·하부 평판 사이에 4개의 볼을 끼우고 하부평판을 고정시킨 다음 압축코일스프링에 연결시킨 상부평판의 끝에서 순간적으로 수평력을 가하므로써 감쇠자유진동을 할 수 있도록 한 시스템이다.

이 시스템에서 상부평판의 변위가 X_0 일 때 볼의 수평방향 변위는 $X_0/2$ 가 되고 볼이 평판사이를 구르기 시작하여 구름마찰력이 일정한 값을 나타내는 어느 경계점까지는 감쇠자유진동 운동방정식⁽²⁰⁾인 $m\ddot{X}_0 + kX_0 \pm f_p = 0$ 의 해로부터 매 사이클 당 진폭 변화량 $\Delta X_0/2 = 4f_p/k$ 씩 진폭이 일정하게 감소하므로 감쇠파형이 직선적 감쇠를 나타내고 있지만 그 이후는 한 접촉면에서 형성된 루프의 면적 S 가 변위 X_0 의 제곱에 비례하는⁽²¹⁾ 이력감쇠와 같이 지수적 감쇠를 하게 된다.

이와 같은 자유진동 시스템에서 볼 1개당의 접촉면 수가 4이므로 볼과 평판의 총 접촉면 수는 16이 된다. 4개의 볼이 상·하부 평판 사이에 한 사이클을 수행하는데 필요한 구름마찰력은 $2f_p$ 이므로 한 접촉면에서 한 사이클을 수행하는데 구름마찰력 $2f_p$ 는 $2f_p$ 의 1/16이 된다. 따라서 $f_p = 16f_p = k\Delta X_0/8$ 이므로 $f_p = k\Delta X_0 = 128$ 가 된다.

Fig. 1의 감쇠파형과 히스테리시스 루프(hysteresis loop)의 관계에서 구름마찰력이 일정하게 존재하지 않는 어느 지점에서부터 접촉원직경 내에서 감쇠자유진동이 진행되다가 정지하게 될 것이므로 감쇠파형이 직선적 감쇠에서 지수적 감쇠로 바뀌는 경계점에서의 변위 즉 감쇠파형에서 진폭의 2배를 접촉원직경 a 로 하였으며 본 논문에서는 이를 접촉폭이라 칭한다.

볼이 평판상을 구를 때 볼과 평판의 접촉부에서 다같이 변형되었으나 Fig. 10에서 알수 있는 바와 같이 본 실험에 사용한 볼은 평판보다 경도가 현저

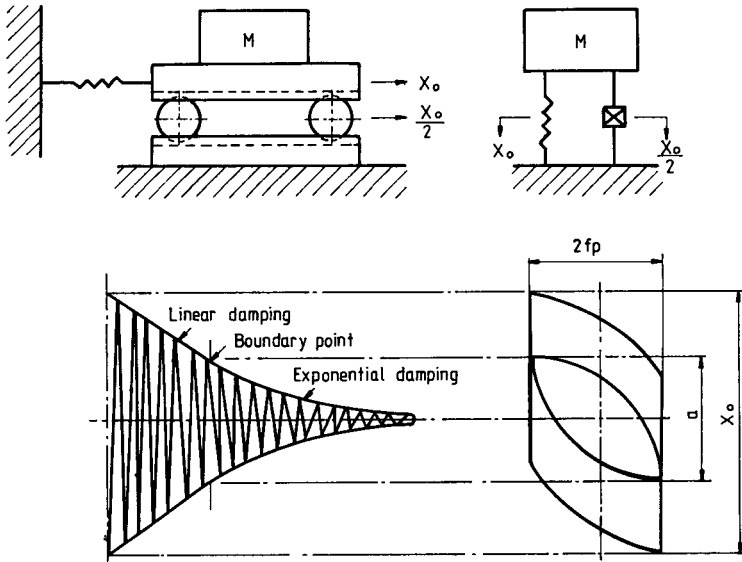


Fig. 1 Damped-free vibration system and relation between hysteresis loop and type of damping wave

하게 크고 평판 쪽의 탄성한도 이내에서 수직하중을 가하였기 때문에 이상적인 강체구로 가정하여 거칠기 변화를 준 평판 쪽의 변형만을 고려하였다.

2.2 대수감쇠율(λ)

Fig. 1과 같은 볼과 평판의 구름접촉에서 동적 특성을 나타내는 대수감쇠율을 한 사이클에 대한 진동계에서의 손실에너지 ΔE 와 최대변위에 대한 진동계의 에너지 E 와의 관계로 나타내면 Maclaurin 정리⁽²²⁾에 의해서 근사적으로 다음과 같이 된다.

$$\lambda = \frac{\Delta E}{2E} \tag{1}$$

계의 손실에너지 ΔE 는 마찰에 의한 한 접촉면에서 손실에너지를 S 라고 하면 V-노치를 가지고 있는 상·하부 평판 사이에서 4개의 볼이 구름접촉하고 있으므로 $16S$ 가 되고 최대변위에 대한 진동계의 에너지 E 는 한 접촉면에서 평판측 접촉부의 탄성 에너지를 E_{p_0} 라고 하면 접촉부 평판에서의 전탄성에너지 $E_p = 16E_{p_0}$ 와 같게 되고 이에 스프링의 탄성에너지 E_k 를 합한 것으로 표시할 수 있으므로 식(1)은 다음과 같이 정리된다.

$$\lambda = \frac{\Delta E}{2(E_p + E_k)} = \frac{16S}{2(16E_{p_0} + E_k)} = \frac{8S}{E_k + 16E_{p_0}} \tag{2}$$

한 접촉면에서 손실에너지를 나타내는 히스테리시스 루프(hysteresis loop)의 면적 S 가 X_o^2 에 비례하는 관계를 이용하면 초기조건이 $X_o = a$ 일 때 $f(X_o) = 2f_p$ 이므로 일계선형 미분방정식의 해에 의해서 구름마찰력 함수식은 Fig. 2와 같은 관계로 나타낼 수 있으므로 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{f(X_o)}{2f_p} = \frac{X_o}{a} \left(1 - \ln \frac{X_o}{a} \right) \tag{3}$$

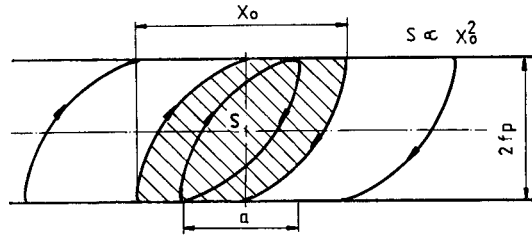
구름마찰력 함수 $f(X_o)$ 를 접촉폭 a 이내에서 한 사이클을 수행하는데 필요한 최대마찰력 $2f_p$ 로 무차원화하여 식 (3)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$g(\mu) = \mu(1 - \ln \mu) \tag{4}$$

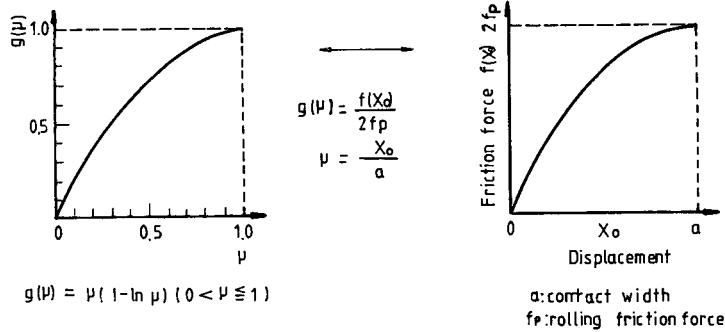
식 (4)에서 $\mu = X_o/a = 1$ 일 때 $g(\mu) = 1$ 이 되므로 Fig. 2와 같이 변위와 구름마찰력의 관계를 무차원화한 변위와 구름마찰력의 관계로 표현할 수 있으며 식 (4)를 이용하여 구름마찰력이 변화하는 접촉폭 내에서의 진동 즉 지수적 감쇠영역에서의 진동과 구름마찰력이 일정한 직선적 감쇠영역에서의 진동으로 분류하여 대수감쇠율을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- (1) 지수적 감쇠영역에서의 진동
($0 < X_o \leq a, 0 < \mu \leq 1$)

Fig. 3에서 한 접촉면에서 손실에너지 S 는 사선



(a) Hysteresis loop formed in a rolling contact region



(b) Rolling friction force-displacement curve within contact width(a)

Fig. 2 Hysteresis loop and rolling friction force-displacement curve

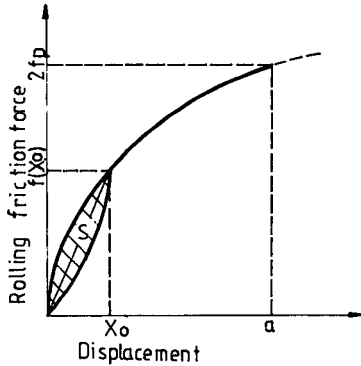


Fig. 3 Energy loss per one cycle in a rolling contact area ($0 < X_o \leq a$)

