

〈論 文〉

단일 캠 구동기구의 동 안정성 해석

김흥배* · 전혁수** · 이종원** · 박윤식**

(1990년 1월 30일 접수)

Dynamic Stability Analysis of a Single Cam Drive Mechanism

Hong-Bae Kim, Hyuck-Soo Jeon, Chong-Won Lee and Youn-Sik Park

Key Words : Dynamic Stability(동 안정성), Position Dependent Inertia(위치종속 관성), Position Dependent Force(위치종속 가진력), Wind-Up(와인드 업), Parametric System(매개변수 계)

Abstract

The dynamic stability of a single cam drive mechanism is investigated by an analytical approach. The nonlinear differential equation describing the motion of a single cam drive mechanism is linearized with respect to the input power angle, and results a linear parametric differential equation. The instability region is examined by applying the harmonic balance method to linearized parametric equation having periodicity. Through the dynamic stability analysis of a single cam drive mechanism, it is observed that the parametric resonances exist and the instability regions tend to become wide as increasing the drive speed and follower mass.

기 호 설 명

a_r : 함수 $\zeta(y)$ 의 조화성분(harmonic coefficient)
 C_e : 캠 기구의 등가 구심 성분(equivalent centripetal coefficient of cam mechanism)
 F_c : 종동자와 캠 사이의 접촉력
 G_k : 함수 $\Psi(y)$ 의 조화성분
 I_c : 캠 기구의 등가질량
 K_s : 캠 축의 등가 비틀림 강성계수
 K_v : 복원 스프링 계수
 M_e : 캠 기구에 작용되는 등가 모우멘트
 P_n : 함수 $\varphi(y)$ 의 조화성분
 R_b : 캠의 기초원 반지름
 T : 구동 토크
 T_c : 종동자에 의하여 캠에 작용되어지는 토크
 X_v : 종동자 변위

X : 캠의 등가변위
 y : 규정시간(nominal time)
 β : 와인드-업 비
 η : 주파수 비
 θ_c : 캠 각
 θ_i : 캠 축 입력각

1. 서 론

캠 기구는 가장 흔히 사용되는 간헐적 운동기구 중의 하나이다. 캠 기구는 간단한 구조, 운동형태의 자유스러운 선택 및 높은 부하능력, 낮은 충격과 가속도, 긴 수명 등으로 해서 많이 사용되어 왔다^(1,2).

캠 기구는 크게 구동계, 캠 형상, 종동계의 세 부분으로 나눌 수 있는데, 구동속도가 낮거나, 캠 기구에 작용되는 부하가 작을 경우에는 구동계 및 종

*대우중공업(주)

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

동계는 거의 강체로 생각될 수 있다. 이러한 경우 캠 형상은 원하는 종동자의 운동을 얻을 수 있도록 기구학적으로 합성할 수 있을 것이다^(3,4). 구동속도가 증가되고, 캠 기구에 작용되는 부하가 증가됨에 따라 캠 기구의 운동에 종동계 및 구동계의 연성이 무시할 수 없는 영향을 미치게 된다. 종동계의 연성을 고려한 캠 기구의 해석에 관한 많은 연구들이 수행되어 왔는데^(5~13), 이들은 주로 캠의 입력운동에 대한 종동자의 출력운동, 기구내의 마멸등에 관심을 가졌으며, 종동계에 비하여 상대적으로 고유진동수가 높은 구동계의 연성을 고려하지 않았었다. 그러나 구동속도가 더욱 더 높아지고, 캠 기구의 경량화에 따라 캠 구동계의 연성을 고려할 필요성이 대두되었으며, 이에 관한 연구들도 진척되었^(14~17).

구동계의 연성에 의하여 발생하는 현상에는 여러 가지가 있겠지만 가장 심각한 현상은 축의 비틀림 진동에 의한 와인드-업(wind-up) 현상이다. 와인드-업 현상은 부 정확한 종동자의 운동, 캠 축의 피로현상 등을 유발시킨다. 축의 비틀림 진동에 의한 구동계의 와인드-업은 캠의 작동속도가 고속화될수록 캠 기구 설계시에 무시할 수 없는 중요한 설계변수가 될 것이며, 이에 따라 구동계의 동안정성 해석은 수반되어야만 할 것이다. 구동계의 연성을 고려한 그 동안의 연구^(14~17)들을 살펴보면 이들의 주 관심사는 구동계의 연성을 고려하였을때 종동자의 시간응답특성, 캠과 종동자의 분리현상, 캠 축의 비틀림 진동등에만 있었다.

연구하고자 하는 캠 기구는 종동자와 캠축 사이의 상호작용에 의한 자려진동계(self excited system)로서 캠축이 등 각속도로 구동된다면, 위치종속관성(position dependent inertia)과 위치종속가진력(position dependent force) 항이 주기적으로 변하는 매개변수계(parametric system)로 해석될 수 있다. 이러한 매개변수계는 매개변수공진(parametric resonance)이라는 현상으로 인하여 설계시 항상 안정성 해석이 요구된다.

