



大韓熔接學會誌  
第8卷第2號 1990年 6月  
Journal of the Korean  
Welding Society  
Vol. 8, No. 2, Jun., 1990

## 열전도 해석을 위한 한 방법<sup>+</sup>

서승일\* · 장창두\*\*

### A Method for Analyzing Heat Conduction

S.I. Seo\*, C.D. Jang\*\*

**Key Words** : Heat Conduction(열전도), Analytic Solution(해석적인 해), Computational Method(수치적 방법), Quasi-Stationary State(준정상 상태), Non-Stationary State(비정상 상태), Finite Difference Method(유한차분법), Point Heat Source(점열원)

#### Abstract

Analytic solutions of heat conduction during welding which were first found by Rosenthal have some restrictions. One of these is that models to which analytic solutions can be applied must have simple geometric shape, and another is that quasi-stationary state must be created.

On the other hand, computational methods developed recently with the aid of the computer can overcome these shortcomings, but the methods raise problems from economic point of view when they are applied to 3 dimensional problems.

Taking account of these problems, a new method combining the analytic method with the computational one is proposed. This method can be used in weldments with complicated geometric shape in non-stationary state, but with the aid of the analytic method can reduce the computing time.

#### 1. 서 론

용접 중의 열전도 현상은 Rosenthal에 의해 최

초로 해석되었다<sup>1)</sup>. 그런데 Rosenthal의 해는 준 정상 상태(quasi-stationary state)를 가정한 것이 고, 적용 모델도 간단한 기하학적 형상을 갖는 것

+ '89 대한용접학회 춘계 학술 발표대회 발표

\* 정회원, 코리아 타코마 조선공업(주), 기술개발 연구원

\*\* 정회원, 서울대학교 공과대학

에 국한되고 있다. 비정상 상태(non-stationary state)의 열전도 현상은 중첩법(superposition)에 의해 해석될 수 있지만, 이 방법은 간단한 기하학적 형상일 경우에만 적용 가능하다.

근래에는 전산기의 도움으로 수치적 방법에 의한 열전도 해석이 열전도 상태와 기하학적 상태에 구애됨이 없이 적용 가능하다. 그러나 3차원의 기하학적 형상 모델을 수치적 방법으로 열전도 해석하는 것은 많은 입력 자료 준비와 계산 시간으로 인해 경제성에 있어서 문제를 초래하게 된다.

실제의 용접 결합부는 대부분 단면이 복잡하여 3차원으로 간주되어야 하지만, 용접 진행 방향으로는 단면이 일정하고 용접 진행 방향의 모델 크기가 다른 치수에 비해 훨씬 크다는 특징을 가지고 있다. 이런 특징을 적절히 이용하여, 해석적 방법의 한계를 극복하면서 수치적 방법의 결점을 보완할 수 있는 열전도 해석 방법을 제안한다.

## 2. 기본 가정

용접 중의 열전도 해석을 위한 Rosenthal 해에 다음의 제한 조건이 있다.

- 열전도에 관계되는 정수의 온도 의존성을 무시한다.
- 열원(heat source)은 점열원(point heat source)이다.
- 표면에서의 열전도는 무시한다.
- 준정상 상태가 요구된다.
- 해석 대상은 그 크기가 무한하거나 유한한 균일 두께를 갖는다.

Rosenthal 해의 제한 조건에 비해 본 해석 방법에서는 다음의 제한 조건을 둔다.

- 열전도 정수의 온도 의존성은 무시한다.
- 열전도 해석 대상인 모델은 열원의 진행 방향으로만 그 크기가 무한하다.

열전도 정수의 온도 의존성을 고려하면 열전도 방정식은 비선형 편미분 방정식으로 귀착되어 그 해를 구하는 방법은 극히 제한적이고, 수치적 방법을 적용하여도 많은 반복 계산이 소요되므로, 통상 열전도 정수는 일정하다고 가정한다.

저자가 실제 수치 계산 및 이론적인 해를 통해 검증한 결과, 열원 진행 방향의 모델 크기가 판두께의 10배 정도면 경계의 효과가 무시할 만 하였

다. 따라서 열원 진행 방향으로 크기가 무한하다는 제한 조건은 통상의 용접 결합부에서 문제되지 않는다.