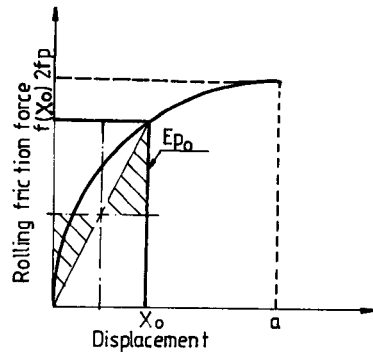


Fig. 4 Elastic energy per one cycle in a rolling contact area ($0 < X_o \leq a$)

친 부분의 면적과 같으므로 한 사이클을 수행하는 데 발생하는 계의 손실에너지 ΔE 는 다음과 같다.

$$\Delta E = 16S = 16 \times 2 \left\{ \int_0^{X_o} f(X_o) dX_o - \frac{1}{2} X_o f(X_o) \right\} = \frac{16f_p}{a} X_o^2 \quad (5)$$

Fig. 4에서 한 접촉면에서 한 사이클을 수행하는 데 필요한 탄성에너지 E_p 는 사선부의 면적과 같으므로 $X_o f(X_o)/4$ 가 되고 따라서 계의 전탄성에

너지 E_p 는 아래와 같다.

$$E_p = 16E_{p_o} = 16 \times \frac{1}{4} X_o f(X_o) = \frac{8f_p}{a} X_o^2 \left(1 - \ln \frac{X_o}{a} \right) \quad (6)$$

Fig. 5에서 스프링의 탄성에너지 E_k 는 사선부의 면적과 같다.

$$E_k = kX_o^2 \quad (7)$$

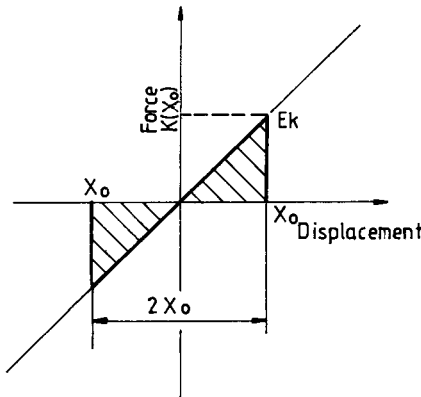


Fig. 5 Elastic energy of a compressive coil spring

따라서 식 (2)에 식 (5), (6), (7)를 대입하여 대수감쇠율을 무차원 변위 μ 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{\Delta E}{2(E_p + E_k)} = \frac{1}{1 + \alpha - \ln \mu} \quad (8)$$

상기식에서 $\alpha = ak/8f_p$ 로 무차원수이며 대수감쇠율 λ 는 무차원수 α 에 의해서 결정되므로 α 는 구름접촉거동의 감쇠특성을 결정하는 인자라할 수 있다.

(2) 직선적 감쇠영역에서의 진동 ($X_o \geq a, \mu \geq 1$)

한 사이클을 수행하는데 한 접촉면에서의 손실에너지 S 는 Fig. 6에서 사선부의 면적과 같으므로 전손실에너지 ΔE 는 $16S$ 가 되고 한 접촉면에서 평판의 탄성에너지가 E_p 이므로 전탄성에너지 E_p 는 $16E_p$ 가 되며 경계점 내·외에서 스프링의 탄성에너지는 식 (7)과 같다.

$$\Delta E = 16S = 16 \left\{ (X_o - a)2f_p + \frac{1}{2}a 2f_p \right\} = 16(2X_o - a)f_p \quad (9)$$

$$E_p = 16E_{p0} = 16 \times \frac{1}{4}X_o f(X_o) = 8af_p \quad (10)$$

따라서 식 (2)에서 식 (7), (9), (10)을 대입하여 대수감쇠율 λ 를 μ 의 함수로 표시하면

$$\lambda = \frac{\Delta E}{2(E_p + E_k)} = \frac{2\mu - 1}{1 - \alpha\mu^2} \quad (11)$$

Fig. 7는 α 를 인자로 하여 얻은 이론적인 $\lambda - \mu$ 곡선이며 μ 가 1보다 큰 값에서 대수감쇠율 λ 가 최대값을 나타내는 특성이 있고 α 가 증가하면 λ 는 감소하고 최대값의 위치가 $\mu=1$ 로 접근함을 알 수

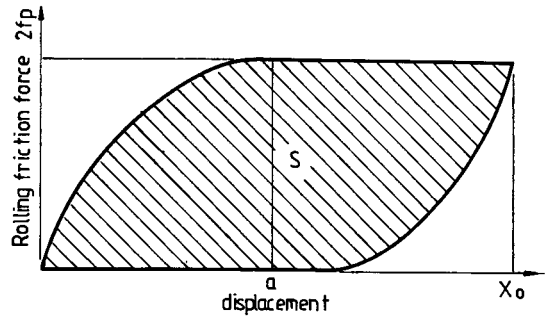


Fig. 6 Energy loss per one cycle in a rolling contact area ($X_o \geq a$)

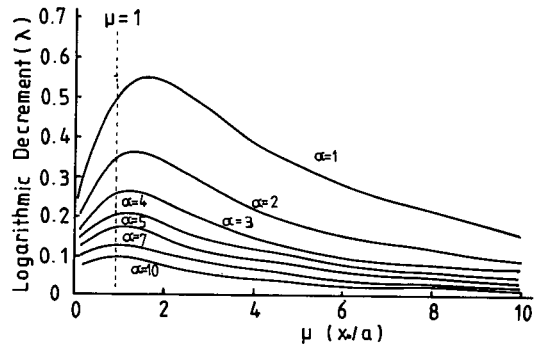


Fig. 7 Theoretical $\lambda - \mu$ curve

있다.

$\mu < 1 (X_o < a)$ 영역에서는 변위 X_o 의 증가에 따라 대수감쇠율 λ 가 증가하고 $\mu=1 (X_o=a)$ 인 점을 지나서 $\mu > 1 (X_o > a)$ 영역에서는 변위 X_o 의 증가에 따라 대수감쇠율 λ 가 증가하다가 최대값을 나타낸 후에 완만하게 감소하고 있음을 알 수 있다.

2.3 접촉폭(a)

실험에서 얻은 대수감쇠율-변위곡선을 통하여 접촉폭 a 를 구하고 Hertz의 탄성접촉 설계식에 의한 접촉폭 a_h 와 구름마찰의 역학적 해석에 의한 마찰 이론식에 대입하여 얻어진 접촉폭 a_f 와 비교하고자 한다.

(1) 실험에서 얻은 감쇠파형으로부터 직선적 감쇠에서 지수적 감쇠로 변화하는 경계점을 정확하게 알 수 없으므로 구름마찰력이 일정한 영역 ($X_o \geq a, \mu \geq 1$)에서 대수감쇠율을 나타내는 식 (11)을 미분하여 미분계수가 0일 때 대수감쇠율이 최대값을 갖게 되므로 이때의 무차원변위 μ 를 μ_m , 변위

X_0 를 X_m 이라 하면 접촉폭 a 를 X_m 과 f_p 의 함수로 표시할 수 있으므로 접촉폭 a 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} d\lambda/d\mu &= 2(1 + \alpha\mu - \alpha\mu^2)/(1 + \alpha\mu^2)^2 \\ 1 + \alpha\mu_m - \alpha\mu_m^2 &= 0 (\mu_m = X_m/a, \quad a = ak/8f_p) \\ a &= k X_m^2 / (8f_p + kX_m) \end{aligned} \quad (12)$$

(2) Hertz의 탄성 접촉설계식⁽²³⁾에 의한 접촉폭 a_h 는 다음과 같다.

$$a_h = 2^3 \sqrt{3Pr/4E^*}$$

(3) 역학적 해석에 의한 구름마찰력 이론식에 의한 접촉폭 a_f 는 다음과 같다.

$$a_f = 4f_p r (\sin\theta + \mu_s \cos\theta) / P_1$$

3. 실험장치와 실험방법

3.1 실험장치

Fig. 8과 Fig. 9는 실험장치와 실험장치의 개략도를 나타낸 것이다. 지반과 정반, 정반과 베이스 ⑦, 베이스 ⑦과 하부의 시편용 평판 ③ 사이에 방진용 고무를 삽입하여 외부로부터 진동을 차단하였다. 압축코일스프링 ⑩을 평판과 평행이 되도록 설치하고 상부의 시편용 평판 ②에 하부의 하중용 평판 ④를 볼트로서 고정한 후 하부의 하중용 평판 끝에 변위 검출판 ⑥을 볼트로서 고정하였고 하중

