

〈論 文〉

견실한 서보적응제어기에 관한 연구

金 鍾 源*

(1989년 12월 7일 접수)

A Study on the Adaptive Robust Servocontroller

Jongwon Kim

Key Words : Adaptive Control(적응제어), Robustness(견실성), Robust Control(견실제어), System Identification(시스템인식), Model Estimation(모델추정), Servomechanism(서보기구), Pole-Assignment(극배치)

Abstract

This paper presents Adaptive Robust Servocontrol(ARSC) scheme, which is an explicit(or indirect) pole-assignment adaptive algorithm with the property of "robustness". It guarantees asymptotic regulation and tracking in the presence of finite parameter perturbations of the unknown plant(or process) model. The controller structure is obtained by transforming a robust control theory into an adaptive control version. This controller structure is combined with the model estimation algorithm which includes a dead-zone for bounded noise. It is proved theoretically that this combination of control and identification is globally convergent and stable. It is also shown, through a real-time simulation study, that the desired closed-loop poles of the augmented system can be assigned directly, and that the adjustment mechanism of the scheme tunes the controller parameters according to the assigned closed-loop poles.

1. 서 론

제어대상계 모델의 변수들에 임의의 교란이 발생함에도 불구하고 점근적 추종이나 추적을 유지할 수 있는 케환제어기를 일반적으로 "견실한 서보기구(robust servomechanism)"라고 정의한다.

서보기구에서의 견실성(robustness)은 적응제어기(adaptive controller)의 경우에도 매우 긴요하게 요구되는 성질이다. 적응제어에서는 제어대상계 모델의 변수가 온라인으로 추정되기 때문에, 시간에 관계없이 항상 일정한 모델변수를 추정해낸다는 것

은 거의 불가능하다. 모델링時 생략된 동적특성 및 비선형특성에 의한 작동조건의 변화 등으로, 모델 변수는 일정한 참값으로부터 교란을 받는다. 따라서, 적응제어기의 제어구조로서 견실한 서보기구를 채용하는 것을 생각해볼 수 있다.

Davidson은 "서보 보상기(servo-compensator)"와 "안정화 보상기(stabilizing compensator)"를 병행하여 구성함으로써 견실한 서보기구를 얻을 수 있다고 발표하였다⁽¹⁾. 서보보상기는 지령입력과 외란신호의 동적특성을 포함하도록 구성하고, 안정화보상기에 의해서 총체적인 폐루프계(augmented closed-loop system)의 안정성을 유지시키면, 서보제어기의 견실성이 보장된다는 것이 증명되었다.

본 연구에서 취한 접근방식은, 앞에서 언급한

*정회원, 서울대학교 자동화시스템공동연구소

“견실한 서보기구 이론”을 디지털 제어방식으로 변환시켜서, 적절한 순환식 최소자승법(recursive least-squares method)에 의한 모델추정기법과 결합시키는 것이다. 이러한 방법으로 “견실한 서보적응 제어기법(Adaptive Robust Servocontrol Scheme)”이 고안되었는데, 이후로는 간단히 “ARSC”로 약칭하기로 한다.

견실한 적응제어기에 대한 고찰은 Francis와 Vidyasagar⁽²⁾에 의해 제안되었으며, 이것을 Silveira와 Doraiswami⁽³⁾가 구체화 시켰고, 이어서 Song등⁽⁴⁾이 후자의 연구에 대한 일반화 및 확장작업을 수행하였다. 여기서 연구된 적응제어기법들은 암시적인(implicit) 또는 직접적인(direct) 적응제어 알고리즘으로 구분될 수 있다. 서보 및 안정화 보상기가 포함된 총체적인 폐루프계가 예측기 형태로 표현되며, 이러한 예측기의 예측오차와 제어입력신호의 제곱합의 평균치가 최소화되도록 적응제어가 진행된다. 여기서, 제어입력신호를 최소화하는 것을 생각하지 않을 경우에는, 서보 및 안정화 보상기가 포함된 모델추종 적응제어기(model-reference adaptive controller)가 된다.

Kreisselmeier와 Anderson⁽⁵⁾은 새로운 암시적인 견실한 모델추종 적응제어기를 제시했으며, 이를 통해서, 모델링時 생략된 동특성에 의한 제어대상계 모델의 불확실성에도 불구하고, 견실한 안정성을 얻을 수 있음을 보였다. 그러나, 서보보상기의 개념을 응용한 엄격한(strict) 점근적 추종 또는 추적에 대해서는 다루지 않았다.

Elliot와 Goodwin⁽⁶⁾은 “내부 모델 원칙(Internal Model Principle)”을 적응제어화하는 연구를 하여, 일종의 암시적인 극배치 적응제어기를 제시했다. 내부 모델 원칙에 의하여, 제어대상계에 대한 외란에도 불구하고, 점근적인 추적이 보장된다. 그러나, 제어대상계 모델의 불확실성에 대한 견실성 확보 문제는 취급되지 않았다.

본 연구에서 제시되는 ARSC는, 엄격한 점근적 추종과 추적을 달성함과 동시에, 모델의 불확실성에 대항할 수 있는 견실성을 유지할 수 있도록 연구되었으며, 명시적인(explicit) 적응제어 알고리즘을 채택하여, 다수입력 다수출력(multi-input multi-output) 제어대상계에 대해서, 원하는 폐루프 극(pole)을 직접 알고리즘내에서 지정 또는 변환시킬 수 있도록 고안되었다.

본 연구에서는 ARSC의 이론적인 전개에 대해서

주로 설명하고자 한다. 제2장에서는 ARSC의 구조를 자세히 기술하며, 제3장에 ARSC를 컴퓨터에 이식하기 위한 알고리즘을 요약하여 제시한다. 또한, ARSC알고리즘이 총체적으로(globally) 수렴하며 안정하다는 이론적 증명에 대하여 제4장에서 언급하며, 마지막으로 제5장에 實時間 시뮬레이션을 통하여 ARSC의 간단한 적용실풀레를 들었다. 실제로 본 ARSC는 엔드밀링의 절삭력 적응제어에 적용되었는데, 그 연구결과는 별도로 발표할 예정이다.

2. ARSC의 구조

Fig. 1의 기본구조에 보이는 바와 같이, ARSC는 (1) 제어대상계, (2) 모델변수 추정기, (3) 디지털 서보제어기 및 (4) 제어기이득 조정기구 등으로 구성되어있다.

2.1 제어대상계 모델

제어대상계 모델은 출력분리형(output-decoupled) 다수입력 다수출력 시스템이며, 모델변수는未知이지만 시간에 따라서 서서히 변화하고, 제어대상계에 대한 외란 또는 잡음은 측정불가능하지만 한정된 범위 내에 있다고 가정한다. 이러한 모델은 ARMA(Autoregressive Moving-average)벡터 모델로 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$A(q^{-1})y_m(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w(t) \quad (1)$$

여기서 $\{y_m(t)\}$ 와 $\{u(t)\}$ 는 각각 $(\alpha \times 1)$ 출력벡터와 $(\beta \times 1)$ 입력벡터에 대한 샘플링 데이터 수열이며, $\{w(t)\}$ 는 $(\alpha \times 1)$ 외란 또는 잡음벡터 수열을 의미한다. $A(q^{-1})$ 과 $B(q^{-1})$ 는 각각 $(\alpha \times \alpha)$ 와 $(\beta \times \beta)$ 차원의 다항식 행렬로서 아래와 같이 표시

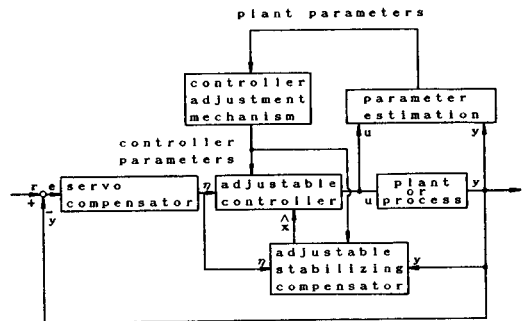


Fig. 1 Basic structure of the adaptive robust servocontroller (ARSC)

된다.

$$A(q^{-1}) = I_a + A_1q^{-1} + \dots + A_nq^{-n} \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1q^{-1} + \dots + B_mq^{-m} \quad (3)$$

여기서, q^{-1} 은 후진연산자(backward-shift operator)이며, n 은 제어대상계 모델의 차원을 표시하는 정수이며, 정수 m 은 $m \leq n-1$ 을 만족하도록 정한다.

