財務管理研究 第七卷 第二號 (1990. 12)

裁定理論에 근거한 資產價格決定模型의 定立에 관한 研究

具 本 烈*

〈目 次〉

I. 序 論

현대자본시장은 평균과 분산이라는 두 모수에 의하여 期待收益率과 危險과의 관계를 균형상태하에서 발전시킨 샤프(Sharpe, 1964)의 CAPM이 주류를 이루고 있다. 그러나 CAPM은 資產의 수익률이 정규분포를 이룬다는 가정이나 투자자의 效用函數가 이차함수라는 엄격한 가정이 필요하다. 그런데 전자의 경우에는 주주들의 유한책임의 문제를 해결할 수가 없고 후자의 경우에는 증가절대위험회피(IARA)의 성질을 가지는 불합리성을 가지고 있다. 또한 CAPM을 유도하기 위한 여러가지의 가정은 현실과 많은 모순점을 내포하기 때문에 자본시장에서 期待收益率과 危險과의 관계를 설명하는데는 한계점을 지니고 있다. 이와 아울러 CAPM과 대체적인 가격결정모형으로 로스(Ross, 1976)에 의하여 유도된 APM은 단순한 가정에 의해 유도되었기 때문에 이론적으로는 정교하다고 할 수 있으나 실증적 검증에 있어 많은 한계점을 가지고 있다.

가만(Garman, 1978)은 균형상태하에서는 危險을 부담하지 않고는 어떠한 裁定利益

*忠北大學校 經營大學 助敎授

**이 논문은 1989년도 문교부지원 학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

이 불가능하다는 가정하에 資産의 가격결정모형을 유도하였으나, 올슨(Ohlson, 1987)의 주장에 따르면 가만의 모형은 資産의 수익률이 정규분포를 하는 경우에는 CAPM을 유도할 수 있지만 반드시 파레토최적에는 달성하지 못한다고 주장하였다. 루빈스타인(Rubinstein, 1976)과 잉거솔(Ingersoll, 1987)은 각각 多期間의 경우에 상태선호이론하에서 자산가격결정모형을 유도하였다.

그런데 여러학자들에 의하여 유도된 危險資産의 가격결정모형은 여러가지의 제약조건, 즉 투자자의 效用函數가 2차함수라는 가정, 그리고 검증상의 문제점 등으로 실제로 자본시장의 적용가능성에는 한계를 가지고 있다. 그러나 만약에 투자자의 效用函數의 형태를 파악할 수 있는 경우에 이에 근거하여 균형하의 資産의 價格이나 수익률을 실제적으로 산출할 수 있는 모형의 개발은 매우 의미있는 일이라고 생각된다.

본 연구는 위의 문제점을 극복하고 현실적으로 이용가능한 모형을 개발하기 위하여 Farkas lemma와 裁定理論을 이용하여 資産의 가격결정모형을 유도한다. 그리고 이 모형의 경제적 의미를 상태선호이론과 관련시켜 해석을 함으로써 균형상태하에서의 자산가격결정모형을 유도하고자 한다. 또 파레토최적 달성을 위한 조건인 투자자의 效用函數가 LRT형을 갖게 될 경우에 여러가지의 균형가격결정모형을 유도하고 이의 특수한 경우에 CAPM이 유도됨을 밝힌다. 마지막으로 多期間의 경우의 가격결정모형에 대하여 살펴보고 어떠한 형태의 效用函數가 현실적으로 적용가능한 모형이 될 수 있는가에 대하여 검토하고자 한다.

II. 裁定理論하의 자산가격결정모형과 完成市場하에서의 자산가격결정모형

1. 裁定理論하의 자산가격결정모형

이는 균형상태하에서 추가적인 富의 투자가 없고 또 추가적인 危險을 부담하지 않는다면 어떠한 포트폴리오의 구성에 의해서도 裁定利益은 존재하지 않는다는 가정하에서 유도되는 가격결정모형을 의미한다.

이 모형을 유도하기 위해서는 위의 가정외에 다음과 같은 추가적인 가정이 필요하다. 첫째로 모든 투자자는 미래에 발생되는 상태(states)와 이득(payoffs)에 대하여 동일한 기대를 가지고 있으며 둘째로 거래비용이나 세금등이 존재하지 않는 완전자본시장을 가정한다.

위의 가정하에서 가격결정모형을 유도하여 보기로 하자. 이를 위하여 우선 부호를

다음과 같이 정의하자.

X_j = 자산 j의 수, j = 1, 2, ……, N.
S_j = 자산 j의 시점 t = 0에서의 價格
$A_j(\theta s)$ = 시점 t = 1에서 상태, s = 1, 2, ……, S가 발생했을 경우의 이득
$\triangle S_j(\theta s)$ = 상태(θs)가 발생했을 경우에 資産 j의 보유에 따른 순이득,
즉 $\triangle S_j(\theta s) = A_j(\theta s) - S_j$로 정의
$R_j(\theta s)$ = 자산 j의 상태(θs)에서의 수익률, 즉 $R_j(\theta s) = \triangle S_j(\theta s) / S_j$
R_f = 無危險資産의 수익률

이제 위의 정의에 따라 가격결정모형을 유도하여 보기로 하자. 이를 위하여 우선 裁定利益이 발생되는 경우를 수학적인 관계식에 의해 나타내면 다음과 같이 표시될 수 있을 것이다.

$$\sum_j X_j S_j \leq 0 \quad \cdots\cdots \quad (2-1)$$

$$\sum_j X_j A_j(\theta s) \geq 0 \quad \text{단, } s = 1, 2, \cdots, S \quad \cdots\cdots \quad (2-2)$$

여기에서, X_j는 공매가 가능하다고 가정하기 때문에 $-\infty < X_j < \infty$이며 $A_j(\theta s)$는 유한책임의 조건에 의해 $A_j(\theta s) \geq 0$이 된다.