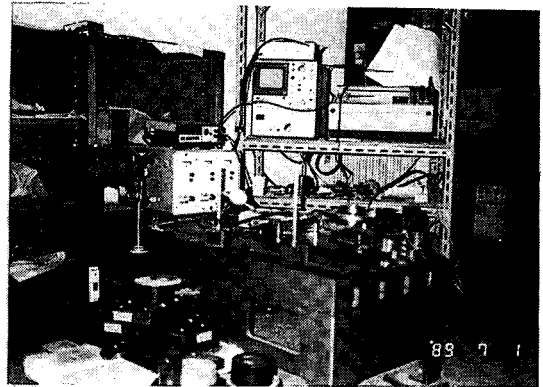
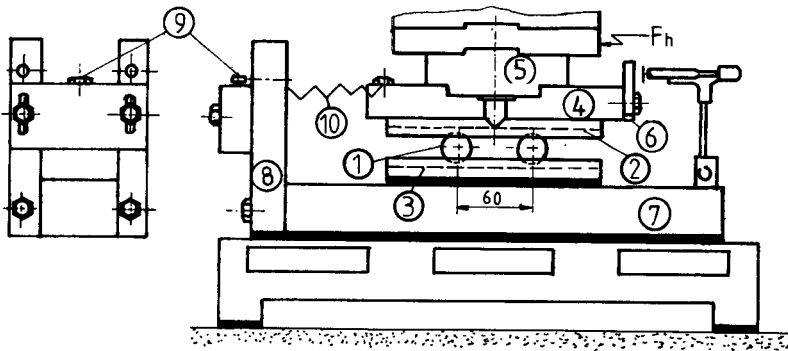


Fig. 8 Photograph of experimental apparatus

이 볼에 균일하게 전달되도록 하부의 하중용 평판 ④ 위에 홈을 파고 상부의 하중용 평판 ⑤를 고정 한 다음 상부로 갈수록 하중용 평판을 큰 것으로 올려 놓아 가면서 49N에서 245N까지 49N씩 5단계로 하중변화를 줄 수 있도록 하중용 평판을 설계, 제작하여 사용하였다.

또한 90° V-노치를 낸 상·하부의 시편용 평판 사이에 60mm 간격으로 4개의 볼 ①을 끼워 넣고 상부의 시편용 평판 상에 걸쳐서 고정되어 있는 가장 상부의 하중용 평판 끝에서 순간적으로 수평력을 가하므로써 감쇠파형을 얻을 수 있도록 하였다.



1	ball	6	displacement detection plate
2	upper plate specimen	7	base
3	lower plate specimen	8	supporting bar
4	lower plate for normal load	9	spring fixing bolt
5	upper plate for normal load	10	compressive coil spring

Fig. 9 Schematic diagram of experimental apparatus

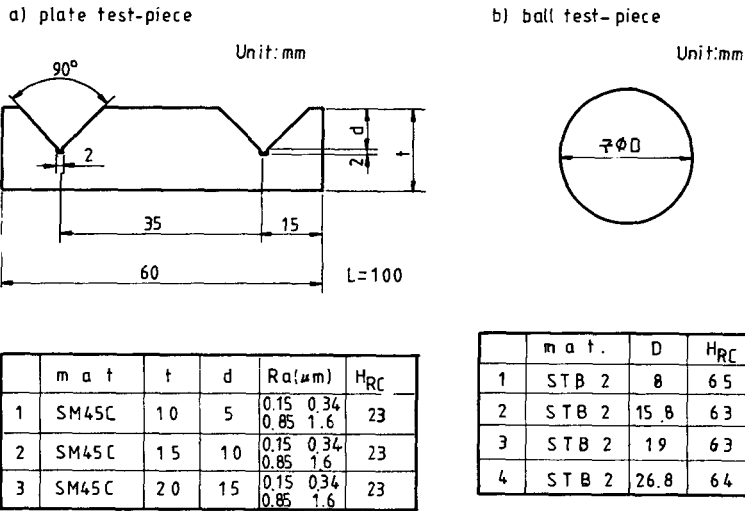


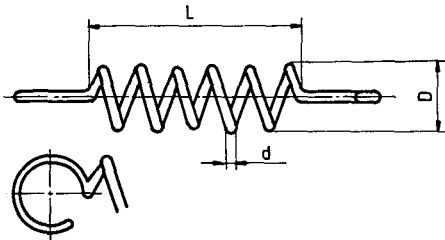
Fig. 10 Specimens for rolling contact experiment

Fig. 10은 본 실험에 사용된 90° V-노치가 파져 있는 시편용 평판과 볼의 크기, 재질, 경도 및 표면거칠기를 나타낸 것으로 직경이 8mm, 15.8mm, 19mm, 26.8mm 볼의 크기에 따라 평판에 가공된 브이형 홈의 깊이 *d*와 평판의 두께 *t*를 3단계로 변화시켜 제작한 다음 브이형 홈의 면을 볼의 직경에 따라서 표면거칠기를 1.6μm, 0.85μm, 0.34μm,

0.15μm와 같이 4단계로 각각 바꾸어 가공하여 시편용 평판으로 사용하였다.

시편용 평판과 볼의 재질은 각각 기계구조용강(SM45C)과 고탄소크롬 베어링강(STB2)을 이용하였다.

Table 1 Compressive coil springs for the measurement of logarithmic decrement



	k (N/mm)	L (mm)	D (mm)	d (mm)
No. 1	1.92	40	17.8	1.6
No. 2	3.94	36	18.6	2.0
No. 3	8.54	38	17.8	2.3
No. 4	9.9	30	17.8	2.3
No. 5	19.6	45	23.5	3.5

Table 1과 같은 5종의 압축코일스프링이 본 실험을 통하여 얻고자 하는 감쇠파형에 미치는 영향을 조사하기 위해서 Fig. 11과 같은 측정장치를 통해 예비 실험을 행하였다. 압축코일스프링의 상단을 볼트로 고정하고 하단에 5종의 압축코일스프링에 대한 비례한계 이내의 하중체인 15N의 원기둥 추를 매달아 0.1mm 정도의 초기변위를 주어서 코일스프링 내부의 마찰손실로 인하여 감쇠자유진동하는 원기둥 추의 변위를 비접촉 변위계로 측정하

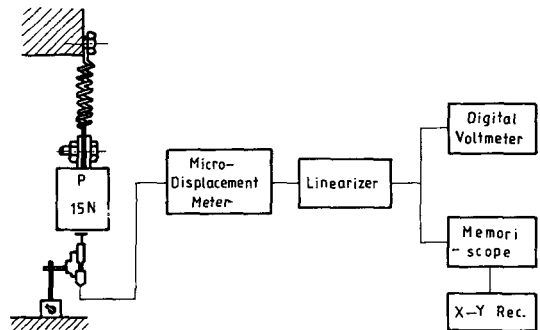


Fig. 11 Measuring apparatus of spring damping

고 감쇠파형을 X-Y 레코더에 기록시킨 다음 100 사이클 간격의 진폭을 계산해서 대수감쇠율을 구하여 본 결과 진폭 300 μ m 이내의 자유진동에서는 1×10^{-3} 정도로 본 실험에서 얻은 대수감쇠율의 5% 미만이었으므로 압축코일스프링에 의한 감쇠영향을 무시하였다. 본 실험에서는 스프링상수가 19.6 N/mm(No. 5)인 압축코일스프링을 사용하였다.

3.2 실험방법

Fig. 12는 감쇠자유진동 실험장치로부터 감쇠파형을 얻기 위한 측정장치의 개략도를 나타낸 것이다.

건마찰을 유도하기 위해서 불과 V형 홈의 평면부를 청정제(trichloroethylene)로 깨끗이 닦아내고 볼의 크기에 따라 시편용 평판을 선택한 후에 V형 홈의 평면부 거칠기를 4단계로 바꾸어 실험을 행하였다.

비접촉변위계의 프루브와 변위검출판과의 간격을 1mm로 하고 플라스틱망치로 0.5mm이내의 초기변위를 주어 자유진동 감쇠파형을 얻었다.

프루브(MDG-41)를 통한 신호는 비접촉변위계(MD-31)와 리니어라이저(LA-1)를 거쳐 디지털볼트미터(TR-2112)와 메모리스코우프(VC-801L)를 통해 X-Y레코더(type 3030)로 기록되도록 하였다.

기록된 감쇠파형에서 진동이 접촉폭보다 큰 범위에서 일어날 때는 일정한 구름마찰력이 생기기 때문에 파형은 직선적 감쇠를 나타내며 접촉폭내에서

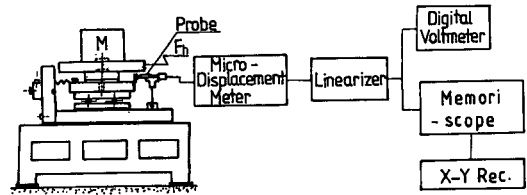


Fig. 12 Schematic diagram of measurement apparatus

진동으로 변하면 구름마찰력은 변위 의존성을 나타내는 지수적 감쇠를 하게 된다. 실험에서 얻은 감쇠파형중 직선적 감쇠를 하는 영역에서 ΔX_o 가 쉽게 얻어지므로 2.1절에 제시한 $f_p = k \Delta X_o / 128$ 에 대입하여 구름마찰력 f_p 를 얻었다.

또한 접촉폭 a 는 식 (12)에 의하여 X_m 과 f_p 의 함수로 표시되므로 감쇠파형으로부터 얻은 $\lambda - X_o$ 곡선 상에서 λ 가 최대치를 취할 때의 변위 X_m 값을 대입해서 접촉폭 a 를 얻었다.