제어대상계 모델 (1)은 아래와 같이 상태벡터를 정의함에 따라서, 블록관측가능기본형(block observable canonical form)^(7,8)으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= B_m u(t-1) \\ x_2(t) &= x_1(t-1) + B_{m-1} u(t-1) \\ &\vdots \\ x_a(t) &= x_{a-1}(t-1) - A_n y_m(t-1) + B_{n-a} u(t-1) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_{n-1}(t-1) - A_d y_m(t-1) + B_0 u(t-1) \\ &\vdots \\ x_{N-1}(t) &= x_{N-2}(t-1) - A_2 y_m(t-1) \\ x_N(t) &= x_{N-1}(t-1) - A_1 y_m(t-1) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $N = n + d - 1$, $m \leq n - 1$, $x_i(\cdot) \in R^{\alpha-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$)

또는, 식 (4)를 간결하게 표현하여,

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) & (5) \\ y_m(t) = C_m x(t) + w(t) & (6) \end{cases}$$

여기서,

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -A_N \\ I & 0 & \dots & 0 & -A_{N-1} \\ 0 & I & \dots & 0 & -A_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & -A_1 \end{bmatrix} \quad \Gamma \equiv \begin{bmatrix} B_m \\ B_{m-1} \\ \vdots \\ B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m \equiv [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I]$$

여기서, $i > n$ 인 경우, $A_i = 0$ 이다.

2.2 모델변수 추정기

제어대상계 모델 (1)의 시스템차원 n 과 지연계수 d 는 알려져 있거나, 오프라인 事前시험기법^(9,10)에 의하여 추정할수 있다고 생각하면, 출력분리형 다수입력 다수출력 시스템으로 가정하여, 아래와 같은 형태로 전개할수 있다.

$$\begin{aligned} y_{m1}(t) &\equiv \phi(t-1)^T \theta_1 + w_1(t) \\ y_{m2}(t) &\equiv \phi(t-1)^T \theta_2 + w_2(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

$$y_{ma}(t) \equiv \phi(t-1)^T \theta_a + w_a(t)$$

여기서,

$y_{mi}(t)$ ≡ 출력벡터 y_m 의 i 번째 요소

$w_i(t)$ ≡ 한정된 잡음벡터 w 의 i 번째 요소

θ_i ≡ 확장행렬 $[-A_1, -A_2, \dots, -A_n,$

$B_0, \dots, B_m]$ 의 i 번째 행벡터

$\phi(t-1) \equiv [y_m(t-1)^T, y_m(t-2)^T, \dots,$

$y_m(t-n)^T, u(t-d)^T, \dots,$

$u(t-d-m)^T]$

모델변수 θ_i ($i=1, 2, \dots, a$)는 순환식 최소자승법⁽¹¹⁾으로 온라인 추정한다. 제3장에 자세한 알고리즘을 요약하였다.

2.3 견실한 서보제어기의 구조

Davison은 견실한 서보제어기는 서보보상기, 안정화보상기와 폐환제어기로 이루어질 수 있음을 보였다⁽¹⁾. 본 연구에서는 이러한 Davison의 견실한 서보제어기를 아래와 같이 이산시간제어기(discrete time controller)로 변형시켜서, 적응제어기의 구조로 사용할 수 있도록 하였다.

제어대상계 모델 (5)의 변수를, 확실성등가법칙(certainty equivalence principle)에 의거하여, 추정치로 대체하면,

$$x(t+1) = \hat{\Phi} x(t) + \hat{\Gamma} u(t) \quad (8)$$

$$y_m(t) = C_m x(t) + w(t) \quad (9)$$

또한, $y(t) = Cx(t)$, $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 이며, $\hat{\Phi}$, $\hat{\Gamma}$ 는 각각 Φ , Γ 의 추정치이다. 그리고, $x(t) \in R^{aN}$, $y_m(t) \in R^a$, $w(t) \in R^a$, $u(t) \in R^p$ 이며, $y(t)$ 는 추종제어 출력벡터이고, $y_r(t)$ 는 $y(t)$ 에 대한 추종지령벡터이다.

$y_r \in R^r$ 과 w 의 동특성모우드는 증근을 포함하여 아래와 같이 최소공배 고유치(least common eigenvalue)로 표시할 수 있다.

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p$$

이에 대한 특성방정식은 아래와 같이 정의된다.

$$\mu^p + \delta_p \mu^{p-1} + \dots + \delta_2 \mu + \delta_1 \equiv \prod_{i=1}^p (\mu - \mu_i)$$

또한, 추후에 사용하기 위하여 아래와 같은 행렬을 정의한다.

$$C \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 & \dots & -\delta_p \end{bmatrix} \in R^{p \times p} \quad (10)$$

지령입력벡터 y_r 과 잡음벡터 w 의 동특성모우드를 고려한 서보 보상기는 아래와 같이 정의된다. 이것은 추종정밀도 보장을 위한 적분제어기의 개념을 일반적으로 확장한 것으로서, 추종뿐만 아니라 일반적인 추적제어까지 고려한 것이다.

$$\eta(t+1) = C^* \eta(t) + B^* e(t) \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \eta(t) &\in R^{\rho}, \quad e(t) \equiv y(t) - y_r(t), \\ C^* &\equiv T[\text{block diag}(C, C, C, \dots, C)] T^{*1} \\ &\quad (C \text{의 개수} \equiv r) \end{aligned}$$

$$B^* \equiv TB$$

여기서, T 는 특이하지 않은 (nonsingular) 실수행렬이고, $B \in R^{\rho \times r}$ 은

$$[\text{block diag}(C, C, C, \dots, C), B]$$

를 제어가능(controllable)형태로 만드는 랭크 r 인 실수벡터이다.

서보 보상기 (11)을 제어대상계 모델 (8), (9)와 결합시키면 다음과 같은 확장시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \eta(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & 0 \\ B^* C & C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ -B^* \end{bmatrix} y_r(t) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_m(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (13)$$

위와 같은 확장시스템을 안정화시키기 위하여, 아래와 같은 안정화 보상기를 사용한다.

$$\epsilon(t+1) = G_o \epsilon(t) + G_1 y_m(t) + G_2 \eta(t) \quad (14)$$

$$\hat{x}(t) = G_3 y_m(t) + G_4 \epsilon(t) \quad (15)$$

여기서, $\epsilon(\cdot) \in R^s$, $s \leq \alpha(N-1)$ 이다.