본 논문에서는 단일 캠 구동기구의 안정성 해석을 위한 효율적인 방법이 제시되고, 수치실험을 통하여 검증되었다. 우선 단일 캠 구동기구를 묘사하는 비선형 방정식이 유도되고, 동안정성에 관여하는 변수들이 무차원화되어 도입된다. 유도된 방정식은 캠 축의 입력각에 대하여 선형화되고, 선형화된 방정식에 조화균형법(harmonic balance

method)을 적용하여 동안정성 해석을 수행하였다.

2. 운동 방정식 유도

본 연구에서는 참고문헌 (17)에서 사용한 것과 같은 간략화된 캠 구동계 모델을 사용한다(Fig. 1). 주어진 모델의 응답과 이상적인 응답사이의 차이가 구동계의 와인드-업에만 기인하도록 하기 위하여 캠 기구의 지지부는 강체라 하고, 캠 축의 굽힘 영향도 무시할만 하다고 가정한다. 캠 축의 관성 모멘트는 캠 축과 폴리쪽으로 집중시키고, 축은 질량이 없는 비틀림 스프링으로 대치시킨다. 이러한 가정은 캠 축의 연성에 의한 비틀림 현상이 캠 기구내의 다른 요소들의 연성에 의한 비틀림 현상에 비하여 지배적일때 타당하다. 종동자는 간단한 하나의 등가질량과 스프링으로 이루어지는 계로 대치시킨다. 해석을 용이하게 하기 위해서 출력운동이 주기성을 갖도록 캠 축의 입력 각속도($\dot{\theta}_i(t)$)는 등

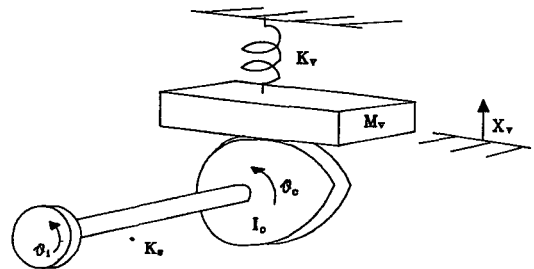


Fig. 1 Cam drive mechanism

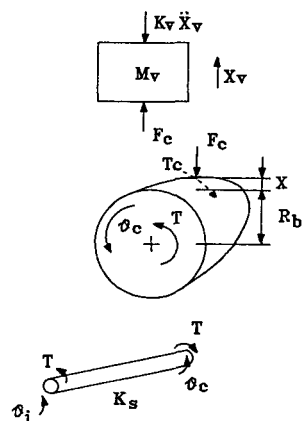


Fig. 2 Component force diagram of cam drive mechanism

각속도로 가정한다. 이로 인하여 계는 1자유도로 간략화시킬 수 있다. 감쇠가 작다는 가정하에 캠 기구의 동특성을 파악하기 위하여 모든 감쇠는 무시한다. 이와같은 가정하에 Fig. 1, 2에서 캠쪽 질량 관성 모우멘트를 I_c , 캠 축의 비틀림 강성계수를 K_c , 종동자에 의하여 캠에 가해지는 토크를 T_c , 폴리쪽의 입력각을 $\theta_i(t)$, 캠의 회전각을 $\theta_c(t)$ 라고 할 때 캠 기구의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$I_c \ddot{\theta}_c(t) + K_s[\theta_c(t) - \theta_i(t)] = T_c \quad (1)$$

종동자와 캠이 접촉 상태에 있으면, 종동자 변위 X_v 와 캠 변위 X 는 다음 식을 만족한다.

$$X_v = X \quad (2)$$

Fig. 2에서 F_c 와 T_c 는 다음과 같이 유도된다.

$$F_c = M_v \ddot{X} + K_v X \quad (3)$$

$$T_c = M_v X'^2 \theta_c + M_v X'' X' \theta_c^2 + K_v X X' \quad (4)$$

여기서 $\dot{X} = dX/dt$, $X' = dX/d\theta_c$ 이다.

캠 기구 설계에서 종동자의 복원 스프링계수는 종동자와 캠 표면 사이의 분리현상을 최대한 방지하기 위하여 종동자의 질량, 캠 형상, 구동속도에 따라 결정되는 종속변수이다. 분리현상이 발생하지 않으려면 종동자의 최대 관성력이 발생하는 지점에서 이보다 큰 스프링의 복원력이 존재하여야 하므로 스프링의 최대 복원력 $(F_s)_{max}$ 는 다음식을 만족하여야 한다.

$$(F_s)_{max} = K_v X_m > |M_m \ddot{X}_m| \quad (5)$$

여기서 $\ddot{X}_m = (d^2 X/dt^2)_{max}$, $X_m = (X)_{max}$ 이다.