4. 결과 및 고찰

4.1 구름마찰력

감쇠자유진동 운동방정식의 해로부터 진동이 접촉폭 a 보다 큰 영역($X_o \geq a, \mu \geq 1$)에서 일어날 때는 일정한 구름마찰력 $f_p = k \Delta X_o / 128$ 가 생기기 때문에 실험에서 얻은 감쇠파형 중 직선적 감쇠를 하는 영역에서 평판의 표면거칠기 R_a , 볼의 직경

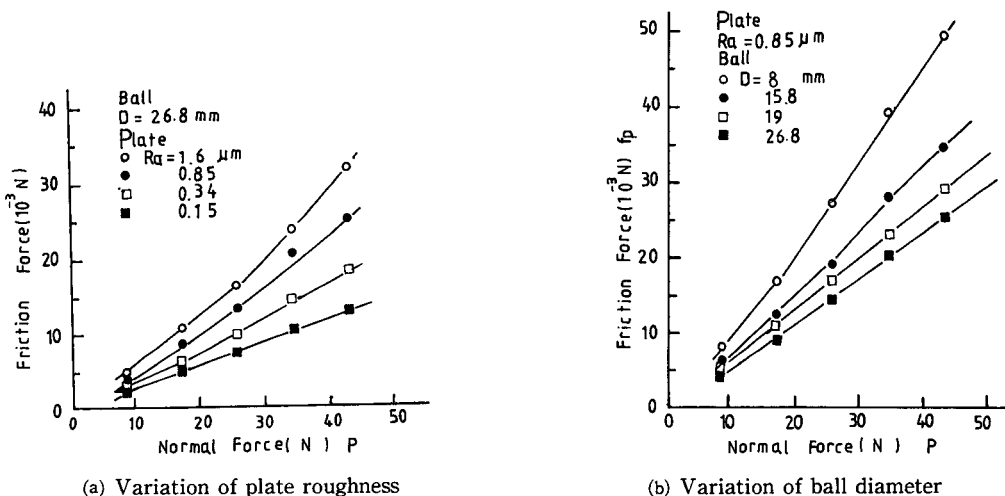


Fig. 13 Relation between normal force and rolling friction force according to variation of plate roughness and ball diameter

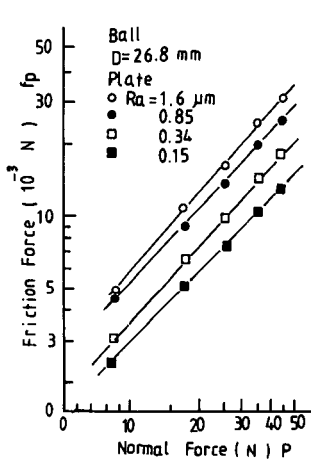
D 및 한 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력 P 의 변화에 따라서 나타나는 일정한 변위 변화량 ΔX_0 에 대한 구름마찰력 f_p 가 변화하는 관계를 도示하였다.

한 접촉면에서의 구름마찰력 f_p 에 영향을 미치는 D , R_a 및 P 와 같은 인자들 중에서 1개의 인자를 차례로 고정하고 나머지 2개의 인자들을 동시에 변화시킴으로써 접촉폭 a 에 관계하는 인자 f_p 를 구하고 f_p 와 D , R_a 및 P 의 관계를 찾았다.

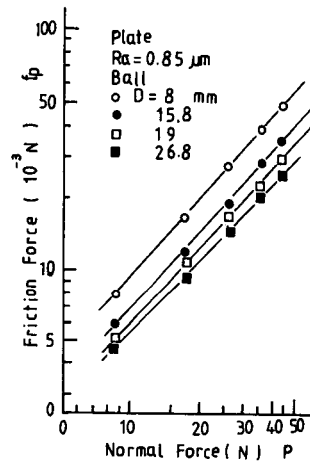
한 예로서 P 가 f_p 에 미치는 영향을 고찰하기 위해서 R_a 를 고정인자로 하여 즉 $0.15\mu\text{m}$, $0.34\mu\text{m}$,

$0.85\mu\text{m}$, $1.6\mu\text{m}$ 를 차례로 고정하고 D 의 변화에 따른 f_p 와 P 의 관계를 검토한 결과 기울기 f_p/P 의 변화가 1% 미만이었기 때문에 무시하고 4가지의 결과 중 한 가지의 경우를 취하여 분석하였다.

평판의 표면거칠기와 볼의 직경변화에 따른 법선력과 구름마찰력의 관계를 각각 나타낸 것이 Fig. 13이다. 평판의 표면거칠기가 구름마찰력에 미치는 영향을 조사한 것이 Fig. 13(a)이며 볼의 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력이 증가하고 평판의 표면거칠기가 증가할수록 구름마찰력이 큰 변화 폭으로 증가하고 있음을 나타내고 있고 볼의 직경변화가

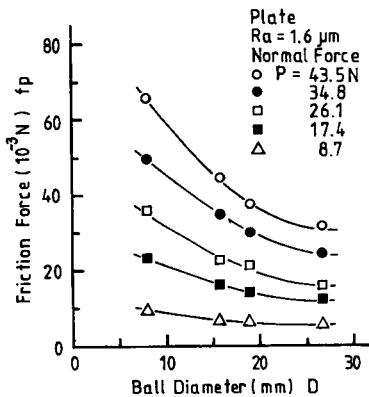


(a) Variation of plate roughness

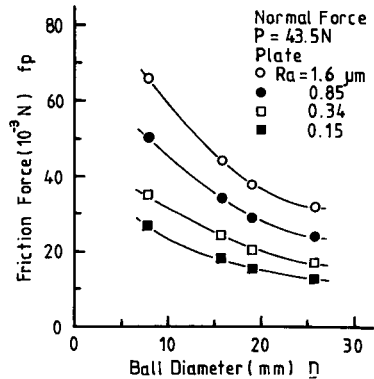


(b) Variation of ball diameter

Fig. 14 Relation between normal force and rolling friction force according to variation of plate roughness and ball diameter in logarithmic plane



(a) Variation of normal force



(b) Variation of plate roughness.

Fig. 15 Relation between ball diameter and rolling friction force according to variation of normal force and plate roughness

구름마찰력에 미치는 영향을 나타낸 Fig. 13(b)는 법선력이 증가하고 볼의 직경이 감소할수록 구름마찰력이 큰 변화 폭으로 증가하는 현상을 나타내고 있다.

평판의 표면이 거칠어지고 볼의 직경이 감소할수록 법선력이 증가함에 따라서 구름마찰력의 변화 폭이 증가하는 현상을 고찰하기 위해서 로그 평면에 옮겨 본 결과가 Fig. 14이다. Fig. 14로부터 구름마찰력 f_p 가 법선력 P 의 1~1.14승에 비례하는 관계를 얻을 수 있었다.

표면거칠기와 법선력을 각각 고정인자로 해서 법선력 및 표면거칠기의 변화에 따라서 볼의 직경과 구름마찰력의 관계를 도시한 그래프가 Fig. 15이다. Fig. 15(a)는 볼의 직경이 증가하고 법선력이 증가할수록 구름마찰력의 변화 폭이 감소하고 있음을 나타내며 Fig. 15(b)는 평판의 표면거칠기가 증가하고 볼의 직경이 감소할수록 구름마찰력의 변화 폭이 증가하고 있음을 나타내고 있다. 법선력이 증가하고 평판의 표면이 거칠어짐에 따라서 볼의 직경이 증가하면 구름마찰력의 변화 폭이 감소하고

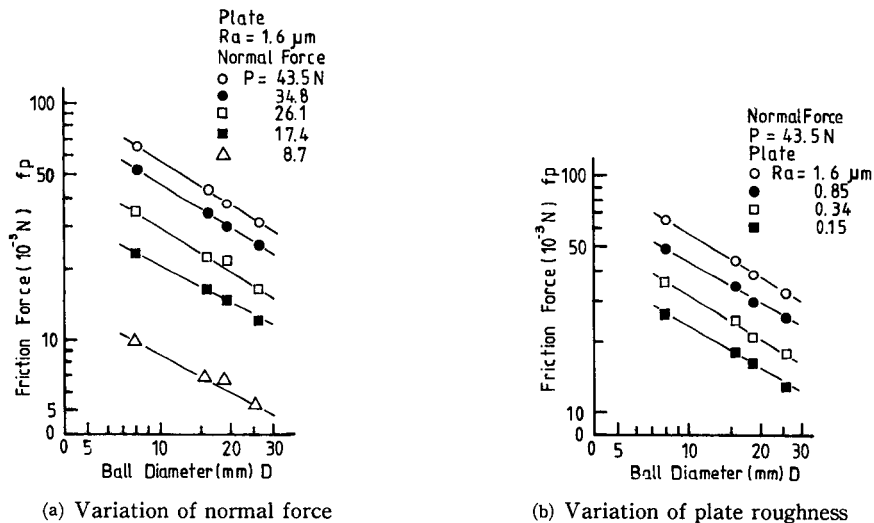


Fig. 16 Relation between ball diameter and rolling friction force according to variation of normal force and plate roughness in logarithmic plane