위 식 (2-1)은 포트폴리오 구성에 따른 비용으로서 추가적인 富의 투자가 없음을 의미하며 식 (2-2)는 투자에 따른 이득이 어떠한 상태 (θs)에 대해서도 항상 음(-)이 아니기 때문에 裁定利益이 발생함을 나타내고 있다. 그런데 裁定利益이 없는 상태하에서는 식 (2-1)과 식 (2-2)에서 Farkas lemma에 의해 임의의 값 $Z(\theta s) \geq 0$ 와 $S_j = \sum_s Z(\theta s) A_j(\theta s)$이 유도된다. 즉 Farkas lemma는 다음의 식과 같은 원문제(primal problem)와 쌍대문제(dual problem)가 존재할 경우에 어느 하나가 실행가능한 해(feasible solution)를 가지면 다른 하나는 해가 존재하지 않는다는 것이다.[1)]

1) 이에 관해서는 다음의 冊을 참고 바람.
Murty, K. G., Linear and Combinatorial Programming, John Wiley and Sons, Inc., 1976.

(원문제) $\sum_j X_j S_j \leq 0$

$\sum_j X_j A_j(\theta s) \geq 0$ 단, $s = 1, 2, \cdots, S$

$X_j \in IR^N$ ·· (2−3)

(쌍대문제) $S_j = \sum_s Z(\theta s) A_j(\theta s)$ 단, $j = 1, 2, \cdots, N$

$Z(\theta s) \geq 0$ ·· (2−4)

식 (2−3)과 식 (2−4)에서 보는 바와 같이 식 (2−3)은 裁定利益이 발생하는 경우의 관계식으로서 이러한 관계가 존재하지 않는다면 식 (2−4)가 실행 가능한 해를 가질 것이다. 따라서 식 (2−3)은 불가능한 해를 가지게 되고 따라서 식 (2−4)가 성립하게 된다. 결국 식 (2−4)에서 $Z(\theta s) \geq 0$이고

$$S_j = \sum_s Z(\theta s) A_j(\theta s) \quad \text{단, } j = 1, 2, \cdots, N \quad \cdots\cdots \quad (2-5)$$

인 가격결정의 관계식이 유도됨을 알 수 있다.

식 (2−5)는 裁定利益이 불가능하다는 가정에 의해 유도된 가격결정모형이다. 그런데 식 (2−5)에서 資産의 價格 S_j를 결정하기 위해서는 각 상태의 이득에다 $Z(\theta s)$를 곱하여 합계한 것을 고려해 볼 때 $Z(\theta s)$는 미래 각 상태의 이득을 현재가치로 할인하는 할인율로 간주할 수가 있을 것이다. 여기에서 $Z(\theta s)$는 각 상태에 따라 유일한 값을 가질 필요는 없으며 상태조건부의 청구권을 가진 內在價格(implicit price)으로서 完成市場하에서는 A−D증권의 價格이 된다.

2. 完成市場하의 가격결정모형

完成市場의 경우에는 상태의 수, S와 자산의 수 N가 같기 때문에 각 상태에 따른 A−D증권이 존재할 것이며 상태 θs에서의 A−D증권의 가격을 $P(\theta s)$라고 하자.

이제 투자자 i ($i = 1, 2, \cdots, I$)의 $t = 0$ 시점에서의 富를 $\overline{W}_{i0}$라고 하면 투자자 i의 효용극대화 계획은 다음과 같을 것이다.

극대화 $\sum_s \Pi_i(\theta s)\ U_i(C_{i0}, W_{i1}(\theta s))$

제약조건 $C_{io} + \sum_{s} P(\theta s)\ W_{i1}(\theta s) = \overline{W}_{io}$ .... (2-6)

여기에서

C_{io} = 투자자 i의 t = 0 시점에서의 소비

$\overline{W}_{i1}(\theta s)$ = 투자자 i의 상태 θs에서의 富로서 t = 1 시점에서 모두 소비되기 때문에 $W_{i1}(\theta s) = C_{i1}(\theta s)$임.

$\Pi_i(\theta s)$ = 투자자 i가 상태 θs가 발생하리라고 기대하는 확률.

위 식 (2-6)의 최적화 계획을 풀면 A-D증권의 가격 P(θs)는

$$P(\theta s) = \frac{\Pi_i(\theta s)\ \partial U_i(C_{io}, W_{i1}(\theta s))/\partial W_{i1}(\theta s)}{\sum_{s} \Pi_i(\theta s)\ \partial U_i(C_{io}, W_{i1}(\theta s))/\partial C_{io}}$$

$$= \frac{\Pi_i(\theta s)\ U_i'(W_{i1}(\theta s))}{\sum_{s} \Pi_i(\theta s)\ U_i'(C_{io})} \quad \cdots\cdots \quad (2-7)$$

단, i = 1, 2, …, I

여기에서 $U_i'(C_{io}) = \partial U_i(C_{io}, W_{i1}(\theta s)) / \partial C_{io}$
= 현재 소비의 한계 효용.
$U_i'(W_{i1}(\theta s)) = \partial U_i(C_{io}, W_{i1}(\theta s)) / \partial W_{i1}(\theta s)$
= 상태 θs에서의 소비의 한계효용을 나타냄

이 된다.

식 (2-7)에서 볼때 A-D증권의 가격인 P(θs)는 C_{io}과 $W_{i1}(\theta s)$ $[= C_{i1}(\theta s)]$과의 한계 대체율 (marginal rate of substitution : MRS)과 같다는 것을 의미한다. 즉 식 (2-7)의 의미는 효용극대화를 추구하는 투자자들이 각 상태에 따른 P(θs)에 대하여 모두가 받아들이기 때문에 각자 (i = 1, 2, …, I)의 MRS를 이 P(θs)에 일치시키려고 하는 것을 나타내고 있다. 이는 결과적으로 富의 최적배분이 효율적으로 이루어지고 따라서 完成市場하에서는 파레토 최적배분 (Pareto optimal allocation)에 쉽게 도달됨을 알 수 있다.