## 3. 해석 방법

열전도 정수의 온도 의존성을 무시하면 열전도 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

여기서, T=온도

t=시간

k=열확산률(thermal diffusivity)

표면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda} T \quad (2)$$

여기서, λ=열전도율(thermal conductivity)

α=열전달률(heat transfer coefficient)

n은 표면에서의 법선 방향을 나타낸다.

x축을 열원의 진행 방향으로 하고, 단면 형상이 균일하다면, 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cdot f(y, z, t) \quad (3)$$

(3)식을 (1)식에 대입하면

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

(3)식을 (2)식에 대입하면

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot f \quad (5)$$

로 된다. 즉 (3)식과 같은 해의 가정으로부터 (1), (2)식은 (4), (5)식으로 되어 3차원 문제가 2차원화 된다. (4), (5)식을 2차원 수치 해법으로 풀면 (3)식과의 조합에 의해 3차원 문제가 풀려지는 것이다. (4)식은 유한 차분법(finite difference method)으로 쉽게 제한없이 풀려지므로 결과적으로, 해석적 방법과 수치적 방법의 조합으로 (1)식의 해가 얻어지는 것이다. 3차원 수치 해법을 대신한 2차원 해법이므로 입력 자료가 극히 단순화되고 계산 시간이 엄청나게 단축될 수 있다.

유한 차분법에 의한 모델은 Fig.1과 같고, (4)식의 정식화는  $\Delta y = \Delta z$ 일 때 다음과 같이 된다<sup>2)</sup>.

$$f_{m,n}^{p+1} = \frac{k\Delta t}{(\Delta y)^2} (f_{m+1,n}^p + f_{m-1,n}^p + f_{m,n+1}^p + f_{m,n-1}^p) + \left(1 - \frac{4k\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \cdot f_{m,n}^p \quad (6)$$

여기서  $\Delta$ 는 증분을 나타내고, p는 현재 단계를, p+1은  $\Delta t$  시간 후의 다음 단계를 지시한다.

Fig. 2와 같은 경계에서의 정식화는 다음과 같다.

$$f_{m,n}^{p+1} = \frac{k\Delta t}{(\Delta y)^2} (2f_{m-1,n}^p + f_{m,n-1}^p + f_{m,n-1}^p) + \left(1 - \frac{4k\Delta t}{(\Delta y)^2} \cdot \frac{\alpha\Delta y}{\lambda}\right) f_{m,n}^p \quad (7)$$

(3)식과 같이 가정된 해는 그 특성상, 순간 점 열원 (instantaneous point source)에 대한 것인데, 이동 열원에 대해서도 증첩에 의해 해가 얻어질 수 있다. 유한 차분법 적용 시 열원은 초기 조건으로 줄 수 있으므로, 단위 시간 당 q의 점열원

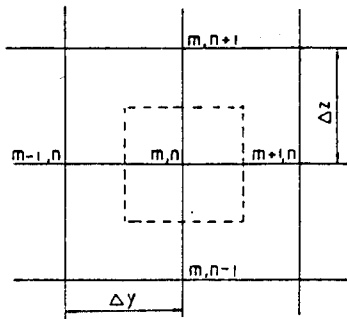


Fig. 1 Interior node

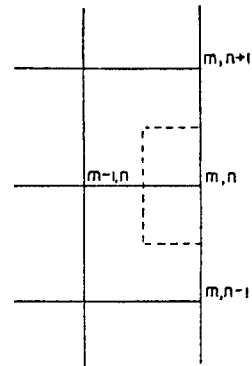


Fig. 2 Boundary node

이 v의 속도로 x방향으로 이동할 때, 열원의 출발로부터 t초 후의 온도 분포는 다음 식으로 구해 질 수 있다.

$$T = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi k p}} \cdot e^{-\frac{(x+vp)^2}{4kp}} \cdot f(y, z, p) dp \quad (8)$$

#### 4. 적용 대상

본 방법은 용접부의 단면 형상이 복잡하더라도 길이 방향으로 일정하면 적용될 수 있고, 비정상 상태에 적용 가능하다. 또한 표면에서의 열교환도 고려될 수 있고, 유한차분법 적용 시에 용융부의 용융 온도를 초기 조건으로 주면 단면 내의 열원 형상이 점이 아니더라도 적용될 수 있다. 각종 용접 방법의 아크 효율에 따라 용융부의 형상 및 크기는 달라질 수 있다. 용융부의 형상에 대해서는 문헌 5를 참고할 수 있다. 대표적인 적용 대상은 Fig. 3과 같이 홈 가공한 맞대기 용접부 또는 3