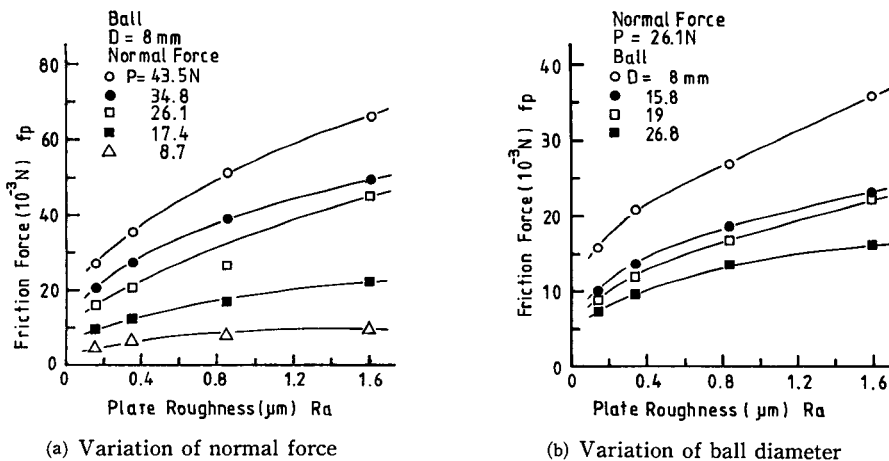


Fig. 17 Relation between plate roughness and rolling friction force according to variation of normal force and ball diameter

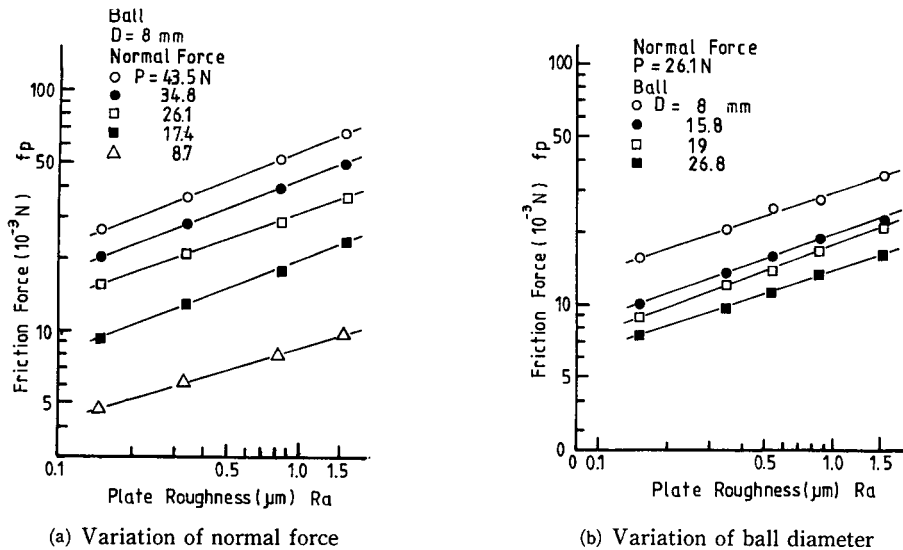


Fig. 18 Relation between plate roughness and rolling friction force according to variation of normal force and ball diameter in logarithmic plane

볼의 직경이 감소하면 구름마찰력의 변화폭이 증가하는 현상을 Fig. 16과 같은 로그 평면에 옮겨서 구름마찰력 f_p 가 볼의 직경 D 의 0.52~0.60승에 반비례하는 관계를 얻었다.

다음에 구름마찰력과 표면거칠기의 관계를 찾기 위해서 Fig. 17과 같이 법선력 및 볼의 직경변화에 따라서 표면거칠기와 구름마찰력의 관계를 도시하였다. 볼의 직경과 법선력을 각각 고정인자로 하여 법선력과 볼의 직경을 변화시킬 경우 평판의 표면거칠기의 변화에 따른 구름마찰력의 변화 폭이 일정하지 않음으로 Fig. 18과 같은 로그평면을 이용하여 그 관계를 찾아 본 결과 구름마찰력 f_p 가 표면거칠기 R_a 의 0.4~0.45승에 비례하였다.

이상의 내용을 종합하면 구름마찰력 f_p 는 법선력 P , 볼의 직경 D 와 평판의 표면거칠기 R_a 의 지수승의 변화 폭에 의해 다음과 같은 관계로 표시된다.

$$f_p \propto P^m \cdot D^{-n} \cdot R_a^1$$

($m=1\sim 1.14, n=0.52\sim 0.60, 1=0.4\sim 0.45$)

4.2 대수감쇠율(λ)

대수감쇠율에 영향을 미치는 볼의 직경 D , 평판의 표면거칠기 R_a 및 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력 P 와 같은 인자들 중에서 2개의 인자를 차례로 고정하고 나머지 1개의 인자를 변화시켜서 대수감쇠율과 변위의 관계를 구한 다음 이러한 관계

로부터 구름접촉 면에서의 감쇠특성 및 구름접촉거동을 조사하고 λ 가 최대값을 갖을 때의 변위 X_m 을 읽어서 새로 제시한 접촉폭 계산식에 이용하였다.

Fig. 19는 법선력 P 와 볼의 직경 D 를 고정인자로 하여 평판의 표면거칠기 R_a 의 변화에 따른 대수감쇠율 λ 와 변위 X_o 의 관계를 나타낸 그래프로 R_a 가 증가할수록 변위의 증가와 더불어 대수감쇠율 λ 가 증가하고 λ 가 최대값을 나타내는 변위 X_m 이 증가하고 있다.

본 실험의 하중조건 하에서는 표면거칠기 R_a 가 커짐에 따라서 평판 상의 미소돌기의 탄·소성 변

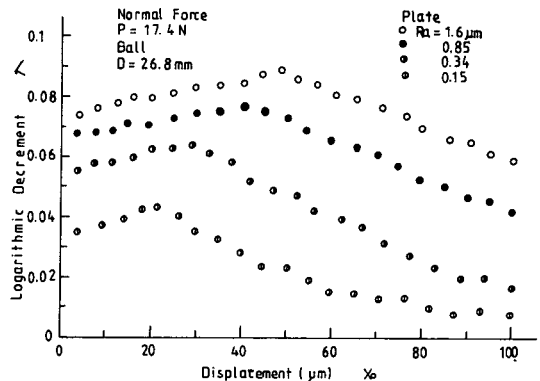


Fig. 19 $\lambda-X_o$ curve according to variation of roughness

형으로 인하여 구름접촉 면의 접촉폭 a 가 증가하고 응력분포가 횡 방향으로 넓어지기 때문에 구름마찰력 f_p 가 증가하고 접촉면에서의 손실 에너지 S 가 증가하여 대수감쇠율 λ 가 크게 되므로써 표면 거칠기 R_a 가 클수록 접촉기구의 수명도 짧아지게 될 것이다⁽²⁴⁾.

접촉폭 내·외에서 대수감쇠율을 나타내는 식 (8)과 (11)에서 f_p 는 R_a 에 비례하므로 f_p 가 커져서 감쇠특성을 결정짓는 무차원 인자 $\alpha = ak/8f_p$ 가 감소하므로써 대수감쇠율 λ 가 따라서 증가하게 될 수 있으므로 구름접촉 피로 수명을 검토하는데 인자로 이용할 수도 있다고 생각된다.

또한 λ 가 최대값을 보일 때의 변위 X_m 이 증가함에 따라서 접촉폭 a 가 커지고 α 값이 10~13 사이에 있으며 α 의 증가에 따라 최대점의 위치가 접촉폭 a 근방으로 접근하므로 이론적인 $\lambda-\mu$ 곡선과 같은 경향을 보이고 있다. 그러나 R_a 의 변화가 대수감쇠율 λ 에 미치는 영향은 P 와 D 에 비해서 적고 변위 $100\mu\text{m}$ 에 대해서 거칠기 변화에 따른 대수감쇠율이 0.09를 밑도는 값이라는 것을 알 수 있다.

Fig. 20은 평판의 표면거칠기 R_a 와 한 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력 P 를 고정인자로 하여 볼의 직경 D 의 변화에 따른 대수감쇠율 λ 와 변위 X_o 의 관계를 나타낸 것으로 볼의 직경 D 가 증가할수록 대수감쇠율 λ 는 감소하고 λ 가 최대값을 나타낼 때의 변위 X_m 는 볼의 직경 D 가 감소할수록 증가하는 현상을 나타내고 있다.

감쇠특성을 결정짓는 무차원 인자 α 값은 2~11 사이에 있으며 α 가 증가할수록 λ 가 최대값을 보일 때의 변위 X_m 는 미소하게 감소하여 접촉폭 근방으로 접근하고 있으며 이론적인 $\lambda-\mu$ 곡선과 같은 경향을 보이고 있다.