위와 같은 안정화 보상기와 폐환제어기

$$u(t) = K_o \hat{x}(t) + K \eta(t) \quad (16)$$

를 확장시스템 (12), (13)과 결합시키면, 다음과 같은 총체적 폐루프계(global closed-loop system)가 구성된다.

$$\begin{aligned} X(t+1) &= \hat{\Phi}(K) X(t) + \hat{\Gamma}_1(K) w(t) \\ &\quad + \hat{\Gamma}_2(K) y_r(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$y_m(t) = C_m x(t) + w(t) \quad (18)$$

$$e(t) = Cx(t) - y_r(t) \quad (19)$$

$$u(t) = K_o G_3 y_m(t) + K_o G_4 \epsilon(t) + K \eta(t) \quad (20)$$

여기서,

$$X(t) \equiv [x(t), \eta(t), \epsilon(t)]^T \in R^M,$$

$$M \equiv \alpha(N+p) + s \quad (21)$$

$$\hat{\Phi}(K) \equiv \begin{bmatrix} \hat{\Phi} + \hat{\Gamma} K_o G_3 C_m & \hat{\Gamma} K & \hat{\Gamma} K_o G_4 \\ B^* C & C^* & 0 \\ G_1 C_m & G_2 & G_o \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\hat{\Gamma}_1(K) \equiv \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} K_o G_3 \\ B^* \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\hat{\Gamma}_2(K) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -B^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

또한, K 는 서보제어기의 이득벡터를 의미한다.

$$K \equiv [K, K_o, G_o, G_1, G_2, G_3, G_4] \quad (25)$$

위와 같이 구성되는 서보제어기는 다음과 같은 성질을 갖는다

(1) 제어대상계 모델 변수에 대한 교란이 $\hat{\Phi}$ 를 불안정하게 만들지 않으며, $\hat{\Phi}$ 가 항상 점근적으로 안정(asymptotically stable)하고,

(2) $(C_m, \hat{\Phi}, \hat{\Gamma})$ 가 집중고정모우드(centralized fixed mode)⁽¹²⁾를 가지지 않으며, 즉, $(\hat{\Phi}, \hat{\Gamma})$ 가 제어가능(controllable)하고, 동시에, $(C_m, \hat{\Phi})$ 가 관측가능(observable)하고,

(3) 측정되는 출력의 수효 α 가 제어대상 출력의 수효 r 보다 크거나 같으며,

(4) $(C_m, \hat{\Phi}, \hat{\Gamma}, 0)$ 의 전이제로(transmission zero)⁽¹³⁾가 $y_r(t)$ 와 $w(t)$ 의 동특성모우드와 일치하지 않고,

(5) 제어대상 출력이 물리적으로 측정가능하다면, 어떠한 극배치에 대해서도, 추종 및 추적오차를 제로로 하는 제어이득벡터 K 가 항상 존재하며, 동시에, 서보제어기의 견실성이 보장된다⁽¹⁴⁾.

2.4 서보제어기 이득벡터의 온라인조정

총체적 폐루프계 (17)이 점근적으로 안정할 뿐만 아니라 특정한 댐핑계수를 갖게하기 위해서는, 서보제어기 이득벡터 K 를 온라인으로 조정하여, 폐루프계행렬 $\hat{\Phi}(K)$ 가 지정된 고유치(eigenvalues)를 갖도록 해야한다.

Bezanson과 Harris⁽⁹⁾는 자기동조(self-tuning) 제어기에 사용할 목적으로 폐루프계 행렬을 제어기 이득벡터에 대한 선형방정식으로 표시하는 방법을 제시했으나, 제어가능 블록 기본형(controllable block canonical form)으로의 변형계산을 온라인으로 처리하기에는 상당한 계산량이 요구된다.

본 연구에서는 제어기 이득벡터 K 를 다음의 방법을 써서 온라인으로 구한다. 폐루프계 행렬 $\hat{\Phi}(K)$ 의 특성방정식은 아래와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} J(\mu, K) &\equiv \det\{\mu I - \hat{\Phi}(K)\} \\ &\equiv \mu^M + d_1 \mu^{M-1} + \dots + d_{M-1} \mu \end{aligned} \quad (26)$$

$$+ d_M = 0 \quad (27)$$

여기서, $d_i (i=1, \dots, M)$ 을 구하기 위하여 아래의 정리를 이용한다.

정리 2.1

특이하지 않은 정방형 $n \times n$ 행렬 $A \equiv \{a_{ij} | i, j=1, 2, \dots, n\}$ 의 특성방정식은 아래와 같이 표시된다.

$$\det\{\mu I - A\} \equiv \mu^n + d_1 \mu^{n-1} + \dots + d_{n-1} \mu + d_n = 0 \quad (28)$$

여기서,

$$d_k = \sum_{i_1=1}^{n-k+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-k+2} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^n (-1)^k \det^s A_k \quad (29)$$

여기서, ${}^s A_k$ 는 $k \times k$ 행렬로서, 아래와 같이 정의되는 A 의 부분행렬이다.

$${}^s A_k \equiv \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix} \quad (30)$$

(증명) 부록참조 ◆

정리 2.1를 컴퓨터 알고리즘화하여, 특성방정식 (27)의 계수를 아래와 같은 형태로 계통적으로 구할 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$d_i = f_i(S, K) \quad i=1, 2, \dots, M \quad (31)$$

여기서,

$$S \equiv \{\hat{\Phi}, \hat{\Gamma}, B^*, C^*, C_m, C\}, \\ K \equiv \{K, K_o, G_o, G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

폐루프계 행렬이 지정된 고유치를 갖도록 하는 서보제어기 이득벡터 K 를 결정하기 위하여, 아래와 같은 연립 비선형 방정식을 세운다.

$$d_i^* = f_i(S, K) \quad i=1, 2, \dots, M \quad (32)$$

여기서, $d_i^* (i=1, 2, \dots, M)$ 은 다음과 같은 방정식의 계수이다.

$$\mu^M + d_1^* \mu^{M-1} + \dots + d_{M-1}^* \mu + d_M^* = 0 \quad (33)$$

上記 방정식의 근들은 폐루프계 행렬의 지정된 고유치들과 같다.

그러나, 연립 비선형방정식 (32)를 직접 온라인으로 풀어내는 것은 계산량이 많아지므로, 적응제어기에 사용할 목적으로, K 에서 M 개의 제어이득을 선택하여, $f_i(S, K) (i=1, 2, \dots, M)$ 가 선택된 M 개의 제어이득에 대해서 연립 선형방정식이 되도록 만든다.

선택된 M 개의 제어이득을 K^v , 나머지 제어이득을 K^r 이라고 하면,

$$K \equiv \{K^r; K^v\} \quad (34)$$

이고,

$$K^v \equiv \{k_1^v, k_2^v, \dots, k_M^v\} \quad (35)$$

이며, 연립선형방정식은 아래와 같이 표시된다.

$$P(S, K^r) K^v = D^* + \delta(S, K^r) \quad (36)$$

여기서,

$$D^* \equiv [d_1^*, d_2^*, \dots, d_M^*]^T, \\ P(\cdot) \in R^{M \times M}, \delta(\cdot) \in R^{M \times 1}$$

제어이득 K^r 은, 안정화보상기를 불안정하게 하거나, $P(\cdot)$ 행렬을 특이하게 만들지 않는 범위에서, 임의의 값을 지정한다. 제어이득 K^v 는 가우시안 소거법(Gaussian Elimination)을 이용하여 온라인으로 연립선형방정식 (36)을 풀어내어 구한다.

3. ARSC 온라인 알고리즘

제2장에서 설명된 ARSC의 구조를 바탕으로, 단계별로 ARSC 온라인 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

오프라인 준비작업

- (1) 제어대상계 모델의 차원 n 과 입력과 출력사이의 시간지연 d 를 구한다.
- (2) 지령입력과 잡음의 동적모드를 결정하고, 식 (10)에 의해서 C 를 구성한다.
- (3) 식 (36)과 같은 연립 선형방정식을 구한다.
- (4) 모델변수 추정치와 제어이득벡터의 초기치를 결정한다.

온라인 알고리즘

- (5) 모델변수 추정치 계산 : 불감대(dead-zone)를 고려한 순환식 최소자승법 적용.