그런데 실제 자본시장에서는 P(θs)를 직접적으로 관찰할 수가 없으며 보통주의 형태를 가진 복합증권 (complex securities)만이 존재한다. 이 경우 자산의 가격 S_j는 P(θs)와 어떤 관계가 있는가를 살펴보기로 하자. 이를 위하여 N개의 자산이 존재할 경우

투자자의 효용을 극대화 시키는 최적포트폴리오를 구하는 문제를 생각하자. 그러면 이에 따른 최적화 계획은 다음과 같을 것이다.

$$\text{극대화} \quad \sum_s \Pi_i(\theta s)\ U_i(C_{io}, \sum_{j=1}^{N} X_{ij} A_j(\theta s))$$

$$\text{제약조건} \quad C_{io} + \sum_j X_{ij} S_j = \overline{W}_{io} \quad \cdots\cdots \quad (2-8)$$

$$\text{여기에서 } W_{il}(\theta s) = \sum_{j=1}^{N} X_{ij} A_j(\theta s)\text{임}$$

위 식 (2−8)의 최적화 계획을 풀면

$$S_j = \sum_s \left[\frac{\Pi_i(\theta s)\ \partial U_i(C_{io}, W_{il}(\theta s))/\partial W_{il}(\theta s)}{\sum_s \Pi_i(\theta s)\ \partial U_i(C_{io}, W_{il}(\theta s))/\partial C_{io}} \right] A_j(\theta s) \quad \cdots\cdots \quad (2-9)$$

단, $j = 1, 2, \cdots, N$

이 된다.

그런데 식 (2−9)의 우변의 $[\ \cdot\ ]$은 식 (2−7)에서 보는 바와 같이 A−D증권의 가격을 나타내므로 이를 식 (2−9)에 대입하면 자산의 가격 S_j는

$$S_j = \sum_s P(\theta s)\, A_j(\theta s) \quad \cdots\cdots \quad (2-10)$$

단, $j = 1, 2, \cdots, N$

이 된다. 즉 자산 j의 가격을 투자자에 의하여 적절하다고 생각되는 한계대체율에 의하여 평가된 상태조건부 청구권의 가격인 $P(\theta s)$에 상태 θs가 발생했을 경우의 이득인 $A_j(\theta s)$를 곱하여 총합한 값으로 결정됨을 알 수 있다.

결국 식 (2−10)은 식 (2−5)와 비교하면

$$Z(\theta s) = P(\theta s),\ \text{단},\ s = 1, 2, \cdots, S \quad \cdots\cdots \quad (2-11)$$

이 되어 完成市場하에서 $Z(\theta s)$는 결국 A−D증권의 가격과 같다. 그러나 $Z(\theta s)$와 $P(\theta s)$의 다른점은 $P(\theta s)$는 유일한 값을 가짐에 비하여 $Z(\theta s)$는 반드시 유일할 필요는 없다. 즉 $Z(\theta s)$는 不完成市場하에서도 확대할 수 있음을 의미한다. 이에 대해서는 다음장에서 설명하기로 한다.

III. 실증적 資産價格決定模型의 유도

앞 장에서는 자본시장의 균형 상태하에서 무위험의 아비트리지 이익이 불가능하다는 가정하에서 식 (2−5)와 같은 관계식을 유도하였다. 그리고 $Z(\theta s)$는 A−D증권의 가격이 됨을 또한 증명하였다. 여기에서는 식 (2−5)에 의해 여러가지의 자산가격결정모형을 유도하고 아울러 특수한 경우에 CAPM이 됨을 증명하기로 한다.

1. q_i에 근거한 자산가격결정모형

식 (2−5)로 부터

$$S_j = \sum_s Z(\theta s)\, A_j(\theta s) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2-5)$$

의 관계가 성립되었다.

그런데 앞에서 $\triangle S_j(\theta s) = A_j(\theta s) - S_j$로 정의하였다. 따라서 $A_j(\theta s) = S_j + \triangle S_j(\theta s)$이므로 이를 식 (2−5)에 대입하면

$$\begin{aligned} S_j &= Z(\theta s)\, A_j(\theta s) \\ &= \sum_s Z(\theta s)\left[S_j + \triangle S_j(\theta s)\right] \\ &= S_j \sum_s Z(\theta s) + \sum_s Z(\theta s)\, \triangle S_j(\theta s) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (3-1) \end{aligned}$$

이 된다.

따라서 식 (3−1)을 S_j에 관하여 정리하면

$$S_j - S_j \sum_s Z(\theta s) = \sum_s Z(\theta s)\, \triangle S_j(\theta s)$$
$$S_j \left\{1 - \sum_s Z(\theta s)\right\} = \sum_s Z(\theta s)\, \triangle S_j(\theta s)$$

즉,

$$S_j = \frac{\sum_s Z(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s)}{1 - \sum_s Z(\theta s)} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (3-2)$$

단, $j = 1, 2, \cdots, N$

이 된다.

식 (3−2)는 개별자산 S_j의 가격결정에 대한 관계식을 나타내고 있다. 식 (3−2)를 이용하여 무위험 자산의 수익률 R_f를 구해보기로 하자. 이는 무위험자산의 현재가격이 1원일 경우 $t = 1$ 시점에서는 $(1 + R_f)$원이 될 것이다. 따라서 $\triangle S_j(\theta s) = R_f$가 되므로 이 관계를 식 (3−2)에 대입하면

$$1 = \frac{\sum_s Z(\theta s)\ (R_f)}{1-\sum_s Z(\theta s)} \quad \cdots\cdots \quad (3-3)$$

이 될 것이다. 따라서 무위험자산의 수익률 R_f는 식 (3−3)에서

$$R_f = \frac{1-\sum_s Z(\theta s)}{\sum_s Z(\theta s)} \quad \cdots\cdots \quad (3-4)$$

이 되며 식 (3−3)을 $\sum_s Z(\theta s)$에 대하여 풀면

$$\sum_s Z(\theta s) = \frac{1}{1+R_f} \quad \cdots\cdots \quad (3-5)$$

이 된다. 이제 식 (3−5)의 관계를 이용하여 이를 식 (3−2)의 분모에 대입하면 개별자산 j의 가격 S_j는

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{\sum_s Z(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s)}{1-\sum_s Z(\theta s)} \\ &= \frac{\sum_s Z(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s)}{1-\frac{1}{1+R_f}} \\ &= \frac{(1+R_f)\ \sum_s Z(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s)}{R_f} \quad \cdots\cdots \quad (3-6) \end{aligned}$$

로 나타낼 수가 있다.