볼의 직경 D 가 증가하면 앞 절에서 검토한 바와 같이 구름마찰력 $f_p \propto 1/D^n$ 하므로 구름마찰력 f_p 가 감소하고 λ 가 최대값을 보일 때의 변위 X_m 의 증가율이 구름마찰력 f_p 의 감소율을 따르지 못하므로 접촉폭 계산식 (12)에서 알 수 있는 바와 같이 접촉폭 a 는 증가하고 대수감쇠율 λ 와 볼의 직경 D 는 반비례적인 관계에 있다.

Fig. 21는 볼의 직경 D 와 평판의 표면거칠기 R_a 를 고정인자로 하여 한 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력 P 의 변화에 따른 대수감쇠율 λ 와 변위 X_o 의 관계를 나타낸 그래프로 법선력 P 의 증가에 따라 대수감쇠율 λ 가 증가하고 있으며 λ 가 최대값

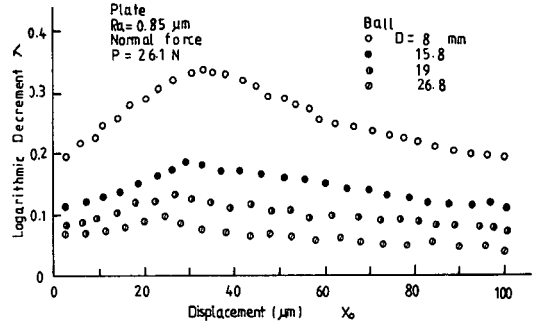


Fig. 20 $\lambda-X_o$ curve according to variation of ball diameter

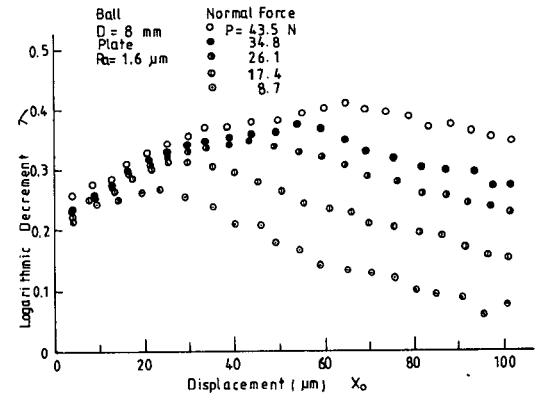


Fig. 21 $\lambda-X_o$ curve according to variation of normal force

을 보일 때의 변위 X_m 이 증가하고 있다.

감쇠특성을 결정짓는 무차원수 α 는 1.5~2.5 사이에 있으며 α 가 감소할수록 X_m 이 증가하고 있다. $\alpha = ak/8f_p$ 에서 α 는 접촉폭 a 에 비례하고 구름마찰력 f_p 에 반비례하므로 법선력 P 가 증가하면 구름마찰력 f_p 는 P^m 에 비례적으로 증가하므로 α 의 증가율이 f_p 의 증가율을 따르지 못하여 결국 법선력 P 가 증가할수록 대수감쇠율 λ 가 증가하여 접촉폭 a 가 증가한다.

λ 의 감소에 따라 α 가 증가하고 X_m 의 위치가 접촉폭 a 근방으로 접근하므로 이론적인 $\lambda-\mu$ 곡선과 같은 경향을 보이고 있으며 변위 $100\mu\text{m}$ 에 대해서 법선력 변화에 따른 대수감쇠율이 0.41이하의 값으로 직경변화가 대수감쇠율에 미치는 영향과는 큰 차이가 없으나 거칠기 변화가 대수감쇠율에 미치는 영향과 비교하면 큰 차이가 있다.

4.3 접촉폭(a)

실험에서 얻은 $\lambda-X_0$ 곡선 상에서, 구름마찰력 f_p 가 일정한 값을 취하는 영역($X_0 \geq a, \mu \geq 1$)에서 λ 가 최대값을 보일 때의 변위 X_m 을 읽어서 접촉폭 a 에 영향을 미치는 볼의 직경 D , 평판의 표면거칠기 R_a 및 접촉면에 수직으로 작용하는 법선력 P 와 같은 인자들 중에서 1개의 인자를 고정인자로 차례로 바꾸어 가면서 나머지 2개의 인자들을 동시에 변화시키기에 따라서 변화하는 접촉폭 a 와의 관계를 고찰하였다.

Fig. 22는 볼의 직경 D 와 표면거칠기 R_a 를 변화시키기에 따라서 변화하는 법선력 P 와 접촉폭 a 의 관계를 각각 도시한 것이다.

볼의 직경 D 를 변화시킬 때 접촉폭 a 에 미치는 영향을 조사하기 위해서 R_a 가 $0.15\mu\text{m}, 0.34\mu\text{m}, 0.85\mu\text{m}, 1.6\mu\text{m}$ 중 차례로 1개의 인자를 고정인자로 하여 D 를 8mm에서 26.8mm까지 4단계로 P 를 8.7N에서 43.5N까지 5단계로 증가시켜서 접촉폭 a 의 크기를 나타낸 다음 D 가 8mm, 15.8mm, 19mm, 26.8mm중 차례로 1개의 인자를 고정인자로 하여 R_a 를 $0.15\mu\text{m}$ 에서 $1.6\mu\text{m}$ 까지 4단계로 P 를 8.7N에서 43.5N까지 단계로 증가시켜서 접촉폭 a 의 크기를 나타냈다. 표면거칠기 R_a 와 볼의 직경 D 를 각각 고정인자로 하여 접촉폭과 하중의 관계를 검토

한 결과 a/P 의 기울기가 거의 동일 하였기 때문에 하나의 예시로서 R_a 가 $0.85\mu\text{m}$ 일 때 D 의 변화에 따른 a 와 P 의 관계 및 D 가 26.8mm일 때 R_a 의 변화에 따른 a 와 P 의 관계를 도시한 것이 Fig. 22(a) 및 Fig. 22(b)이다.

R_a 와 D 를 고정인자로 하고 D 와 R_a 를 각각 변화시켰을 때 P 가 a 에 미치는 영향을 자세히 고찰하기 위해서 이러한 관계를 Fig. 23과 같은 로그 평면에 옮겨 본 결과 접촉폭 a 는 법선력 P 의 0.81~0.87승에 비례하였다.

평판의 표면거칠기 R_a 와 법선력 P 를 각각 고정인자로 하여 법선력 P 와 표면거칠기 R_a 를 변화시키기에 따라서 볼의 직경 D 와 접촉폭 a 의 관계를 나타낸 것이 Fig. 24이다.

앞에서 P 와 a 의 관계를 찾기 위한 방법과 같이 표면거칠기 R_a 와 법선력 P 를 각각 고정인자로 하여 접촉폭 a 와 볼의 직경 D 의 관계를 검토한 결과 a/D 의 기울기가 거의 동일하였기 때문에 이들 중 하나의 예시로서 $R_a=1.6\mu\text{m}$ 일 때 P 의 변화에 따른 a 와 D 의 관계 및 $P=43.5\text{N}$ 일 때 R_a 의 변화에 따른 a 와 D 의 관계를 각각 도시한 것이 Fig. 24(a) 및 (b)이다.

R_a 와 P 를 고정인자로 하고 P 와 R_a 를 각각 변화시켰을 때 볼의 직경 D 가 a 에 미치는 영향을

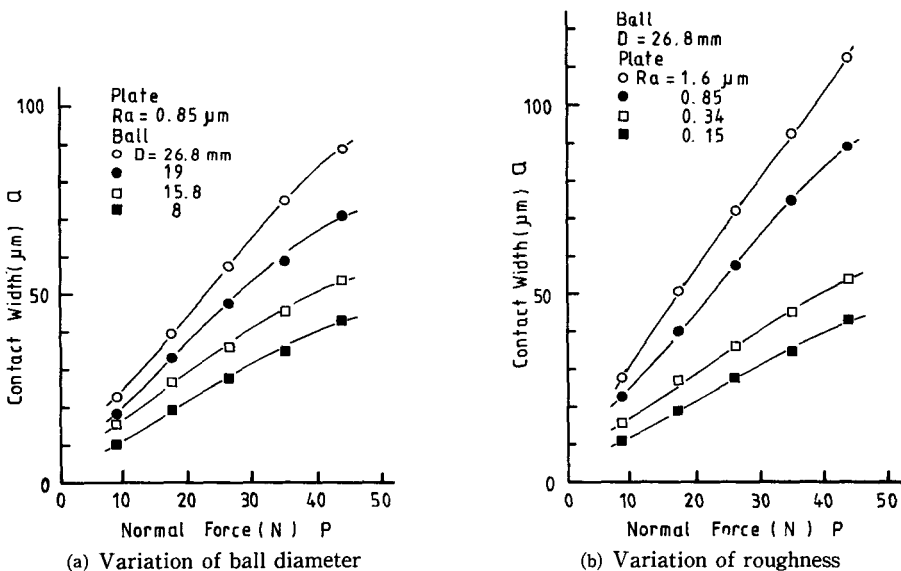


Fig. 22 Relation between contact width and normal force according to Variation of ball diameter and plate roughness