복원 스프링계수는 캠 축이 강체일 때의 종동자 운동으로부터 결정한다.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_m &= X_m'' \theta_c^2 \\ &= X_m'' \dot{\theta}_c^2 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $X_m'' = (X'')_{max}$ 이다.

식 (5), (6)으로부터 복원 스프링계수 K_v 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_v = \alpha M_v (X_m'' \dot{\theta}_c^2) / X_m, \quad \alpha > 1 \quad (7)$$

여기서, α 는 안전계수이다. 식 (4), (7)을 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (I_c + M_v X'^2) \ddot{\theta}_c(t) + M_v X'' X' \dot{\theta}_c^2(t) \\ + K_s[\theta_c(t) - \theta_i(t)] = -\alpha M_v X_m'' \dot{\theta}_c^2(t) \\ X X' / X_m \end{aligned} \quad (8)$$

3. 무차원 변수 결정

캠 구동기구의 동특성 해석을 용이하게 하기 위

하여 관여하는 4개의 무차원 변수를 설정하였다. 무차원 와인드-업 량을 표현하기 위하여 β 를 도입한다.

$$\beta = \frac{\theta_i - \theta_c}{2\pi} \quad (9)$$

시간에 무관한 미분방정식을 유도하기 위하여 규정 시간(nominal time)을 도입한다.

$$y = \frac{\theta_i}{2\pi} \quad (10)$$

이 무차원 변수는 $\theta_i(t)$ 가 등속이므로 이에따라 시간을 대표하는 량이 된다. 계의 비선형성 정도를 나타내는 무차원 변수로서

$$Q = \frac{M_v X_m'^2}{I_c} \quad (11)$$

를 설정하는데, 이 값은 캠 축의 캠쪽 질량 관성모우멘트에 대한 주어진 캠 형상에서 종동자의 최대 등가 관성모우멘트의 비를 나타낸다. 즉 $Q_m = 0$ 는 선형계를 의미한다. 캠 축의 질량 관성모우멘트, 비틀림 강성계수와 캠 축의 입력각속도 사이의 관계를 나타내는 변수로서

$$\eta^2 = \frac{K_s}{I_c} \cdot \frac{1}{\dot{\theta}_c^2} \quad (12)$$

를 선택한다. 이 값의 증가는 캠축의 고유진동수에 비하여 캠축의 회전각속도가 상대적으로 작아짐을 의미한다.

식 (9), (10), (11), (12)의 무차원 변수를 식 (8)에 도입하여 다음의 무차원 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta}{dy^2} - \frac{2\pi Q_m X'' X' / X_m'^2}{1 + Q_m (X' / X_m')^2} \left(1 - \frac{d\beta}{dy}\right)^2 \\ = \frac{4\pi^2 \eta^2 \beta}{1 + Q_m (X' / X_m')^2} = \frac{2\pi Q_m \alpha X_m'' X X' / X_m}{1 + Q_m (X' / X_m')^2} \end{aligned} \quad (13)$$

4. 운동 방정식의 선형화

식 (13)은 비선형 방정식이다. 비선형 방정식의 수학적인 해석의 어려움을 피하기 위하여 본 연구에서는 실제 비선형 방정식에 매우 근사하며 주기적인 특성을 갖는 선형화된 방정식을 유도하고, 이 방정식을 사용하여 수학적 해석을 하려고 한다.

참고문헌 (18)과 (19)에서 제시된 바와 같이 비선형 비틀림 진동의 경우 입력 각속도 $\{\dot{\theta}_i(t)\}$ 가 일정할 때는 입력각을 선형화 기점으로 하여 비선형계를 선형계로 근사화시킬 수 있다(Fig. 3). $\theta_i(t)$ 가 등속이라는 가정과 무차원 변수 β 로 캠의 회전

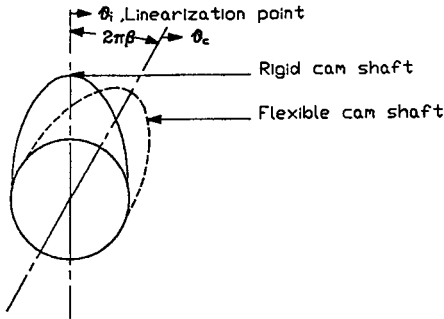


Fig. 3 Linearization point set-up

각은 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_c(t) = \theta_i(t) - 2\pi\beta(t) \quad (14)$$

$$\dot{\theta}_c(t) = \dot{\theta}_i(t) - 2\pi\dot{\beta}(t) \quad (15)$$

$$\ddot{\theta}_c(t) = -2\pi\ddot{\beta}(t) \quad (16)$$

식 (8)을 다음과 같은 간단한 형식으로 정리할 수 있다.

$$I_e(\theta_c)\ddot{\theta}_c(t) + C_e(\theta_c)\dot{\theta}_c^2(t) + K_s[\theta_c(t) - \theta_i(t)] = -M_e(\theta_c) \quad (17)$$

여기서

$$I_e(\theta_c) = I_c + M_v X'^2$$

$$C_e(\theta_c) = M_v X' X''$$

$$M_e(\theta_c) = -\alpha M_v X_m'' \dot{\theta}_i^2 X X' / X_m$$

이다.