이제 식 (3−6)의 우변항을 변형하여 자산가격 S_j의 평가모형을 달리 표현해 보기로 하자. 이를 위하여 $Z(\theta s)$ (즉, A−D 증권의 가격)를 투자자 i가 상태 θs가 발생하리라고 기대하는 확률 $\Pi_i(\theta s)$ 나눈 값을 $q_i(\theta s)$라 할 때

$$q_i(\theta s) = \frac{Z(\theta s)}{\Pi_i(\theta s)} \quad \cdots\cdots \quad (3-7)$$

단, $i = 1, 2, \cdots, I$

로 표시되며 이를 확률로 표준화된 A－D 증권 가격 (probability-normalized A－D security price)이라고 불리운다.[2)]

여기에서 $Z(\theta s)$는 개인의 기대와는 독립적으로 결정된 가격이나 $q_i(\theta s)$는 투자자 i에 의해서 미래 상태 θs가 발생되리라고 기대되는 확률 $\Pi_i(\theta s)$에 따라 결정되는 가격임을 알 수 있다.

그리고 식 (3－7)의 양변에 $\Pi_i(\theta s)$ 를 곱하고 총합하면

$$\sum_s \Pi_i(\theta s)\ q_i(\theta s) = \sum_s Z(\theta s) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-8)$$

이 된다. 그런데 식 (3－8)의 좌변은 투자자 i의 $q_i(\theta s)$의 기대값이며 우변은 식 (3－5)에 의해 $(1 + R_f)^{-1}$임을 알 수 있다. 따라서 식 (3－8)은 다음과 같이 변형될 수 있다. 즉

$$E_i(q_i) = (1 + R_f)^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-9)$$

이 성립된다.

이제 식 (3－7)의 관계를 이용하여 식 (3－2)를 변형시켜 보기로 하자. 이를 위해 식 (3－2)의 우변의 분모와 분자에 $\Pi_i(\theta s)$를 취하면

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{\sum_s (Z(\theta s)/\Pi_i(\theta s))(\Pi_i(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s))}{1 - \sum_s \Pi_i(\theta s)\ (Z(\theta s)/\Pi_i(\theta s))} \\ &= \frac{\sum_s \Pi_i(\theta s)\ q_i(\theta s)\ \triangle S_j(\theta s)}{1 - \sum_s \Pi_i(\theta s)\ q_i(\theta s)} \\ &= \frac{E_i[q_i \triangle S_j]}{1 - E_i(q_i)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-10) \end{aligned}$$

이 된다.

그런데 共分散의 정의를 이용하면[3)] 식 (3－10)은

2) 가만(Garman)은 $Z(\theta s)$를 market kernel, $q_i(\theta s)$를 quotient kernel이라 부르고 있다.

3) 공분산의 정의는 $E(XY) = E(X)\,E(Y) + COV(X,Y)$

$$S_j = \frac{E_i(q_i)\,E_i(\triangle S_j) + Cov_i(q_i, \triangle S_j)}{1 - E_i(q_i)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-11)$$

이 된다. 그런데 식 (3-9)의 관계를 이용하여 식 (3-11)을 변형하면 자산 j의 가격 S_j는

$$S_j = \frac{(1+R_f)^{-1}E_i(\triangle S_j) + Cov_i(q_i, \triangle S_j)}{1 - (1 + R_f)^{-1}}$$

$$= \frac{E_i(\triangle S_j) + (1 + R_f)\,Cov_i(q_i, \triangle S_j)}{R_f} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-12)$$

로 표시된다.

그런데 만약 자산 j의 $\triangle S_j(\theta s)$에 대한 기대가 투자자마다 동일하다면 식 (3-12)는

$$S_j = \frac{E(\triangle S_j) + (1 + R_f)\,Cov(q_i, \triangle S_j)}{R_f} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-13)$$

으로 표시될 것이다. 식 (3-13)은 단일기간에 있어서 투자자 i의 자산의 가격 S_j에 대한 평가 모형으로 이는 앞의 식 (3-6)을 변형하여 유도된 관계식이다.

그런데 위 식 (3-13)에서 알 수 있는 바와 같이 S_j를 결정하는 중요한 변수는 $q_i(\theta s)$이며 이것이 어떤 경제적 의미를 가지고 있는가에 대한 분석이 필요하다. 현재 $q_i(\theta s)$에 대하여 알고 있는 정보는 식 (3-7)에서 $Z(\theta s)$를 $\Pi_i(\theta s)$로 나눈 값이라는 것과 식 (3-9)에서 보는 바와 같이 이의 기대값은 $(1 + R_f)^{-1}$이라는 사실이다. 그러나 $Z(\theta s) = P(\theta s)$이기 때문에 $q_i(\theta s)$도 투자자의 MRS와 관련이 있음을 간접적으로 추측할 수가 있다. $q_i(\theta s)$에 대한 분석은 다음절에서 하기로 한다.

2. 效用에 근거한 자산가격결정모형의 유도

앞 절에서는 확률로 표준화된 A-D증권의 가격이라고 할 수 있는 $q_i(\theta s)$에 의해 개별자산의 가격 S_j를 표시하였다. 이 절에서는 $q_i(\theta s)$의 경제적 의미에 대하여 구체적으로 살펴보고자하며 또한 자산가격결정모형을 유도하고자 한다.