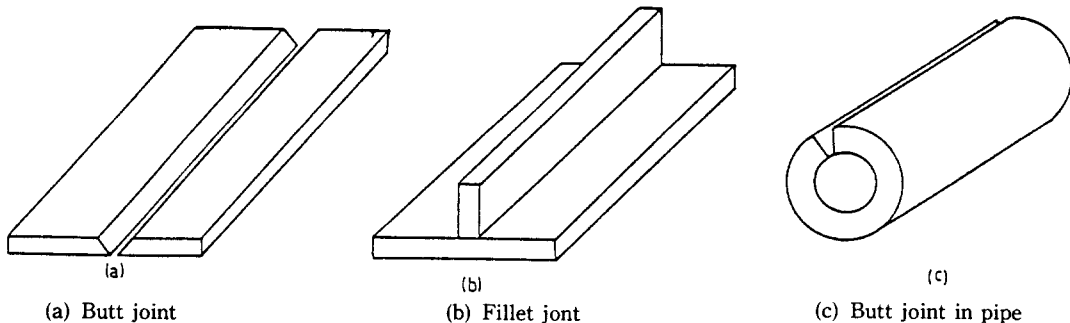


Fig. 3 Models to which this method can be applied

방향으로 열이 전달되는 필렛 용접부 및 홈 가공한 파이프 용접 등이다.

5. 해석 결과의 비교

본 방법의 정확성을 검증하기 위해 먼저 3차원 수치 해법에 의한 결과 및 해석적 방법에 의한 결과와 비교해 본다.

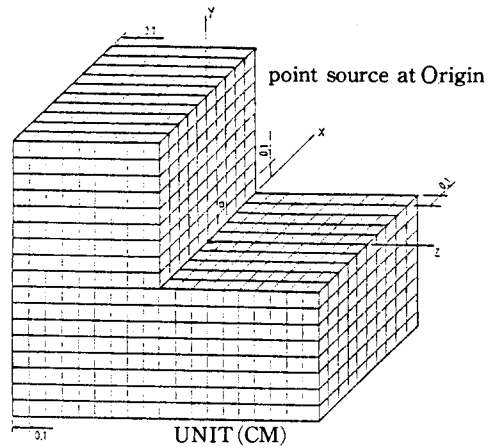
먼저 (3)식과 같은 해의 가정이 타당하다는 것을 확인하기 위해 Fig. 4 (a)와 같은 모델에 대해 3차원 유한 차분법에 의한 결과와 본 방법에 의한 결과를 비교해 본다. 순간 점열원이 Fig. 4 (a)의 원점에 주어졌을 때의 P점의 온도 분포를 Fig. 4 (b) 및 (c)에 나타낸다. 열원의 세기  $q=0.525 \text{ cal}$ 이고  $k=0.18 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 로 가정한 것이다. 3차원 유한 차분법의 경우에는 모델 전체를 차분 모델화해야 하므로 모델화되는 단면은 길이에 비례하여 많아지게 된다. 단면을 11개 취하면 Fig. 4 (a) 모델에 대해 2970개의 절점이 소요되었는데 비해, 본 방법의 적용 시에는 270개의 절점으로 충분하였다. 본 방법에서는 복잡하지만 균일하게 연속된 단면 하나에 대해서만 유한 차분법 모델화하면 길이 방향의 온도 분포도 계산 가능하므로 경제성이 있는 것이다.

다음에 해석적 방법의 결과와 비교해 본다. Fig. 5 (a)와 같이 두께가  $h$ 인 무한판의 표면에 점열원  $q$ 가  $x$ 축의 양의 방향으로  $v$ 의 속도로 이동할 때, 판의 표면에서 열의 방산(radiation)을 무시하면 해석 해는 (9)식과 같이 주어진다<sup>3)</sup>.

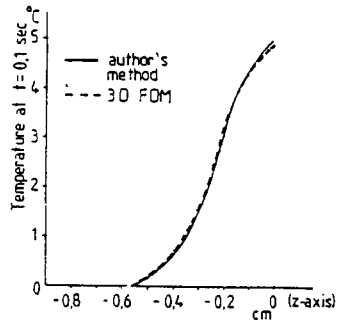
$$T = \frac{q}{2\pi\lambda h} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{h} z \cdot \int_0^1 \frac{e^{\left\{ \frac{-kp n^2 \pi^2}{h^2} - \frac{(x+vp)^2 + y^2}{4kp} \right\}}}{p} dp \quad (9)$$

여기서,  $A_n = 1/2$  ( $n=0$ 일 때)  
 $= 1$  ( $n \neq 0$ 일 때)

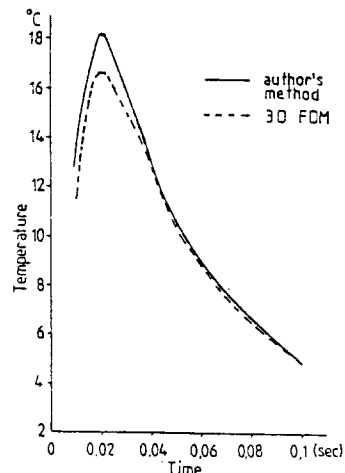
Fig. 5 (a)에 나타낸 모델에 대해 (8)식과 (9)식으로 계산한 결과를 Fig. 5 (b), (c)에 나타내었다. Fig. 5 (b), (c)에서 나타나는 약간의 차이는 시간이 지나면서 열이 단면의 경계에 까지 전달되어 경계 효과가 나타났기 때문이다.