$i=1, 2, \dots, a$ 에 대해서

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + \frac{a_i(t-1) P_i(t-2) \phi(t-1) e_i(t)}{1 + a_i(t-1) \phi(t-1)^T P_i(t-2) \phi(t-1)} \quad (37)$$

여기서, $e_i(t) = y_{mi}(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}_i(t-1)$ 이며,

$$a_i(t-1) = \begin{cases} 1 & \frac{e_i(t)^2}{1 + \phi(t-1)^T P_i(t-2) \phi(t-1)} > \delta^2 > 0 \text{인 경우} \\ 0 & \text{그 밖의 경우} \end{cases}$$

이며, $\delta \leq \sup |w(t)|$ 이다.

(6) 상관(covariance) 벡터의 계산 :

$$P_i^*(t-1) = P_i(t-2) - \frac{a_i(t-1)P_i(t-2)\phi(t-1)^T P_i(t-2)}{1 + a_i(t-1)\phi(t-1)^T P_i(t-2)\phi(t-1)} \quad (38)$$

t/N 이 정수일 경우마다 아래와 같이 초기화시킨다.

$$P_i(t-1) = (1/k_o)I \quad (0 < k_o < \infty)$$

그 밖의 경우,

$$P_i(t-1) = P_i^*(t-1)$$

(7) 제어이득벡터의 계산 :

(i) t/N 이 정수일 경우마다 아래의 연립 선형방정식을 풀어서 새로운 제어이득벡터 $k^v(t)$ 를 구한다.

$$P(S, K^r) K^v(t) = D^* + \delta(S, K^r) \quad (39)$$

(ii) 그 밖의 경우, $K^v(t) = K^v(t-1)$

(8) 제어입력신호의 계산 :

$$\epsilon(t) = G_o \epsilon(t-1) + G_1 y_m(t-1) + G_2 \eta(t-1) \quad (40)$$

$$\eta(t) = C^* \eta(t-1) + B^* \{y(t-1) - y_r(t-1)\} \quad (41)$$

$$u(t) = K_o G_3 y_m(t) + K_o G_4 \epsilon(t) + K \eta(t) \quad (42)$$

(9) 다음 샘플링 시간에서 제 (5)단계로 복귀한다.

4. ARSC의 안정성과 수렴성

ARSC 온라인 알고리즘 (37)에서 (42)까지를 제어대상계 모델 (1)이나, 기본형으로 표시된 모델 (5)와 (6)에 응용할 경우, 제어대상계의 차원 n 과 시간지연 d 가 알려져있고, 제 2.3절에서 언급한 5개항의 가정들이 항상 만족된다면, 모델 변수 추정치 $\theta(t)$ 는 참값 $\hat{\theta}$ 에 지수함수적으로 수렴하고, $\{u(t)\}$, $\{y(t)\}$ 는 항상 한정된 안정상태(bounded stability)를 유지한다.

이러한 ARSC 온라인 알고리즘의 총체적인 안정성과 수렴성에 대해서는 Goodwin과 Sin⁽¹¹⁾의 총체적 수렴 이론의 결과를 응용하여 증명될 수 있다⁽¹⁵⁾.

5. ARSC 응용예제

Fig. 2와 같은 로봇 시스템의 단일 관절축에 대한 적응추적제어에 ARSC를 적용하는 경우를 들어 본다. 제어목표는 로봇트 아암이 $\theta = \pm \pi/4$ rad에

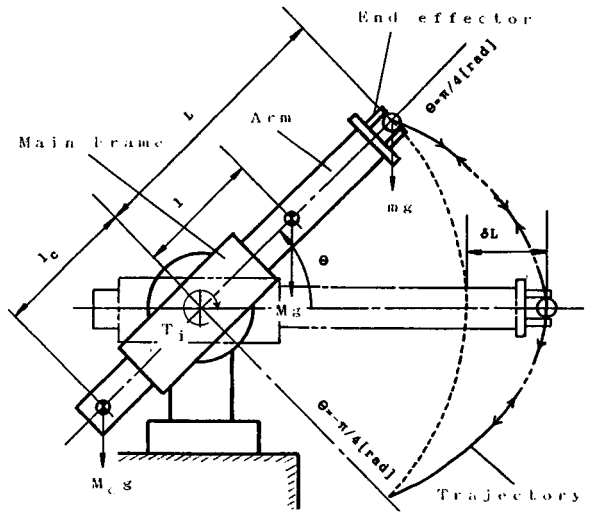


Fig. 2 A schematic diagram of the single joint robotic system

서 최대로 본체쪽으로 들어오고, $\theta=0$ 에서 δL 만큼 최대로 신장되는 운동을 할때, 로봇의 동특성 변화에 관계없이, θ 가 아래와 같은 지령입력대로 충실하게 추적되도록 제어하는 데 있다.

$$\theta_r = (\pi/4) \sin(\pi t/6) \quad (43)$$

實時間 시뮬레이션을 위하여, 실제의 로봇 단일 축을 대신해서, 아래와 같은 운동방정식을 사용한다⁽¹⁵⁾.

$$\theta(t) + a_1\theta(t-1) + a_2\theta(t-2) + a_3\cos[\theta(t-1)] = b_1v_2(t-1) \quad (44)$$

여기서,

θ : 로봇 암의 角위치 [rad]

v_i : 모터입력전압 [V]

$$a_1 = -4/(2 + C_1 T) + w_a \cos(2\theta_r),$$

$$a_2 = (2 - C_1 T)/(2 + C_1 T),$$

$$a_3 = 2C_2 T^2/(2 + C_1 T),$$

$$b_1 = 2C_3 T^2/(2 + C_1 T),$$

T : 샘플링 시간 [sec]

w_a : 임의의 잡음신호 [$0 < w_a < 0.5$]

이며, Fig. 2에서,

m : 소재 질량 [kg],

M : 암 질량 [kg],

M_c : 카운터밸런스 질량 [kg]

$L = L_o + \delta L \cos(2\theta_r)$: 회전중심에서 소재까지의 거리 [m]

$l = l_o + \delta L \cos(2\theta_r)$: 회전중심에서 암 무게

중심까지의 거리 [m]

$l_c = l_{co} + \delta L \cos(2\theta_r)$: 회전중심에서 카운터
밸런스 무게중심까지의 거리 [m]

$J_e = ML^2 + mL^2 + M_c l_c^2$: 관성 모우먼트 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]

F_v : 회전중심에서의 점성계수 [$\text{Nm} \cdot \text{sec}$]

$T_i = k_i v_i$: 모터 출력 토크 [Nm]

k_t : 모터 토크 이득 [Nm/V]

일때, C_1, C_2, C_3 는 각각 아래와 같다.

$$C_1 = F_v / J_e,$$

$$C_2 = (mL + Ml - M_c l_c) / J_e,$$

$$C_3 = k_t / J_e$$

본 예제에서는 $M=100\text{kg}$, $M_c=125\text{kg}$, $m=10\text{kg}$,
 $L_o=0.8\text{m}$, $l_{co}=0.4\text{m}$, $l_o=0.5\text{m}$, $\delta L=0.2\text{m}$,
 $F_v=100\text{Nm} \cdot \text{sec}$, $k_t=1200\text{Nm/V}$, $T=0.05\text{sec}$ 로
설정하였다. L, l, l_c 가 θ_r 의 함수이므로, 로봇암
의 신축에 따라서, J_e, C_1, C_2, C_3 등이 주기적으
로 변하고, 이에 따라서, 식(44)의 계수들 $a_1, a_2,$
 a_3, b_1 도 시간에 따라서 주기적으로 변화한다.