이를 위하여 우선 $q_i(\theta s)$를 편의상 다음과 같이 정의 하기로 하자.

$$q_i(\theta s) = \frac{Y_i(\theta s)}{[E(Y_i)\,(1 + R_f)]} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-14)$$

여기에서, $Y_i(\theta s)$ = 期待값이 $E(Y_i)$인 임의의 확률변수

식 (3-14)에 의해 식 (3-13)을 변형하면

$$S_j = \frac{E(\triangle S_j) + Cov(\triangle S_j, Y_i) / E(Y_i)}{R_f} \quad \cdots\cdots \quad (3-15)$$

이 될 것이다. 그리고 식 (3-14)에서

$$\begin{aligned} Y_i(\theta s) &= E(Y_i)\ (1 + R_f)\ q_i(\theta s) \\ &= E(Y_i)\ (1 + R_f)\ (Z(\theta s) / \Pi_i(\theta s)) \end{aligned} \quad \cdots\cdots \quad (3-16)$$

이 된다. 그런데 $\alpha_i(\theta s) = Y_i(\theta s) / E(Y_i)$라 두면

$$\alpha_i(\theta s) = \frac{Y_i(\theta s)}{E(Y_i)} = (1 + R_f)\ (Z(\theta s) / \Pi_i(\theta s)) \quad \cdots\cdots \quad (3-17)$$

이 되고 앞장의 식 (2-7)과 식 (2-11)에 의해

$$Z(\theta s) = P(\theta s) = \frac{\Pi_i(\theta s)\ U_i'\ (W_{il}(\theta s))}{\sum_s \Pi_i(\theta s)\ \ U_i'(C_{io})} \quad \cdots\cdots \quad (3-18)$$

의 관계식이 성립된다. 그런데 식 (3-18)의 $Z(\theta s)$의 관계식을 식 (3-17)에 대입하여 정리하면

$$\alpha_i(\theta s) = \frac{Y_i(\theta s)}{E(Y_i)} = (1 + R_f)\ \frac{U_i'\ (W_{il}(\theta s))}{\sum_s \Pi_i(\theta s)\ \ U_i'(C_{io})} \quad \cdots\cdots \quad (3-19)$$

로 표시될 수 있다. 이제 식 (3-19)를 이용하여 식 (3-15)를 정리하면 자산의 가격 S_j는

$$S_j = \frac{E(\triangle S_j) + [\,(1+R_f)\ Cov\,\{\triangle S_j, U_i'(W_{il}) / \sum_s \Pi_i(\theta s)\ \ U_i'(C_{io})\}\,]}{R_f} \quad (3-20)$$

로 표시된다.

식 (3-19)와 식 (3-20)의 의미는 자산의 가격 S_j가 투자자들의 MRS와 함수관계에 있으며 식 (3-13)과 비교할 때 $q_i(\theta s)$도 역시 MRS와 관련이 있음을 알 수 있다. 왜냐하면 식 (3-14)와 식 (3-19)에 의해

$$q_i(\theta s) = \frac{Y_i(\theta s)}{[E(Y_i)\ (1+R_f)]} = \frac{U_i'(W_{i1}(\theta s))}{\sum_s \Pi_i(\theta s)\ U_i'(C_{i0})} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-21)$$

로 표시 될 수 있기 때문이다.

이제 자본시장의 균형상태하에서 S_j의 기대수익률에 의한 가격결정모형을 유도하기 위하여 식 (3-21)의 결과를 식 (3-20)에 대입하고 양변에 S_j로 나누어 정리하면

$$1 = \frac{E(\triangle S_j/S_j) + (1 + R_f)\ Cov(q_i,\ \triangle S_j/S_j)}{R_f}$$

가 되고 $R_j(\theta s) = \triangle S_j(\theta s) / S_j$의 정의를 이용하면

$$E(R_j) - R_f = (1 + R_f)\ Cov(R_j, -q_i) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-22)$$

로 표시된다.

한편 상태 (θs)에서 시장 포트폴리오의 수익률을 $R_M(\theta s)$라 하고 이러한 시장포트폴리오의 총 시장가치를 M이라고 하면 상태, θs에서의 富, $W_1(\theta s) = R_M(\theta s)M$이 되며 $M = \sum_j S_j X_j$로 표시할 수 있다. 이 경우에 시장포트폴리오 수익률 $R_M(\theta s)$는

$$R_M(\theta s) = \frac{\sum_j \triangle S_j(\theta s)\ X_j}{\sum_j S_j X_j} = \sum_j \left(\frac{\triangle S_j(\theta s)\ X_j}{\sum_j S_j X_j}\right)$$

$$= \sum_s \left[\left(\frac{S_j X_j}{\sum_j S_j X_j}\right)\left(\frac{\triangle S_j(\theta s)}{S_j}\right)\right]$$

$$= \sum_j x_j R_j(\theta s) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-23)$$

여기에서 $x_j = S_j X_j / \sum_j S_j X_j$로서 시장 포트폴리오 구성비율을 나타냄

으로 표시된다.

한편 식 (3-22)의 양변에 x_j를 곱하고 총합하면

$$E(R_M) - R_f = (1 + R_f)\ Cov(R_M,\ -q_i) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-24)$$

가 된다. 이제 식 (3-22)를 식 (3-24)로 나누고 이를 정리하면

$$E(R_j) - R_f = \frac{Cov\,(R_j, -q_i)}{Cov\,(R_M, -q_i)}\,[E(R_M) - R_f] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-25)$$

가 된다. 이제 식 (3-25)에서 q_i 대신 식 (3-21)의 우변을 대입하여 정리하면

$$E(R_j) - R_f = \frac{Cov[R_j,\ U_i'(W_{i1})]}{Cov[R_M, U_i'(W_{i1})]}\,[E(R_M)\ - R_f] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-26)$$

단, $j = 1, 2, \cdots, N$

식 (3-26)은 균형상태하에서 개별자산 j의 R_f를 차감한 초과수익률은 시장포트폴리오의 초과수익률과 비례적임을 의미하고 있다. 그리고 이 비례값은 두 공분산의 비율(즉, R_M과 $U_i'(W_{i1})$의 공분산과 R_j와 $U_i'(W_{i1})$의 공분산의 비율)과 같음을 알 수 있다. 그리고 두 공분산의 비율을 모든 자산 j에 대하여 총합하면 결국 1이 되어 버린다. 이는 시장포트폴리오의 위험은 1이 됨을 의미하며 CAPM의 경우에 市場포트폴리오의 체계적 위험이 1인 것과 같은 의미를 가지고 있음을 알 수 있다. 식 (3-26)과 같이 效用에 근거한 가격결정모형의 문제점은 모형속에 투자자의 효용함수가 포함되어 있기 때문에 개별자산의 기대수익률에 대한 실제적 계산이 매우 어렵다. 이는 투자자의 효용함수의 형태에 대한 제약이 주어지면 完成市場 하에서나 不完成市場하에서 실제적 계산이 가능한 가격결정모형을 유도할 수가 있는데 이는 다음절에서 설명하기로 한다.