(a) 3-D Finite Difference Model

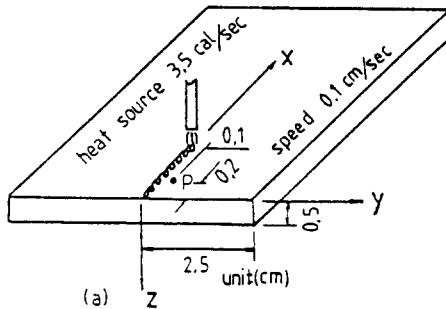


(b) Temperature distribution at  $x=0.1, y=0.1$

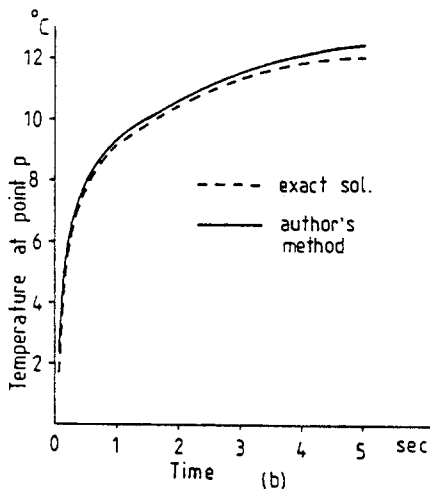


(c) Temperature at  $(x,y,z)=(0.1,0.1,0)$

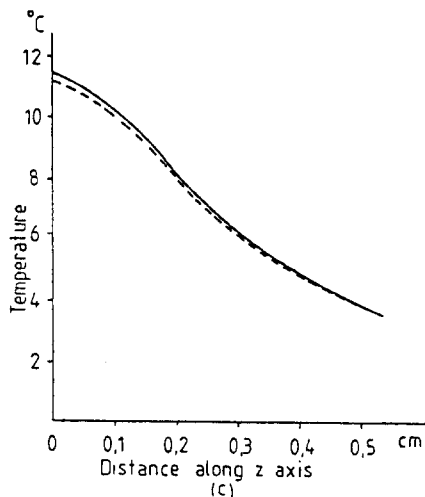
Fig. 4 Model and calculated results



(a) Bead-on-welding model



(b) Temperature history at point P



(c) Temperature distribution along z - axis

Fig. 5 Calculation model and results

## 6. 결 론

본 연구에서 제안한 방법을 수치적 해법에 의한 결과와 비교하여 보면 입력 작업의 간소화와 계산 시간의 절약으로 경제성에서 이득이 있고, 해석적 방법에 의한 결과와 비교해 보아도 해석 해의 제한성을 극복할 수 있는 유용성이 있음을 확인할 수 있다. 본 방법은 해석 해와 비교하여도 정확성을 띤 것이라 말할 수 있다. 수치적 방법과 해석적 방법이 조합된 본 연구의 방법은 용접 중 냉각 속도 계산 및 용접 과정을 역학적으로 기술하는 과정에 유용하게 쓰일 수 있으리라 생각된다.

## 참고문헌

- 1) D. Rosenthal: Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting, Weld. Jour., Vol.20, No. 5, (1941), pp. 220-234s.
- 2) J.P. Holman: Heat transfer, McGraw-Hill, (1981), pp. 135-155.
- 3) 渡邊正紀, 佐藤邦彦: 溶接力學とその應用, 朝倉書店, (1965), pp. 203-208.
- 4) Z. Palet, P.D. Hibbert: Computation of temperatures in actual weld designs, Weld. Jour., Vol.54, No.11, (1975), pp. 385-392 s.
- 5) 橋本啓介: 移動點熱原理論とアーク溶接の熔込み, 日本造船學會誌, 第616號, (1980), pp. 558-562.
- 6) K. Masubuchi: Analysis of Welded Structures, Pergamon Press, (1980), pp. 60-86.
- 7) H.S. Carslaw, J.C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Oxford, (1980), pp. 50-62.