5.1 ARSC의 적용

제어대상계 모델은, 식 (44)가 2차원 시스템이므로,
 $\theta_s(t) + \phi_1 \theta_s(t-1) + \phi_2 \theta_s(t-2) = \theta_o v_{is}(t-1)$
(45)

이것을 블록 관측가능 기본형으로 표현하면,

$$x_1(t) = -\phi_2 \theta_s(t-1) + \theta_o v_{is}(t-1) \quad (46)$$

$$x_2(t) = x_1(t-1) - \phi_1 \theta_s(t-1) \quad (47)$$

또는,

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma v_{is}(t) \quad (48)$$

$$\theta_s(t) = C_m x(t) \quad (49)$$

여기서,

$$x(t) \equiv [x_1(t), x_2(t)]^T$$

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\phi_2 \\ 1 & -\phi_1 \end{bmatrix} \quad \Gamma \equiv \begin{bmatrix} \theta_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m \equiv [0 \quad 1]$$

$\theta_s(t)$ 에 대한 지령입력신호 $\theta_{rs}(t)$ 는

$$\begin{aligned} \theta_{rs}(\tau) &= \theta_{max} \sin(\Omega_o \tau) \\ (\theta_{max} &= \pi/4, \Omega_o = \pi/6) \end{aligned} \quad (50)$$

에서,

$$\theta_{rs}(t) - 2\cos(\Omega_o T) \theta_{rs}(t-1) + \theta_{rs}(t-2) = 0 \quad (51)$$

를 만족하며, 초기조건은 $\theta_{rs}(-1) = \theta_{rs}(-2) = 0$

이다.

식 (11)에서, 서보보상기는 $T=I, C^*=C, B^*$
 $=B$ 로 설정하여,

$$\eta(t+1) = C^* \eta(t) + B^* [\theta_s(t) - \theta_{rs}(t)] \quad (52)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(\Omega_o T) \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

안정화보상기는 식 (14)에 따라서,

$$\begin{aligned} \epsilon(t+1) &= \gamma_o \epsilon(t) + \gamma_1 \theta_s(t) \\ &+ [\gamma_{21}, \gamma_{22}] \eta(t) \end{aligned} \quad (53)$$

이며, 제환제어기는 식 (15) 및 (16)에 따라서,

$$v_{is}(t) = \gamma_3 \theta_s(t) + \gamma_4 \epsilon(t) + [k_{11}, k_{12}] \eta(t) \quad (54)$$

이다.

식 (52), (53), (54) 및 식 (48), (49)을 식
(22)에 대입하면, 페루프계 행렬을 Fig. 3과 같이
얻을 수 있다. 정리 2.1를 사용하여, 페루프계 행
렬의 특성방정식 계수를 컴퓨터로 구하면, 식 (32)
의 연립 비선형방정식이 아래와 같이 구해진다.

$$d_1^* = -\gamma_o - h_o + \hat{\phi}_1 \quad (55)$$

$$d_2^* = -\gamma_3 \hat{\theta}_o + \gamma_o (h_o - \hat{\phi}_1) + \hat{\phi}_2 - h_o \hat{\phi}_1 + 1 \quad (56)$$

$$\begin{aligned} d_3^* &= -k_{12} \hat{\theta}_o - k_{11} \hat{\theta}_o + \gamma_3 \hat{\theta}_o (\gamma_o + h_o) - \gamma_1 \hat{\theta}_o \gamma_4 \\ &- \gamma_o (\hat{\phi}_2 - h_o \hat{\phi}_1 + 1) - h_o \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_1 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} d_4^* &= k_{12} \hat{\theta}_o (\gamma_o + 1) + k_{11} \hat{\theta}_o (\gamma_o + h_o - 1) \\ &- \gamma_3 \hat{\theta}_o (\gamma_o h_o + 1) + \gamma_1 \hat{\theta}_o \gamma_4 h_o \\ &+ \gamma_o (\hat{\phi}_2 h_o - \hat{\phi}_1) + \hat{\phi}_2 \\ &- \hat{\theta}_o \gamma_4 (\gamma_{21} + \gamma_{22}) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} d_5^* &= -k_{12} \hat{\theta}_o \gamma_o - k_{11} \hat{\theta}_o \gamma_o (h_o - 1) + \gamma_3 \gamma_o \hat{\theta}_o \\ &- \gamma_1 \hat{\theta}_o \gamma_4 - \gamma_o \hat{\phi}_2 + \hat{\theta}_o \gamma_4 (\gamma_{22} + \gamma_{21} h_o - \gamma_{21}) \end{aligned} \quad (59)$$

여기서,

$$h_o = 2\cos(\Omega_o T) \text{이다.}$$

식 (55)와 (56)에서, 제어이득 γ_o, γ_3 는 직접 구
해진다. 즉,

0	$-\hat{\phi}_2$ $+ \gamma_3 \hat{\theta}_o$	$k_{11} \hat{\theta}_o$	$k_{12} \hat{\theta}_o$	$\gamma_4 \hat{\theta}_o$
1	$-\hat{\phi}_1$	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	-1	$2\cos(\Omega_o T)$	0
0	γ_1	γ_{21}	γ_{22}	γ_o

Fig. 3 Closed-loop system matrix $\hat{\Phi}(K)$

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2\cos(\Omega_0 T) \\
 h_1 &= \gamma_4(\gamma_{21} + \gamma_{22}) \\
 h_2 &= \gamma_4(\gamma_{22} + \gamma_{21}h_0 - \gamma_{21}) \\
 h_3 &= \hat{\phi}_2 h_0 - \hat{\phi}_1
 \end{aligned}$$

-1	-1	$-\gamma_4$
$\gamma_0 + h_0 - 1$	$\gamma_0 + 1$	$\gamma_4 h_0$
$-\gamma_0(h_0 - 1)$	$-\gamma_0$	$-\gamma_4$

(a) $P(S, K^r)$

$$\begin{aligned}
 h_4 &= \hat{\phi}_2 - h_0 \hat{\phi}_1 + 1 \\
 \gamma_0 &= \hat{\phi}_1 - h_0 - d_1^* \\
 \gamma_3 &= [h_4 + \gamma_0(h_0 - \hat{\phi}_1) - d_2^*] / \hat{\theta}_0 \\
 \text{where } \hat{\theta}_0 &\neq 0
 \end{aligned}$$

$(d_3^* + \gamma_0 h_4 + h_0 \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1) / \hat{\theta}_0 - \gamma_3(\gamma_0 + h_0)$
$(d_4^* - \gamma_0 h_3 - \hat{\phi}_2) / \hat{\theta}_0 + h_1 + \gamma_3(\gamma_0 h_0 + 1)$
$(d_5^* + \gamma_0 \hat{\phi}_2) / \hat{\theta}_0 - h_2 - \gamma_3 \gamma_0$

(b) $\delta(D^*, S, K^r)$

Fig. 4 $P(\cdot)$ and $\delta(\cdot)$ of the linear equation (62)

$$\gamma_0 = \hat{\phi}_1 - h_0 - d_1^* \tag{60}$$

$$\gamma_3 = (\hat{\phi}_2 - h_0 \hat{\phi}_1 + 1 + \gamma_0(h_0 - \hat{\phi}_1) - d_2^*) / \hat{\theta}_0 \tag{61}$$

$(\hat{\theta}_0 \neq 0)$

제어이득 k_{11}, k_{12}, γ_1 을 K^v 로 선택하고, 식 (57) ~ (59)를 바꾸어 쓰면, 아래와 같은 연립 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$P(S, K^r) K^v = \delta(D^*, S, K^r) \tag{62}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 S &\equiv \{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\theta}_0\} \\
 K^r &\equiv \{\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_4; \gamma_0, \gamma_3\} \\
 K^v &\equiv \{k_{11}, k_{12}, \gamma_1\} \\
 P(\cdot), \delta(\cdot) &: \text{Fig. 4참조}
 \end{aligned}$$

5.2 시뮬레이션 결과

식 (45)의 모델변수 ϕ_1, ϕ_2, θ_0 가 未知이므로, 오프라인 준비작업의 하나로서, 예비시험과정을 통해서, 모델변수 추정치의 초기치를 선택한다.