3. LRT형 效用函數와 자산가격결정모형

앞 절에서 개별자산의 가격 S_j는 식 (3-26)에서 보는 바와 같이 투자자의 효용함수가 모형속에 포함되어 있어 현실적으로 산출이 어렵다는 것을 보았다. 그런데 만일 투자자의 효용함수가 분리가능하고 LRT(linear risk tolerance)형의 성질을 가진 경우에는 실제로 자산의 가격산출이 가능하게 된다. 그런데 LRT형의 효용함수는

$$-\frac{U_i'(W_{i1}(\theta))}{U_i''(W_{i1}(\theta))} = a_i + bW_{i1}(\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-27)$$

여기에서, a_i, b는 상태 θs와 독립인 상수이며 b는 모든 투자자에 대하여 동일하다고 가정.

로 표시된다.

한편 完成市場의 경우에는 앞장의 식 (2−6)의 최적화 계획에 의한 식 (2−7)의 A−D증권의 가격 $P(\theta s)$는 모든 투자자의 MRS와 일치함으로써 자원배분의 파레토 최적조건을 만족시킨다. 그러나 不完成市場하에서는 각 상태에 따른 A−D증권이 존재하지 않기 때문에 투자자들의 주관적 판단에 의한 각기 다른 MRS가 존재한다. 따라서 각 투자자에 의하여 평가된 內在的(implicit)인 A−D증권의 가격 $P_i(\theta s)$ (단, $i = 1, 2, \cdots, I$)가 존재하게되기 때문에 파레토 최적에 도달할 수가 없다.

그러나 무위험자산이 존재하고 투자자의 미래 상태 θs에 기대되는 富인 $W_{i1}(\theta s)$가 사회전체의 總富인 $W_1(\theta s)$의 線型으로 표시될 경우, 즉

$$W_{i1}(\theta s) = r_i + k_i\, W_1(\theta s) \cdots\cdots \quad (3-28)$$

여기에서, r_i = 무위험자산투자분의 수익
k_i = 투자자 i의 위험자산 ($j = 1, 2, \cdots, N$)에 대한 투자비율임($k_i = k_{i1} = k_{i2} \cdots = k_{iN}$)

로 표시된다고 하자. 여기에 투자자의 미래에 대한 기대가 동질적이고 효용함수가 식 (3−27)의 형태로 표시될 경우에는 不完成市場하에서도 파레토 최적에 도달할 수가 있다.[4]

이렇게 볼 때 식 (3−26)을 LRT형을 가진 효용함수로 대체함으로써 파레토 최적에 의한 균형모형을 유도할 수 있을 뿐만 아니라 실제적 계산이 가능함으로써 모형의 현실적 적용이 가능하게 된다.

그런데 식 (3−27)을 만족시키는 효용함수의 형태를 알아보기 위해서는 미분방정식(differential equation)을 풀어야 한다.[5] 이는

$$b \neq 0,\ b \neq 1 \sim U_i(W_{i1}(\theta s)) = \frac{1}{b-1}\,(a_i + b\,W_{i1}(\theta s))^{1-(1/b)} \cdots\cdots \quad (3-29a)$$

$$b = 1 \quad \sim U_i(W_{i1}(\theta s)) = \ln(a_i + W_{i1}(\theta s)) \cdots\cdots \quad (3-29b)$$

$$b = 0 \quad \sim U_i(W_{i1}(\theta s)) = -a_i \exp\left(-\frac{W_{i1}(\theta s)}{a_i}\right) \cdots\cdots \quad (3-29c)$$

4) Mossin, J., The Economic Efficiency of Financial Mankets, Lexington Books, 1977.
5) 국찬표, 구본열, 현대재무론 제 4 장, 비봉출판사, 1990.

와 같이 될 것이다. 결국 LRT성질을 가진 효용함수는 멱함수(이 경우에 $b=-1$이면 이차함수), 대수함수 및 지수함수의 형태를 가짐을 알 수 있다.

이제 위의 효용함수들과 식 (3-26)을 이용하여 균형상태하에서 각각 현실적으로 적용이 가능한 가격결정모형을 유도하여 보기로 하자.

(경우 1) $b \neq 0$, $b \neq 1$의 경우

식 (3-29a)에서

$$U_i(W_{i1}(\theta)) = \frac{1}{b-1} \quad (a_i + bW_{i1}(\theta))^{1-(1/b)}$$

이 되며 파레토 최적에 도달하기 위한 조건으로 식 (3-28)에서

$$W_{i1}(\theta) = r_i + k_i W_i(\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-28)$$

이 되어 식 (3-28)의 관계식을 위 식 (3-29a)에 대입하면

$$U_i(r_i + k_i W_i(\theta)) = \frac{1}{b-1}\left[a_i + b\{r_i + k_i W_i(\theta)\}\right]^{1-(1/b)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-30)$$

이 된다.

이제 위 식의 양변에 $W_i(\theta)$에 대하여 미분하면

$$k_i U_i'(r_i + k_i W_i(\theta)) = k_i\left[a_i + b\{r_i + k_i W_i(\theta)\}\right]^{-(1/b)}$$

이 되어 이를 정리하면

$$U_i'(W_{i1}(\theta)) = \left[a_i + b\{r_i + k_i W_i(\theta)\}\right]^{-(1/b)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3-31)$$

이 된다.