식 (17)에 식 (14), (15), (16)을 대입하여 $\beta(t)$ 의 이차항 이상을 무시하면,

$$I_e(\theta_c)\ddot{\beta}(t) + 2\dot{\theta}_i C_e(\theta_c)\dot{\beta}(t) + K_s\beta(t) = -[M_e(\theta_c) + C_e(\theta_c)\dot{\theta}_i^2] / 2\pi \quad (18)$$

이다. 식 (18)을 선형화시키기 위하여 $I_e(\theta_c)$, $C_e(\theta_c)$, $M_e(\theta_c)$ 를 $\beta(t)$ 에 대하여 Taylor 급수전개를 하여 식 (18)에 대입하고, $\beta(t)$ 의 이차항 이상을 무시하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta}(t) + \frac{2\dot{\theta}_i C_e(\theta_i)}{I_e(\theta_i)}\dot{\beta}(t) \\ & + \frac{[K_s + C_e(\theta_i)\dot{\theta}_i^2 - M_e(\theta_i)']}{I_e(\theta_i)}\beta(t) \\ & = \frac{[C_e(\theta_i)\dot{\theta}_i^2 - M_e(\theta_i)]}{2\pi I_e(\theta_i)} \end{aligned} \quad (19)$$

다음의 좌표변환을 사용하여 식 (19)를 Hill 방정식 형태로 변환시킨다.⁽²¹⁾

$$\beta(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{2C_e(\theta_i)\dot{\theta}_i}{I_e(\theta_i)} d\tau\right) \zeta(t) \quad (20)$$

식 (20)을 식 (19)에 적용하고, 4개의 무차원 변수를 도입하여 선형화된 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta(y)}{dy^2} \\ & + 4\pi^2 \left\{ \frac{\eta^2 + Q_m \alpha X_m'' (X'' X + X'^2) / (X_m'' X_m)}{1 + Q_m (X' / X_m')^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{Q_m X' X'' / X_m''}{1 + Q_m (X' / X_m')^2} \right)^2 \right\} \zeta(y) \\ & = \frac{2\pi Q_m (X' X'' + \alpha X_m'' X X' / X_m) / X_m''}{\sqrt{1 + Q_m (X' / X_m')^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

일반적으로 캠 구동기구에서는 $Q_m \ll 1$ 이므로 식 (21)을 다음과 같은 근사 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta(y)}{dy^2} + 4\pi^2 \{ \eta^2 + Q_m \alpha X_m'' (X'' X \\ & + X'^2) / X_m'' X_m \} \zeta(y) = 2\pi Q_m (X' X'' \\ & + \alpha X_m'' X X' / X_m) / X_m'' \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)는 매개변수가 시간에 따라 주기적으로 변하는 선형 매개변수 방정식이다.

5. 동 안정성 해석

캠 구동기구의 운동을 묘사하는 비선형 미분방정식을 근사화시킨 선형 매개변수 방정식에 조화 균형법(harmonic balance method)을 도입하여 계의 안정 및 불안정 사이의 경계 및 불안정 영역을 찾는다.

식 (22)를 다음과 같은 간단한 형태로 표현하자.

$$\begin{aligned} & \zeta(y)'' + 4\pi^2 [\eta^2 + Q_m \Psi(y)] \zeta(y) \\ & = 2\pi Q_m \varphi(y) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\Psi(y) = \alpha X_m'' (X'' X + X'^2) / (X_m'' X_m)$$

$$\varphi(y) = (X' X'' + \alpha X_m'' X X' / X_m) / X_m'' \text{이다.}$$

식 (23)에서 설정된 시간종속 변수 $\Psi(y)$, $\varphi(y)$ 의 주기를 Y_c 라고 할때, 응답 $\zeta(y)$ 의 주기가 Y_c , $2Y_c$ 를 갖는 지점에서는 안정과 불안정 응답의 경계가 존재하며, 응답의 주기가 $2Y_c$ 보다 클 경우에는 그 응답은 항상 안정하며 주기적이다⁽²⁰⁾라는 이론을 토대로 안정과 불안정 응답의 경계를 찾게된다. 시간종속변수 $\Psi(y)$, $\varphi(y)$ 를 주기 Y_c 를 갖는 주기함수라고 하면, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \Psi(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k \cdot \exp(j2k\pi y) \\ & = \Psi(y + Y_c) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \cdot \exp(j2n\pi y) \\ &= \varphi(y + Y_c) \end{aligned} \quad (25)$$

응답 $\zeta(y)$ 는 임의의 주기를 갖도록 하기 위하여 다음과 같이 가정한다.

$$\zeta(y) \exp(\gamma y) \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r \exp(j2r\pi y) = \zeta(y + Y_r) \quad (26)$$

$Y_r = Y_c$ 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$Y_r = JY_c$$

여기서 J 는 1 혹은 2 보다 크거나 같은 양의 정수이다. 그러므로 $-\pi j \leq \gamma \leq \pi j$ 이다.