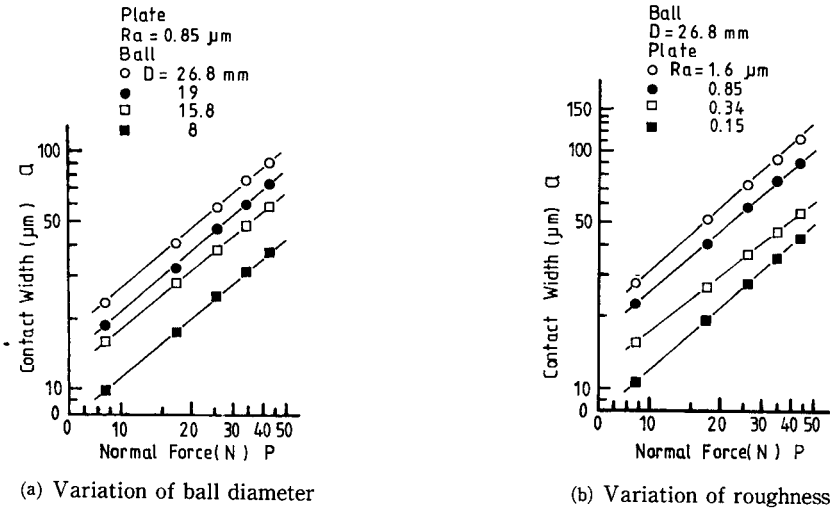


Fig. 23 Relation between contact width and normal force according to variation of ball diameter and plate roughness in logarithmic plane

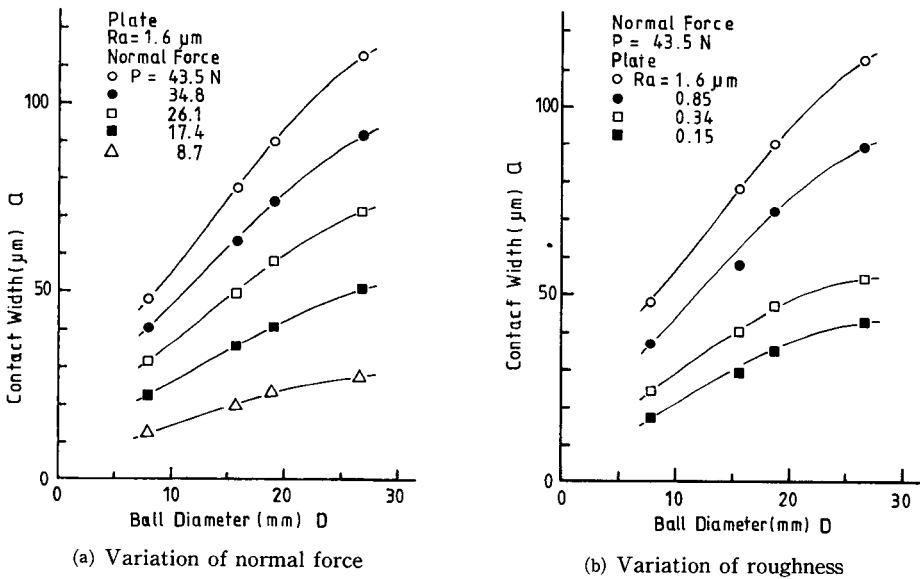


Fig. 24 Relation between contact width and ball diameter according to variation of normal force and roughness

상세히 고찰하기 위해서 이러한 관계를 Fig. 25와 같은 로그 평면에 나타낸 결과 접촉폭 a 가 볼의 직경 D 의 0.62~0.78 승에 비례하였다.

볼의 직경 D 와 법선력 P 를 각각 고정인자로 하여 법선력 P 와 볼의 직경 D 의 변화에 따른 표면 거칠기 R_a 와 접촉폭 a 의 관계를 도시한 것이 Fig. 26이다.

D 와 P 를 각각 고정인자로 하여 접촉폭 a 와 표

면거칠기 R_a 의 관계를 검토한 결과 a/R_a 의 기울기가 거의 동일하였기 때문에 이들 중 하나의 예시로서 D 가 8mm일 때 P 의 변화에 따른 a 와 R_a 의 관계 및 법선력 P 가 26.1N일 때 a 와 R_a 의 관계를 Fig. 26(b)에 나타냈다. 이때 a 와 R_a 의 관계를 찾을 수 없었으므로 Fig. 27과 같은 로그 평면에 a 와 R_a 의 관계를 옮겨 본 결과 옮겨 본 결과 접촉폭 a 가 평면의 표면거칠기 R_a 의 0.31~0.35 승에

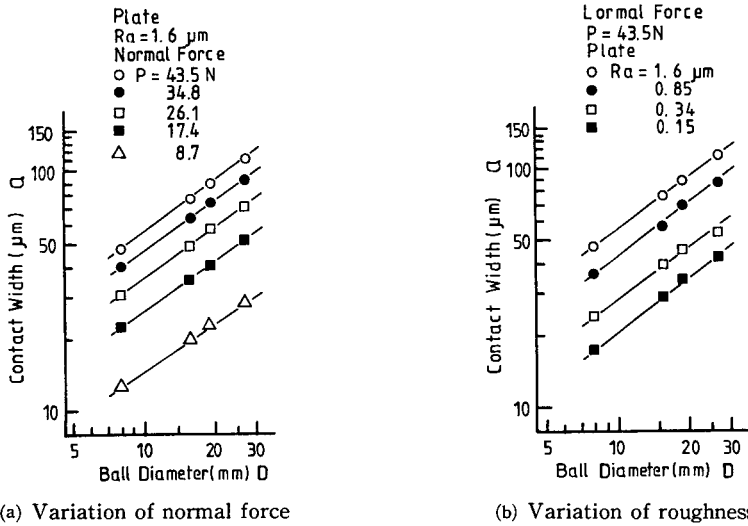


Fig. 25 Relation between contact width and ball diameter according to variation of normal force and roughness in logarithmic plane

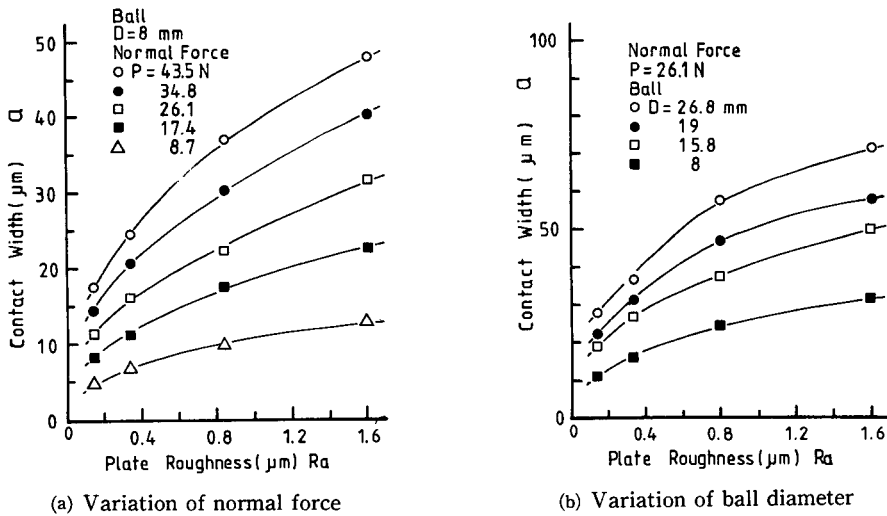


Fig. 26 Relation of plate roughness with contact width according to variation of normal force and ball diameter

비례하였다.

이상의 내용을 종합하면 접촉폭 a 는 법선력 P , 볼의 직경 D 와 평판의 표면거칠기 R_a 의 지수 승의 변화 폭에 의해 다음과 같은 관계로 표시할 수 있다.

$$a \propto P^m \cdot D^n \cdot R_a^l$$

($m=0.8 \sim 0.87$, $n=0.6 \sim 0.77$, $l=0.31 \sim 0.35$)

Fig. 28는 본 실험에 의해 제시한 새로운 접촉폭

산출방법에 의해서 얻어진 접촉폭 a 를 Hertz이론식에 의한 접촉폭 a_h 와 구름마찰력 이론으로부터 구한 접촉폭 a_f 를 비교하여 도시하였다.