이제 식 (3-26)의 공분산비율은 식 (3-31)을 이용하면

$$\frac{Cov[R_j, U_i'(W_{i1})]}{Cov[R_M, U_i'(W_{i1})]} = \frac{Cov[R_j, \{a_i + b(r_i + k_i W_i)\}^{-(1/b)}]}{Cov[R_M, \{a_i + b(r_i + k_i W_i)\}^{-(1/b)}]} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3-32)$$

이 된다.

식 (3−32)가 어떤 경우에 실제로 계산이 가능한가를 살펴보기로 하자. 이는 다음과 같은 2가지의 경우에만 가능할 것이다.

① $b = -1$의 경우 (2차함수의 경우)

이 경우에 식 (3−32)의 공분산비율의 값은

$$\frac{Cov[R_j, \{a_i - r_i - k_i W_I\}]}{Cov[R_M, \{a_i - r_i + k_i W_I\}]}$$
$$= \frac{Cov(R_j, W_I)}{Cov(R_M, W_I)} = \frac{Cov(R_j, R_M M)}{Cov(R_M, R_M M)}$$
$$= \frac{Cov(R_j, R_M)}{Var(R_M)} = \beta_j \quad \cdots\cdots \quad (3-33)$$

이 된다. 이 경우에 관계식은

$$E(R_j) - R_f = \beta_j [E(R_M) - R_f] \quad 단,\ j = 1, 2, \cdots, N \quad \cdots\cdots \quad (3-34)$$

가 되어 전통적인 CAPM이 된다. 따라서 CAPM은 자본시장의 균형하에서 투자자의 효용함수가 2차함수의 경우에 유도되어지는 자산의 가격결정모형이다. 이 모형에서 보는 바와 같이 市場 포트폴리오 수익률 R_M은 투자자의 選好体系(preference structure)와는 독립이 되어 개별자산의 기대수익률의 산출이 가능해진다. 따라서 앞절에서 정의된 $q_i \{= Y_i / [E(Y_i)\ (1 + R_f)]\}$는 음(−)의 시장포트폴리오 수익율이 됨이 증명된다.

결국 식 (3−34)는 기대효용을 극대화하려는 투자자들이 개별자산에 대하여 부담하려는 기대수익률은 two-fund 理論에 입각하여 무위험자산과 시장포트폴리오의 선형결합에 의해 평가될 수 있음을 의미하고 있다. 그리고 이러한 자본시장의 균형하에서는 完成市場 하에서나 不完成市場하에서 파레토 최적배분조건을 만족시키고 있음을 알 수 있다.

② $a_i = r_i = 0$의 경우

이 경우에 식 (3−32)의 공분산 비율의 값은

$$\frac{Cov[R_j, \{bk_i W_i\}^{-(1/b)}]}{Cov[R_M, \{bk_i W_i\}^{-(1/b)}]} = \frac{Cov[R_j, R_M^{-(1/b)}]}{Cov[R_M, R_M^{-(1/b)}]}$$

$$= \frac{Cov[R_j, R_M^{-(1/b)}]}{Cov[R_M, R_M^{-(1/b)}]} \quad \cdots\cdots\cdots (3-35)$$

이 된다. 이 경우 식 (3－26)은

$$E(R_j) - R_f = \frac{Cov[R_j, R_M^{-(1/b)}]}{Cov[R_M, R_M^{-(1/b)}]} [E(R_M) - R_f] \quad \cdots\cdots\cdots (3-36)$$

이 된다.

식 (3－36)은 자본시장의 균형하에서 투자자의 효용함수가 멱함수의 경우에 유도되어지는 자산의 가격결정모형이다. 이 식에서는 q_i는 $(-R_M^{-(1/b)})$이 되며 또한 투자자의 선호체계와 독립이 되어 개별자산의 기대수익률의 산출이 가능해진다. 그런데 멱함수는 항상 상대위험회피 (CRRA)의 성질을 가지고 있다.

(경우 2) $b = 1$과 $a_i = r_i = 0$의 경우

식 (3－29b)에서

$$U_i(W_{il}(\theta)) = \ln(a_i + W_{il}(\theta)) \quad \cdots\cdots\cdots (3-29b)$$

이 되며 파레토 최적 도달 조건인 식 (3－28)을 위식에 대입하면

$$U_i(k_i W_l(\theta)) = \ln(k_i W_l(\theta)) \quad \cdots\cdots\cdots (3-37)$$

이 된다.

이제 식 (3－37)의 양변에 $W_l(\theta)$에 대하여 미분하면

$$k_i U_i'(k_i W_l(\theta)) = \frac{k_i}{k_i W_l(\theta)}$$

이 되고 이를 정리하면

$$U_i'(W_{il}(\theta)) = \frac{1}{k_i W_l(\theta)} \quad \cdots\cdots\cdots (3-38)$$

이 된다.

따라서 식 (3－26)의 공분산 비율은 식 (3－38)을 이용하면

$$\frac{Cov[R_j,\ 1/k_i W_i]}{Cov[R_M,\ 1/k_i W_i]} = \frac{Cov(R_j,\ 1/R_M M)}{Cov(R_M,\ 1/R_M M)}$$

$$= \frac{Cov(R_j,\ R_M^{-1})}{Cov(R_M,\ R_M^{-1})} \quad \cdots\cdots \quad (3-39)$$

이 된다. 이 경우 식 (3−26)은

$$E(R_j) - R_f = \frac{Cov(R_j,\ R_M^{-1})}{Cov(R_M,\ R_M^{-1})}\left[E(R_M) - R_f\right] \quad \cdots\cdots \quad (3-40)$$

단, $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$

로 표시된다.