식 (24), (25), (26)을 식 (23)에 대입하여 정리한 다음 각 조화성분의 차수별로 비교해 보면 다음과 같은 행렬식을 유도할 수 있다.

$$[K] \{A\} = 1/(2\pi) \{P\}, \quad (\gamma=0\text{일때}) \quad (27)$$

$$= \{0\}, \quad (\gamma \neq 0\text{일때})$$

여기서,

$$[K] = \begin{bmatrix} \ddots & \rho_2 & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & \ddots \\ \ddots & G_{-1} & \rho_1 & G_1 & G_2 & G_3 & \ddots \\ \ddots & G_{-2} & G_{-1} & \rho_0 & G_1 & G_2 & \ddots \\ \ddots & G_{-3} & G_{-2} & G_{-1} & \rho_{-1} & G_1 & \ddots \\ \ddots & G_{-4} & G_{-3} & G_{-2} & G_{-1} & \rho_{-2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_0 \\ P_{-1} \\ P_{-2} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$G_0 = \eta^2 + \Psi_0 Q_m, \quad G_k = \Psi_k = Q_m$$

$$P_0 = \varphi_0 Q_m, \quad P_n = \varphi_n Q_m$$

$$\rho_r = \left(\frac{\gamma + j2\pi r}{2\pi} \right)^2 + G_0$$

식 (27)에서 $\gamma=0$ 이면 무차원 변수 $\zeta(y)$ 에 대한 응답중에서 주기가 $Y_r = Y_c$ 에 해당하는 조화성분을 구할 수 있으며, $\gamma \neq 0$ 이면 식 (27)이 nontrivial 해를 갖기 위하여 계수 행렬 $[K]$ 의 행렬값이 영이어야 한다.

$$|K| \cong \dots \rho_{-2} \rho_{-1} \pi_0 \rho_1 \rho_2 \dots = 0 \quad (28)$$

이 조건으로 부터

$$\gamma = 2\pi(\eta - r) \quad (29)$$

으로 표현되며 이에 따라 응답의 주기는 다음과 같

이 표현된다.

$$Y_r = Y_c / |(\eta - r)| \quad (30)$$

여기서 $0 < |(\eta - r)| \leq \frac{1}{2}$ 이다.

계의 응답중 주기가 매개변수 주기의 1, 2배인 응답에서만 안정과 불안정의 경계가 존재하므로 이 조건을 만족하는 γ 값은 식 (29), (30)으로 부터 다음과 같이 구해진다.

$$\gamma = 0, \quad (Y_r = Y_c \text{일때}) \quad (31)$$

$$\gamma = \pm j\pi, \quad (Y_r = 2Y_c \text{일때})$$

비 제차항은 계의 안정성에 영향을 미치지 못하므로 식 (27)과 (31)로부터 안정성 해석 식을 얻을 수 있다. $\gamma=0$ or $\pm j\pi$ 인 경우에 대하여,

$$|K| = 0 \quad (32)$$

이다. 식 (32)에 의하여 각각의 Q_m 에 따른 안정과 불안정 경계지점의 η 를 구하게 된다.

6. 결과 및 고찰

본 연구에서는 단일 조화성분을 가진 RRD(Rise-Return-Dwell) 형태의 단일 캠에 대하여 안정성을 판단하고, 수치실험을 통하여 검증하였다. 사용된 단일 조화 캠의 작동각도 θ_f 는 180° 로 하였으며 (즉 무차원 시간 y 로 나타내면 0.5), 이에 따른 캠의 변위, 속도, 가속도와 규정시간(y)과의 관계식은 다음과 같으며 Fig. 4에 도시하였다.

$$\begin{aligned} X &= \frac{X_m}{2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{4\pi^2 y}{\theta_f}\right) \right\} \\ X' &= \frac{\pi X_m}{\theta_f} \cdot \sin\left(\frac{4\pi^2 y}{\theta_f}\right) \\ X'' &= \frac{2\pi^2 X_m}{\theta_f^2} \cos\left(\frac{4\pi^2 y}{\theta_f}\right), \quad \text{for } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ X &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

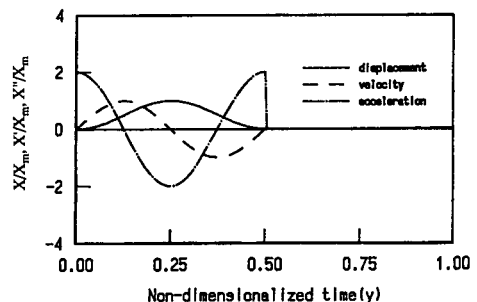


Fig. 4 Profile of single harmonic cam ($\theta_f = \pi$, or $y_f = 0.5$)