표면거칠기 R_a , 볼의 직경 D 및 법선력 P 의 변화에 따른 접촉폭 a 와의 관계에서 D 를 고정인자로 하여 R_a 를 변화시킬 때 a 와 P 의 관계 중 하나의 예시로서 직경 26.8mm의 볼로 표면거칠기가 1.6 μm와 0.15 μm일 때의 평판을 8.7N에서 43.5N

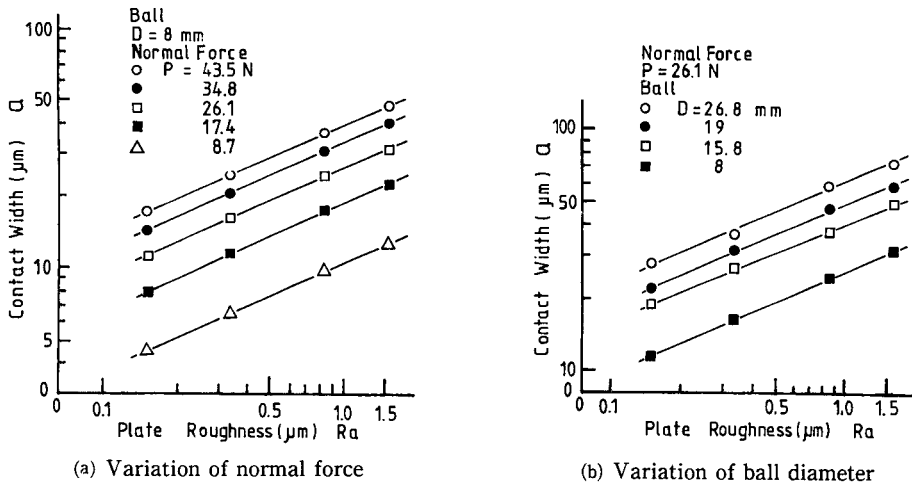


Fig. 27 Relation of plate roughness with contact width according to variation of normal force and ball diameter in logarithmic plane

까지 4단계로 법선력 변화를 주면서 자유진동 시켰을 경우 각각 얻어진 접촉폭 a 를 Hertz이론식에 의한 접촉폭 a_h 와 구름마찰 이론식으로부터 얻어진 접촉폭 a_f 를 비교한 결과 $a_h > a > a_f$ 순으로 되었다.

Hertz이론에 의한 접촉폭 a_h 는 정적인 상태에서 표면거칠기를 무시한 탄성에 의한 값이므로 평판의 표면거칠기를 고려한 동적인 상태에서 구한 접촉폭 a 에 비해서 현저하게 크다. 실험에 의한 접촉폭 a 가 법선력 8.7N과 43.5N하에서 각각 a_h 의 1/6.4, 1/2.7배로 저하중에서 고하중으로 갈수록 Hertz접

촉폭에 접근하는 이유는 접촉폭의 크기를 결정하는 P 와 D 의 지수 승의 변화에도 영향이 있겠으나 평판의 표면거칠기 R_a 의 영향이 지배적인 것으로 생각되며 비례한계 내의 저하중으로 갈수록 표면 미소돌기의 탄·소성 변형으로 인하여 접촉면적이 증가하므로 a_h 와 이탈되는 경향⁽²⁵⁾은 동적인 상태 하에서도 동일하게 나타났다.

실험에 의해서 얻은 구름마찰력과 정지마찰계수를 역학적 해석에 의한 구름마찰 이론식에 대입하여 얻은 접촉폭 a_f 는 법선력이 증가함에 따라 접촉폭을 결정짓는 인자들의 지수승에 비례하여 증가하는 a 와 변화폭이 증가하고 있다.

그러나 구름접촉을 하고 있는 동적인 상태에서 실험에 의하여 접촉폭을 얻어 낸 보고서를 찾아 볼 수가 없었기 때문에 본 실험을 통하여 새롭게 제시한 접촉폭 산출 값이 맞는가 하는 판정을 하기가 어렵다.

5. 결 론

압축코일스프링을 이용한 감쇠자유진동 시스템으로부터 얻어진 감쇠파형의 해석을 통하여 이상적인 강체구와 표면거칠기를 고려한 평판의 접촉거동에 대해 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 이론적인 $\lambda-\mu$ 곡선과 실험을 통하여 얻은 $\lambda-X_0$ 곡선이 잘 부합되고 $\mu=1$ 보다 큰 값에서 대수감쇠율 λ 가 최대값을 가지며 감쇠특성을 결정하

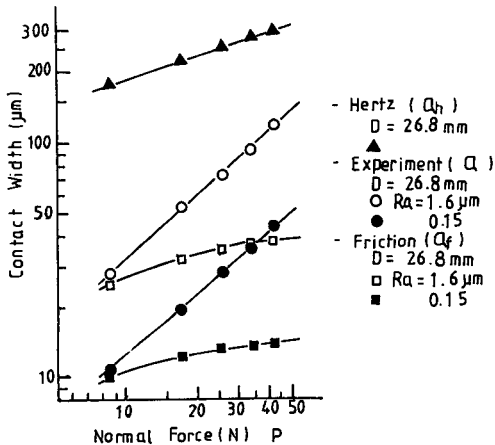


Fig. 28 Comparison of contact width (a , a_h , a_f)

는 무차원인자 α 와 대수감쇠율 λ 는 반비례적인 관계를 갖고 대수감쇠율 λ 가 최대가 되는 지점의 변위 X_m 과 이때의 상당 구름마찰력 f_p 는 일정하므로 식 (12)와 같이 접촉폭 a 는 X_m 과 f_p 의 함수로 표시 되므로써 실험에 의한 새로운 접촉폭 산출방법을 제시했으며 a_h 와 a_f 를 비교한 결과 접촉폭은 $a_h > a > a_f$ 순으로 작아지고 있다.

(2) 구름마찰력 f_p 와 접촉폭 a 에 영향을 미치는 인자를 법선력 P , 볼의 직경 D 및 평판의 표면거칠기 R_a 로 제한했을 때 구름마찰력 f_p 와 접촉폭 a 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$f_p \propto P^m \cdot D^{-n} \cdot R_a^1$$

$$(m=1\sim 1.14, n=0.52\sim 0.60, 1=0.4\sim 0.45)$$

$$a \propto P^m \cdot D^n \cdot R_a^1$$

$$(m=0.81\sim 0.87, n=0.62\sim 0.78, 1=0.31\sim 0.35)$$

참 고 문 헌

- (1) 정세희, 1983, "공업역학", 동명사, 서울, p.108.
- (2) Horst Czichos, 1978, "Tribology", Elsevier, Amsterdam, p.82.
- (3) Rabinowicz, E., 1965, "Friction and Wear of Materials", John Wiley and Sons, Inc., New York, pp.82~103.
- (4) Tabor, D., 1955, "The Mechanism of Rolling Friction", The Elastic Range, Proc. Roy. Soc., Vol. 29, Ser. A, pp. 198~204.
- (5) Drutowski, R. C., 1962, "The Linear Dependence of Rolling Friction on Stressed Volume", Rolling Contact Phenomena, Elsevier, New Youk, pp. 114~118.
- (6) Flom, D. G., 1959, "Theory of Rolling Friction for Spheres", J. Appl. Phys., Vol. 30, pp. 1725~1729.
- (7) 渡部紘一, 川口格, 1976, "ころがり摩擦の研究 (I)", 精密機械, 第42卷, pp. 1056~1063.
- (8) 渡部紘一, 川口格, 1977, "ころがり摩擦の研究 (II)", 精密機械, 第43卷, pp. 843~849.
- (9) Hertz, H., 1881, "On the Contact of Elastic Bodies", J. für die Reine und Angewandte Mathematik, Vol, 92, pp. 156~171.
- (10) Archard, J. F., 1957, "Elastic Deformation and the Laws of Friction", Proc. Roy. Soc., Vol. 243, Ser. A, pp. 190~198.
- (11) Nuri, K. A., 1974, "The Normal Approach between Curved Surface in Contact", Wear, Vol. 30, pp. 321~330.
- (12) Greenwood, J. A. and Tripp, J. H., 1974, "The Elastic Contact of Rough Spheres", Tran. ASME, Vol. 34, Ser. E. pp. 153~161.
- (13) Greenwood, J. A. and Williamson, J. B., 1966, "The Contact of nominally Flat Surfaces", Proc. R. Soc. Ser. A, pp. 295~304.
- (14) Goodman, L. E. and Keer, L. M., 1965, "The Contact Stress Problem for an Elastic Sphere Indenting an Elastic Cavity", Int. J. Solids & Structures. pp. 407~417.
- (15) Hartnett, M. J. and Kannel, J., 1981, "Contact Stresses between Elastic Cylinders", Tran. ASME, J. Lub. Tech, pp. 40~51.
- (16) Johnson, K. L., 1971, "Surface Energy and the Contact of Elastic solids", Proc. Roy. Soc. Ser. A, pp. 324~331.
- (17) 石垣博行, 川口格, 1976, "あちさを有する平面と球の接觸に関する研究(2報)", 精密機械, 第42卷, 第7號, pp. 831~840.
- (18) 石垣博行, 川口格, 1977, "あちさを有する平面と球の接觸にする研究(3報)", 精密機械, 第45卷, 第12號, pp. 1425~1430.
- (20) 김광식의 5인, 1986, "기계진동학", 보성문화사, 서울, pp. 145~147.
- (21) Rao, Singiresu, S. 1986, "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Menlo Park, California, p. 91.
- (22) Kreyszig, Erwin, 1983, "Advanced Engineering Mathematics", John Willey & Sons, Inc., New York, pp. 688~690.
- (23) 中原一郎, 1978, "材料力學(下卷)", 養賢堂, 東京, pp. 116~119.
- (24) 문한규외, 1989, "구름접촉 피로 수명에 영향을 미치는 인자 및 시험방법", 대한기계학회지, 제29권, 제2호, p. 129.
- (25) 架添正, 1976, "球面と平面の接觸機構", 日本機械學會論文集(C), 第41卷, 第346號, pp. 1909~1914.