Fig. 5는 예비시험과정에서 사용된 모터입력전압

v_i 와 이에 따른 로봇 암의 角위치 θ 를 보여 주는 것으로서, 임의의 잡음신호는 $w_d = 0.2$ 로 가정했다. 예비시험의 초기치로서

$$\hat{\phi}_1 = 0.0, \hat{\phi}_2 = 0.0, \hat{\theta}_0 = 0.25 \tag{63}$$

의 임의의 값을 사용할 경우, Fig. 6에서와 같이 모델변수 추정치는

$$\hat{\phi}_1 = -1.89, \hat{\phi}_2 = 0.88, \hat{\theta}_0 = 0.35 \tag{64}$$

로 수렴하며, 이 값을 온라인 모델변수 추정 알고리즘의 초기치로 사용하였다.

또한, 온라인 ARSC알고리즘을 적용하기 전에, 제2.3절의 5개항의 가정들이 만족되는지 점검해 보아야 한다.

본 예제의 경우,

$$\begin{aligned}
 \hat{\Phi} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\phi}_2 \\ 1 & -\hat{\phi}_1 \end{bmatrix} \\
 \hat{\Gamma} &\equiv \begin{bmatrix} \hat{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C_m &\equiv [0 \ 1]
 \end{aligned}$$

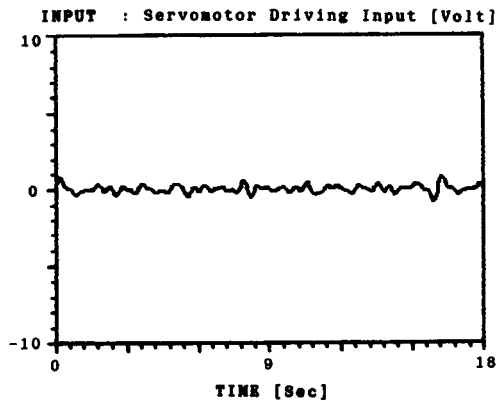
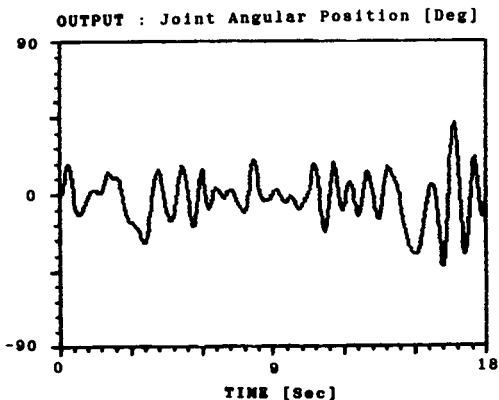


Fig. 5 Motor input voltage and angular position of robot arm at the test-and-learning stage

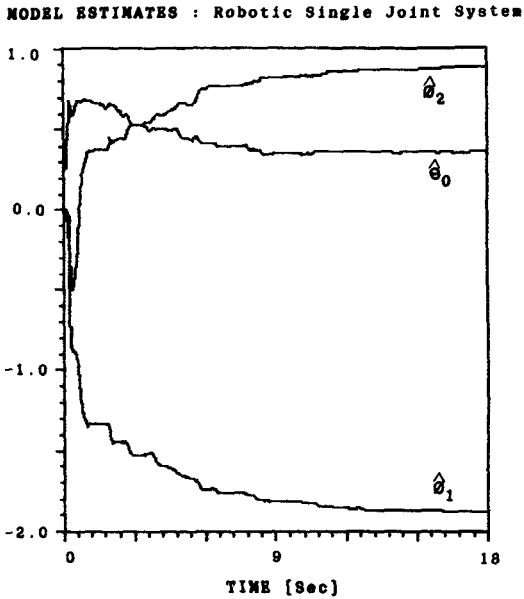


Fig. 6 Estimates of model parameters at the test-and-learning stage

이므로, $\hat{\theta}$ 이 점근적으로 안정할 조건은

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 &> -1, \\ \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 &< 1, \\ |\hat{\theta}_2| &< 1 \end{aligned} \quad (65)$$

이고, 초기치 (64)는上記조건을 만족한다.

또한, $\hat{\theta}_0 \neq 0$ 이면, $(\hat{\theta}, \hat{\Gamma})$ 이 항상 제어가능하며, $(C_m, \hat{\theta})$ 은 항상 관측가능하고, 측정되는 출력은 로봇 암의 角위치로서, 제어대상출력과 일치하며, 물리적으로 측정가능하다.

마지막으로, $(C_m, \hat{\theta}, \hat{\Gamma}, 0)$ 의 전이제로는, SISO시스템의 경우에는, 전달함수의 개회로제로를 의미하므로⁽¹³⁾, 본 예제에서는, 시간지연 $d=1$ 로 인하여, $z=0.0$ (원점)에 위치한다. 이것은, 식(51)에서와 같이

$$z^2 - 2\cos(Q_0 z) + 1 = 0 \quad (66)$$

로 표시되는 지령입력신호의 동특성모우드와 일치하지 않는다.

따라서, 요약하여, $\hat{\theta}_0 \neq 0$ 이고, 식 (65)가 항상 만족한다면, 어떠한 극배치에도, 온라인 ARSC알고리즘은 추적오차를 제로로 하는 제어이득벡터 K 를 계산해 낼 수 있고, 동시에, 서보제어기의 건설성을 보장한다.

ARSC는 기본적으로 극배치 적응제어 알고리즘

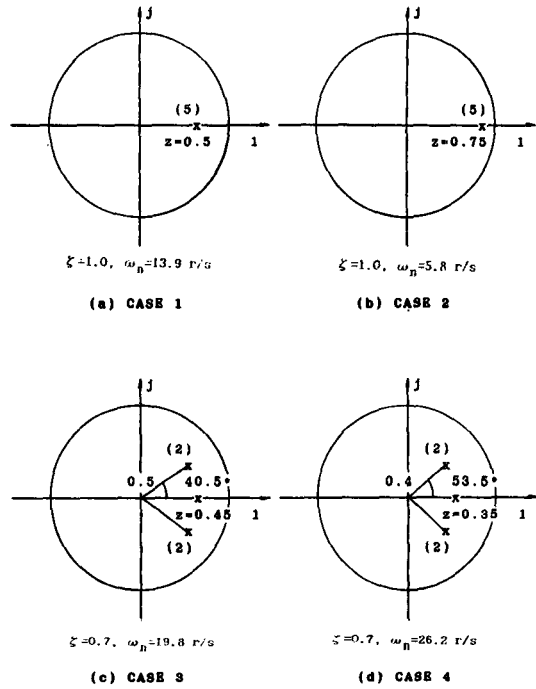


Fig. 7 Four cases of desired closed-loop pole assignment

이다. 그러나, 이것은 원하는 페루프극이 알고리즘 내에서 직접적으로 지정되고, 변경하고 싶은 경우, 즉시 대응할 수 있다는 점에서, Francis⁽²⁾, Silveira⁽³⁾ 및 Song⁽⁴⁾등이 제시한 건설한 적응제어기법과 다르다.

이것을 보이기 위해서, Fig. 7과 같은 네가지 경우의 페루프 극배치 집합을 선정하였다. CASE 1과 CASE 2는 각각 $z=0.5$ 와 $z=0.75$ 에 5개의 페루프극을 모두 배치하였을 경우이고, CASE 3과 CASE 4는 각각 $z=0.45$ 와 $z=0.35$ 에 한개의 실수극을, $z=0.5(\cos 40.5^\circ \pm j\sin 40.5^\circ)$ 와 $z=0.4(\cos 53.5^\circ \pm j\sin 53.5^\circ)$ 에 각각 네 개의 페루프극을 배치한 경우이다. 각각의 경우에서의 대표적인 시스템 댐핑계수와 고유진동수를 ζ 와 ω_n 으로 표시했다.