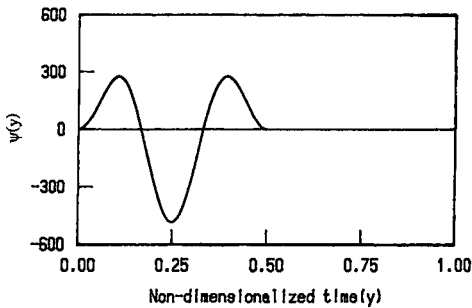


Fig. 5 Time history of periodic function $\psi(y)$
($X_m=0.009$, $\theta_f=\pi$, $\alpha=1.5$)

$$X' = 0$$

$$X'' = 0, \text{ for } \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

벨브 스프링계수의 크기를 조정하는 상수 α 는 중동자와 캠 사이의 분리현상을 최대한 방지하기 위하여 1.5로 택하였다. 이에따라 구해진 $\psi(y)$ 가 Fig. 5에 있다.

(1) 선형화 타당성 검토

캠 구동기구의 운동을 묘사하는 비선형 방정식을 입력각 $\theta_i(t)$ 에 대하여 선형화함에 있어서 β , $d\beta/dy$ 가 매우 작은 값이라는 가정을 하였으므로 그 타당성을 검토하기 위하여 식 (9)에서 정의된 와인드-업 비 β , $d\beta/dy$ 를 매개변수의 한 주기($Y_c=1$) 내에서 평균값으로 구하였다(Fig. 6, 7). 또한 방정식의 유도에 항상 중동자가 캠과 접촉해야 한다는 가정이 사용되었으므로 중동자가 캠과 분리되는 상황도 함께 구하였다.

Fig. 6, 7에서 Q_m 이 0.1보다 작은 경우에는 중동자와 캠은 항상 접촉하게 됨을 알 수 있다. 또 계의 비선형성이 증가될수록(즉 Q_m 이 증가될수록), 구동속도가 빨라질수록(즉 η 가 작아질수록) 와인드-업 량이 증가되는 현상을 볼 수 있다. 와인드-업 량은 비선형 방정식의 선형화에 있어서 그 유효함의 중요한 판단기준이 되므로 타당한 Q_m , η 의 범위를 설정하여야 한다. 중동자가 캠과 분리되지 않는 Q_m (Q_m 이 0.1보다 작은 경우)에 대하여 η 의 전 범위에서 와인드-업 량은 0.02(각도로 환산하면 7° 정도) 내에 존재하므로 이 범위 내에서의 선형화에는 문제가 없으리라고 생각된다.

(2) 캠 구동기구의 동 안정성 해석 결과

조화 균형법에 의하여 각 Q_m 에 따른 안정과 불안정 경계지점의 η 를 구할 때 참고문헌 (19)에서

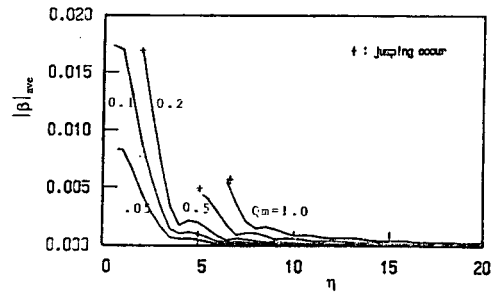


Fig. 6 Absolute average value of wind-up ($|\beta|_{ave}$ vs. η)
($Q_m=0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$; $X_m=0.009$)

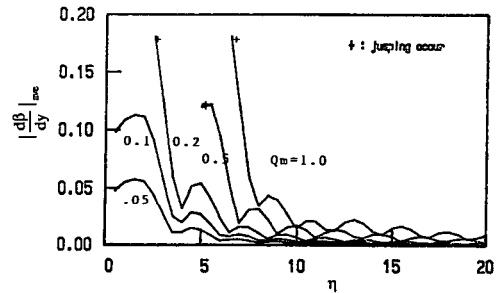


Fig. 7 Absolute average value of wind-up ratio ($|d\beta/dy|_{ave}$ vs. η)
($Q_m=0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$; $X_m=0.009$)

증명되었듯이 식 (27)에서 고려하는 행렬의 차수가 증가될수록(즉 고려하는 조화성분의 차수가 증가될수록) 정확한 경계값을 구할 수 있다. 여기서는 $\psi(y)$ 의 조화성분을 10차까지 고려하여 행렬의 차수는 11×11 이 된다.

Q_m 이 0.1보다 큰 경우에는 분리현상이 발생하므로 계의 동 안정성 해석 이전에 분리현상을 방지하는 캠 기구의 설계가 선행되어야 할 것이다. 따라서 동 안정성 해석을 분리현상이 발생하지 않는 범위 내에서만 행한다.