Fig. 7의 네가지 페루프 극배치 집합의 경우에 대해서, 식(64)의 초기치를 사용하여, 實時間 시뮬레이션을 실시한 결과를 Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10과 Fig. 11에 보인다. 샘플링 시간은 50ms이었으며, 온라인 알고리즘상의 상관벡터의 초기화와 새로운 제어이득의 계산은 1s간격으로 실시하였고, 고정제

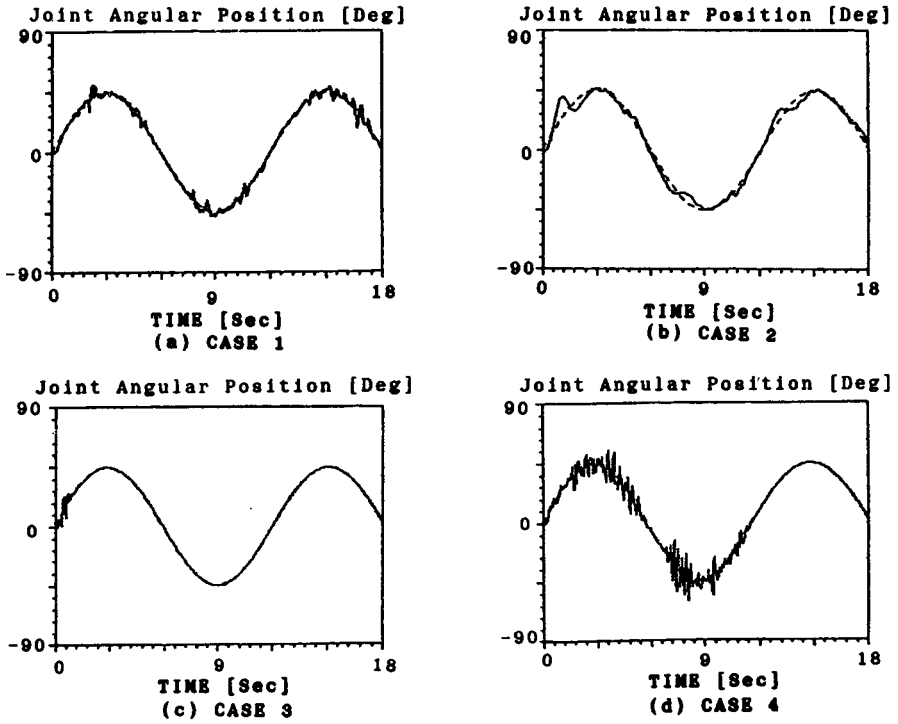


Fig. 8 Variation of controlled output : angular position of robot arm

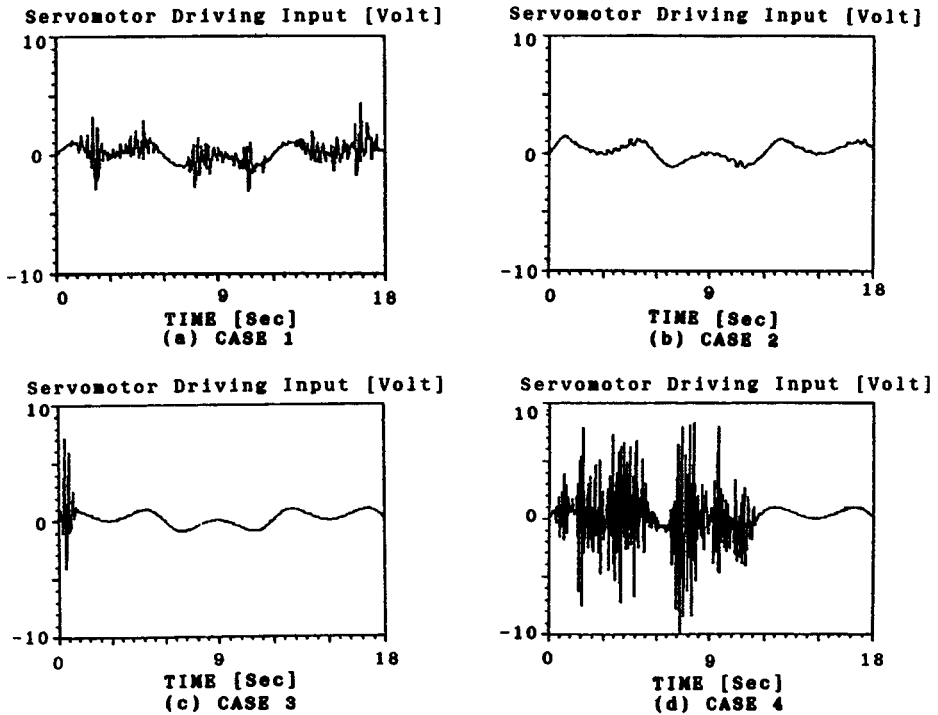


Fig. 9 Variation of control input : motor input voltage

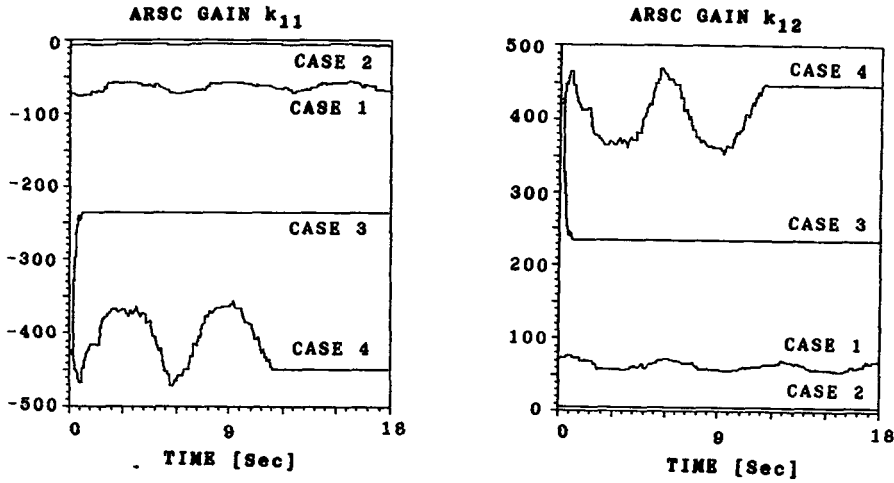


Fig. 10 Typical examples of the variation of ARSC controller parameters

어이득으로 선정된 γ_{21} , γ_{22} , γ_4 는 각각 임의로 0.5, 0.5, 1.0으로 설정하였다.

Fig. 8은, 上記 네가지 경우의 극배치에 대해서, 로봇 암의 위치 θ 가 점선으로 표시된 지령입력신호 θ_r 를 각각 어떻게 추적하는가를 보인 것이고, 이 때의 모터 입력 전압 v_i 의 변화는 Fig. 9에서와 같다.

또한, Fig. 10은, 가변제어이득 γ_0 , γ_1 , γ_3 , k_{11} , k_{12} 중에서, k_{11} 과 k_{12} 를 선정하여, 上記 네가지 경우의 극배치에 대한 변화를 표시한 것이고, Fig. 11은 모델변수 ϕ_1 , ϕ_2 , θ_0 에 대한 추정 결과를 대표적으로 보인 것으로서, 로봇 암의 회전운동에 따라서, 모델변수가 주기적인 변화를 한다는 사실을 여기서 명백히 알 수 있다.