식 (32)로부터 구한 불안정 영역 및 경계값을 Fig. 8에 도시하였다. 그림에서 보듯이 Q_m 이 작을 때에는 η 값 1, 2, 3, 4, 5부근에서 불안정 영역이 존재함을 알 수 있다. Q_m 이 증가됨에 따라 불안정 영역은 점차 증가함을 볼 수 있다. 특히 η 가 1, 2 일때 불안정 영역은 다른지점에 비하여 상당히 넓은 음을 알 수 있다.

위에서 행한 동안정성 해석의 결과를 식 (13)과 (33)을 이용하여 수치실험을 통하여 검증하였다.

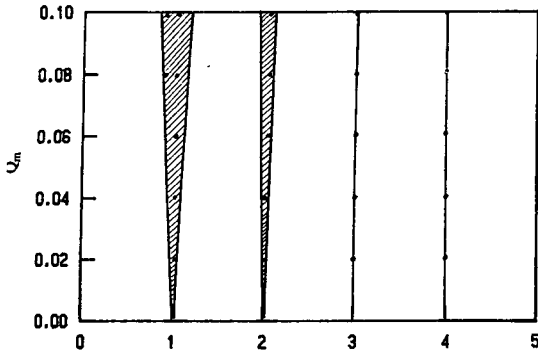


Fig. 8 Region of instability (η vs. Q_m)

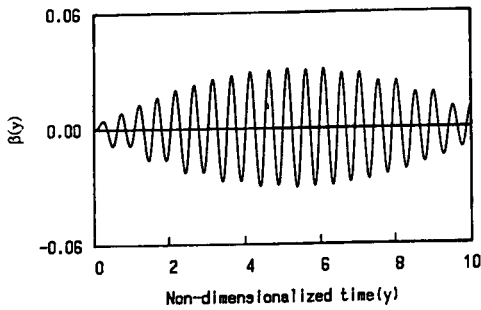


Fig. 9 Time history of nonlinear Eq.(13) ($\eta=0.85, Q_m=0.10$)

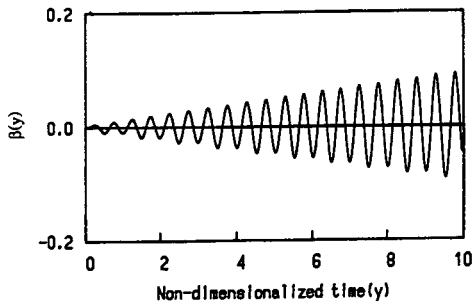


Fig. 10 Time history of nonlinear Eq.(13) ($\eta=0.90, Q_m=0.10$)

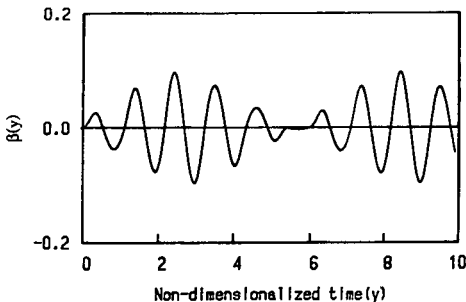


Fig. 11 Time history of nonlinear Eq.(13) ($\eta=2.10, Q_m=0.05$)

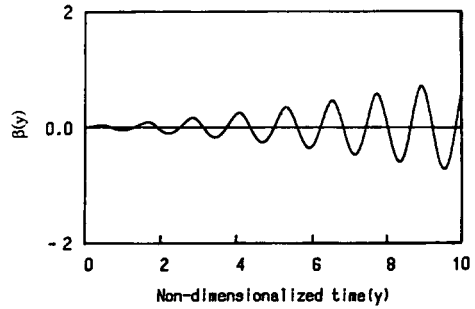


Fig. 12 Time history of nonlinear Eq.(13) ($\eta=2.00, Q_m=0.05$)

수치적분은 4차 Runge-Kutta법을 사용하였고, 초기조건은 다음과 같이 설정하였다.

$$\beta(0) = 0, \beta'(0) = 0$$

Fig. 9와 10은 $Q_m=0.1$ 일때 $\eta=0.85, 0.9$ 에 대한 와인드-업 량을 그린 것이다. Fig. 11과 12는 $Q_m=0.05$ 일때 $\eta=2.1, 2.0$ 에 대한 와인드-업 량이다. Fig. 9와 11은 안정응답을 Fig. 10과 12는 발산하는 불안정 응답을 보여준다. 이 결과는 Fig. 8의 안정, 불안정 영역 그림에서 판단한 것과 같은 결과를 보여준다.

7. 결 론

본 논문에서는 캠 축의 연성을 고려한 캠 구동기구의 운동을 묘사하는 비선형 방정식을 유도하고, 이 방정식을 캠 축의 입력 등각속도에 대하여 선형화시켜서 수학적 해석이 간편한 Hill 방정식 형태로 근사화 하였다. 캠 축의 구동속도와 캠 축의 비틀림 고유진동수의 비를 나타내는 무차원 변수로 η 를 중동자와 캠 축의 질량 환성비를 나타내는 무차원 변수로 Q_m 를 설정하고, 유도된 Hill 형태의 방정식에 조화 균형법을 도입하여 캠 구동기구의 동 안정성을 해석하였다.