CASE 1과 CASE 2, 또는 CASE 1과 CASE 4를 비교하여 보면, 극배치가 $z=0$ 원점에서 멀어질수록 제어이득의 크기가 작아져서 (Fig. 10), 제어입력 v_i 의 진폭이 작아지고 (Fig. 9), 이에따라서, 지령입력 θ_r 에 대한 제어출력 θ 의 추적정밀도가 낮아진다는 것을 알 수 있으며 (Fig. 8), 이것은 z -영역에서의 페루프 극배치에 대한 시간영역에서의 이론적인 반응특성과 일치한다.

Fig. 8에서 Fig. 10까지의 CASE 3은 ARSC의 견실성을 단적으로 보여주는 實例이다. Fig. 10의 제어이득 k_{11} 과 k_{12} 의 변화곡선 중 CASE 3을 보면, 초기의 짧은 적응기간을 제외하고는 제어이득이 일정함을 알 수 있다. Fig. 11에서와 같이 모델변수 ϕ_1 , ϕ_2 , θ_0 가 주기적으로 변화함에도 불구하고, 일정한 제어이득으로 Fig. 8의 CASE 3에서와 같이 완벽한 추적제어를 수행할 수 있다.

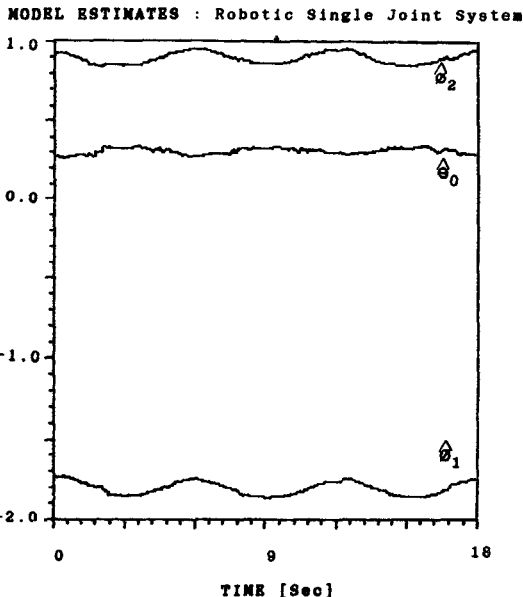


Fig. 11 Estimates of model parameters at the real-time simulation

6. 결 론

(1) 본 논문에서 제시된 견실한 서보적응제어기법 (ARSC: Adaptive Robust Servocontrol

Scheme)은, 제어대상계 모델의 불확실성에 대한 견실성과, 내부 동적특성 모델링 원칙(Internal Model Principle)에 의거한 엄격한 점근적 추종 및 추적성을 동시에 보장한다.

(2) 제 2.3절의 5개항의 가정들이 만족되면, 온라인 ARSC알고리즘은 항상 총체적으로 수렴하며 안정하다.

(3) 지정된 폐루프 극배치(desired closed-loop pole assignment)가 온라인 ARSC알고리즘 상에서 직접적으로 이루어질 수 있다.

(4) 實時間 시뮬레이션을 통하여, ARSC의 견실성과 엄격한 점근적 추적성을 예시하였다.

참 고 문 헌

(1) Davison, E.J., 1976, "The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-21, No.1, pp.25~34.

(2) Francis, B. and Vidyasagar, M., 1978, "Adaptive Robust Regulation of Linear Multivariable Systems: Tracking Signals Generated by Models with Unknown Parameters", 17th IEEE Conference on Decision and Control.

(3) Silveira, H.M. and Doraiswami, R., 1984, "New Structure for an Adaptive Servomechanism Controller", IEE Proceedings, Vol.131, Part D, No.2, pp.64~68.

(4) Song, H.K., Shah, S.L. and Fisher, D.G., 1986, "A Self-tuning Robust Controller", Automatica, Vol.22, No.5, pp.521~531.

(5) Kreisselmeier, G. and Anderson, B.D.O., 1986, "Robust Model Reference Adaptive Control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-31, No.2, pp.127~133.

(6) Elliott, H. and Goodwin, G.C., 1984, "Adaptive Implementation of the Internal Model Principle", 23rd IEEE Conference on Decision and Control, pp.1292~1305.

(7) Maroulas, J. and Barnett, S., 1979, "Canonical Forms for Time-invariant Linear Control Systems: A Survey with Extensions. II. Multivariable Case", Int. J. of Systems Sci., Vol.10, No.1, pp.33~50.

(8) Bezanson, L.W. and Harris, S.L., 1984, "State-space Design of Multivariable Self-tuning Regulators", Int. J. of Control, Vol.39, No.2, pp.395~411.

(9) Pandit, S.M. and Wu, S.M., 1983, "Time Series and

System Analysis with Applications", J.Wiley.

(10) Wu, S.M., 1977, "Dynamic Data System: A New Modeling Approach", ASME J. of Engineering for Industry, Series B, Vol.99, pp.708~714.

(11) Goodwin, G.C. and Sin, K.S., 1984, "Adaptive Filtering, Prediction and Control", Prentice-Hall, New Jersey.

(12) Davison, E.J., Gesing, W. and Wang, S.H., 1978, "An Algorithm for Obtaining the Minimal Realization of a Linear Time-invariant System and Determining If a System is Stabilizable-Detectable", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-23, pp.1048~1054.

(13) Davison, E.J. and Wang, S.H., 1974, "Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Time-invariant Systems", Automatica, Vol.10, pp.643~658.

(14) Davison, E.J. and Ferguson, I.J., 1981, "The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-26, No.1, pp.93~110.

(15) Kim, J.W., 1987, "Adaptive Robust Servocontroller Design for Feedrate Maximization of Machining Processes", Ph. D. Thesis, University of Wisconsin-Madison.

부 록

정리 2.1의 증명

아래와 같은 항등식을 정의한다.

$$\det \begin{bmatrix} \mu_1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \mu_2 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \mu_n - a_{nn} \end{bmatrix} \equiv \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n + d_{11}(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_{n-1}) + \cdots + d_{1n_1}(\mu_2 \mu_3 \mu_4 \cdots \mu_n) + d_{21}(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_{n-2}) + \cdots + d_{2n_2}(\mu_3 \mu_4 \mu_5 \cdots \mu_n) + \cdots + d_{k1}(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_{n-k}) + \cdots + d_{kn_k}(\mu_{k+1} \mu_{k+2} \cdots \mu_n) + \cdots + d_{(n-1)1}(\mu_1) + \cdots + d_{(n-1)n_{n-1}}(\mu_n) + d_n \tag{A.1}$$

여기서 $n_k \equiv {}_n C_k$ 이다.
 $+ d_n$ 위의 항등식 (A.1)에 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$ 를 대입하면, 아래와 같은 식이 얻어진다.

$$\det(\mu I - A) \equiv \mu^n + d_1 \mu^{n-1} + \dots + d_{n-1} \mu + d_n \quad (\text{A.2})$$

여기서

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{n-k} d_{ki} \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.4})$$

上記 $d_{ki} (i=1, 2, \dots, n)$ 는 항등식 (A.1)의 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 중에서 k 개의 μ 를 선택하여 0을 대입함으로써 구할 수 있다. 우선, n 개의 μ 를 모두 0으로 대입하면, 즉, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ 로 놓으면,

$$d_n = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \quad (\text{A.5})$$

을 얻을 수 있다.

다음으로,

$\mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n = 0$ 을 대입하면,

$$\det \begin{bmatrix} \mu - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} = d_n + \mu d_{(n-1)1} \quad (\text{A.6})$$

여기서,

$$d_{(n-1)1} = \det \begin{bmatrix} -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \det[^s A_k | i_k = k, k=2, \dots, n]$$

이러한 방법으로, $\{d_{ki} | k=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n\}$ 을 얻을 수 있고, 이것을 식 (A.4)에 대입하여, 식 (29)를 구할 수 있다.