동 안정성 해석결과는 캠 축의 구동속도가 캠 축의 비틀림 고유진동수의 $1/N$ ($N=1, 2, 3, 4, \dots$)배 되는 지점에서 매개변수 공진이 발생하며, 구동속도가 고유진동수에 접근할수록, 중동자의 질량이 커질수록 불안정 영역이 증가함을 보여준다.

단일 캠 구동계에 대하여 본 연구에서 수행한 동 안정성 해석 방법은 시간영역 직접적분에 의한 방법보다 해석시간을 많이 절약하면서 신뢰성 있는

결과를 제시해 준다.

참 고 문 헌

- (1) Rothbart, H.A., 1961, "Cam Dynamics", Proceedings of the International Conference for Teachers of Mechanisms, The Shoe String Press, NewHaven Conn., pp. 141~155.
- (2) Bickford, J.H., 1972, "Mechanism for Intermittent Motion", Industrial Press, pp. 113~126.
- (3) Chakraborty, J., and Dhande, S.G., 1977, "Kinematics and Geometry of Planar and Spatial Cam Mechanisms", John Wiley & Sons, pp. 26~66.
- (4) Chen, F.Y., 1982, "Mechanics and Design of Cam Mechanisms", Pergamon Press.
- (5) Mitchell, D.B., 1950, "Tests on Dynamic Response of Cam-Follower Systems", Mechanical Engineering, Vol. 72, pp. 467~471.
- (6) Dudley, W.M., 1948, "New Method in Valve Cam Design", SAE Quarterly Transaction, Vol. 2, pp. 19~33.
- (7) Barkan, P. 1953, "Calculation of High Speed Valve Motion with Flexible Overhead Linkage", SAE Transaction, Vol. 61, pp.687~700.
- (8) Johnson, G.I., 1963, "Studying Valve Dynamics with Electronic Computers", SAE Progr. Tech., Vol. 15, Application of Computers in Valve Gear Design, pp. 10~28.
- (9) Eiss, N.S., 1964, "Vibration of Cams Having Two Degrees of Freedom", ASME J. of Engineering for Industry, pp. 343~350.
- (10) Wiederrich, J.L., and Roth, B., 1975, "Dynamic Synthesis of Cams Using Finite Trigonometric Series", ASME J. Engineering for Industry, pp. 287~293.
- (11) Wiederrich, J.L., 1981, "Residual Vibration Criteria Applied to Mutiple Degree of Freedom Cam Follower", ASME J. Mechanical Design, Vol. 103, pp. 702~705.
- (12) Pisano, A.P., and Freudenstein, F., 1984, "An Experimental and Analytical Inversigation of the Dynamic Response of a High-Speed Cam Follower System, Part 1 and 2", ASME J. Mech., Trans., and Auto. in Design, Vol. 106, pp. 692~704.
- (13) Jeon, H.S., Park, K.J., and Park, Y.S., 1989, "An Optimal Cam Profile Design Considering Dynamic Characteristics of Cam-valve System", Experimental Mechanics, pp. 357~363.
- (14) Bloom, D., and Radcliffe, C.W., 1964, "The Effect of Camshaft Elasticity on the Response of Cam Driven Systems", ASME Paper 64-Mech-41.
- (15) Koster, M.P., 1975, "Effect of Flexibility of Driving Shaft on the Dynamic Behavior of Cam Mechanism", ASME J. Engineering for Industry, pp. 595~602.
- (16) Ardayfio, D., 1976, "Dynamics of High-Speed Cam Mechanisms with Damped Flexible Followers Driven by Flexible Camshafts", ASME Paper 76-DET-69.
- (17) Szakallas, L.E., and Savage, H., 1980, "The Characterization of Cam Driven System Windup", ASME J. Mechanical Design, Vol. 102, pp. 278~285.
- (18) Pasricha, M.S., and Carnegie, W.D., 1979, "Fomulation of the Equations of Dynamic Motion Including the Effects of Variable Inertia on the Torsional Vibrations in Resprocating Engines, Part I", Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, pp. 181~186.
- (19) Richards, J.A., 1983, "Analysis of Periodically Time-Varying System", Springer-Verlag. pp. 50~80.
- (20) Cunningham, W.J., 1958, "Introduction to Non-linear Analysis", McGraw-Hill.
- (21) Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., 1979, "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons.
- (22) Hsu, C.S., 1974, "On Approximating a General Linear Periodic System", Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 45, No. 1, pp. 234~251.
- (23) 김홍배, 1989, "단일 캠 구동기구의 동 안정성 해석", 한국과학기술원 석사학위 논문.