식 (3−40)은 투자자의 효용함수가 대수형태로써 $b = 1$, $a_i = r_i = 0$의 경우에 유도되는 자산의 가격결정모형이다. 여기에서는 q_i는 $(-R_M^{-1})$이 되며 이 경우에도 투자자의 선호체계와는 독립이 되어 기대수익률의 산출이 가능하다.

(경우 3) $b = 0$의 경우

식 (3−29c)에서

$$U_i(W_{i1}(\theta)) = -a_i \exp(-W_{i1}(\theta)/a_i) \quad \cdots\cdots \quad (3-29c)$$

이 되며 파레토 최적 도달 조건인 식 (3−28)을 위식에 대입하면

$$U_i(r_i + k_i W_1(\theta)) = -a_i \exp\left(-\frac{r_i + k_i W_1(\theta)}{a_i}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3-41)$$

이 된다.

이제 식 (3−41)의 양변에 $W_1(\theta)$에 대하여 미분하면

$$k_i U_i'(r_i + k_i W_1(\theta)) = k_i \exp\left(-\frac{r_i + k_i W_1(\theta)}{a_i}\right)$$

이 되고 이를 정리하면

$$U_i'(W_{il}(\theta)) = \exp\left(-\frac{r_i + k_i W_1(\theta)}{a_i}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3-42)$$

이 된다.

이제 식 (3−26)의 공분산비율은 식 (3−42)를 이용하면

$$\frac{Cov\left[R_j, \exp\left(-\frac{r_i+k_i W_1}{a_i}\right)\right]}{Cov\left[R_M, \exp\left(-\frac{r_i+k_i W_1}{a_i}\right)\right]} = \frac{Cov\left[R_j, \exp\left(-\frac{k_i}{a_i}MR_M\right)\right]}{Cov\left[R_M, \exp\left(-\frac{k_i}{a_i}MR_M\right)\right]} \quad \cdots\cdots \quad (3-43)$$

이 된다. 그런데 이 경우에 q_i는 $\left[-\exp\left(-\frac{k_i}{a_i}MR_M\right)\right]$ 이 되어 개인의 효용체계와 독립이 되지 못하고 따라서 기대수익률도 투자자의 선호체계에 따라 다를 것이다. 따라서 효용함수가 지수함수의 경우에는 기대수익률의 실제의 산출이 불가능하게 된다.

Ⅳ. 多期間의 자산가격결정모형의 유도

1. CRRA의 경우의 자산가격결정모형

앞장의 경우 단일기간을 가정하여 가격결정모형을 유도하였다. 여기에서는 多期間의 경우에 가격결정모형을 유도하여 보기로하자. 이를 위하여 앞장에 가정된 사실이 모두 성립한다고 하고 또한 多期間의 경우에도 아비트리지 기회의 존재가 불가능하다고 가정하자. 그러면 다기간의 경우에 임의의 개별자산 (편의상 첨자 j 생략)의 t = 0 시점에서의 가격 S_o는

$$S_o = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(\triangle S_t) + Cov(\triangle S_t, Y_t)/E(Y_t)}{R_{ft}} \quad \cdots\cdots \quad (4-1a)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(\triangle S_t) + Cov(\triangle S_t, \alpha_t)}{R_{ft}} \quad \cdots\cdots \quad (4-1b)$$

여기에서 t = 1, 2, …은 각 시점을 나태냄, $\triangle S_t(\theta s)$ = t 시점의 상태 θs에서의 순이득(net payoff)이며 이의 기대값은 $E(\triangle S_t)$임

$\alpha_t = Y_t/E(Y_t) = (1 + R_{ft})\, q_t = (1 + R_{ft})\, \left[Z_t(\theta s) / \Pi_t(\theta s)\right]$로 나타냄

$(1 + R_{ft})^{-1} = \sum_{s(t)} Z_t(\theta s)$

로 표시될 수 있다. 그런데 多期間의 경우에도 자본 시장은 앞장의 가정에 의해 파레토 최적 달성이 가능할 것이다. 따라서 경쟁시장에서 이루어지는 상태가격은 完成市場하의 A−D증권의 가격 $Z_t(\theta s)$과 동일하며 이는 모든 투자자에 대하여 동일할 것이다. 즉,

$$Z_t(\theta s) = \frac{\Pi_t(\theta s)\ U'(W_t(\theta s))}{\sum_{s(t)} \Pi_t(\theta s)\ U'(C_o)} \quad \cdots\cdots \quad (4-2)$$

여기에서 $\Pi_t(\theta s)$ = t 시점의 상태 θs가 발생될 확률

로 표시된다.

따라서 다기간의 경우에 개별자산의 가격 S_o는

$$S_o = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(\triangle S_t) + (1 + R_{ft})\ Cov(\triangle S_t, U'(W_t) / \sum_{s(t)} \Pi_t(\theta s)\ U'(C_o))}{R_{ft}} \quad (4-3)$$

으로 표시될 것이다.

식 (4−3)은 앞장의 단일기간의 경우와 마찬가지로 공분산항에 효용함수가 포함되어 있으므로 가격결정을 위한 현실적 적용이 어렵게 된다.

따라서 多期間의 경우에도 資産價格의 실제적 계산이 가능하게 되기 위해서는 투자자의 效用函數에 대한 제약이 따른다. 그런데 多期間의 경우에는 앞장의 경우의 투자자의 效用函數가 LRT형을 가질 뿐만 아니라 항상상대위험회피(constant relative risk aversion : CRRA)의 성질을 가지고 있어야 한다. 이는 복잡한 多期間의 경우에 실제적 價格 결정을 가능하게 하기 위해서는 기간별 최적포트폴리오의 결정이 투자자의 基礎富(initial wealth)와 독립이 되어야 하기 때문이다. 그런데 이러한 성질을 만족하는 效用函數는 CRRA의 성질을 가지며 구체적으로는 대수함수나 멱함수의 형태를 가지고 있다.

이제 CRRA의 가정하에 t시점에서 투자자의 富 W_t중 일정 비율 d_t만큼 소비한다면 시점 t에서의 소비 C_t는

$$C_t = d_t W_t \quad 단,\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \quad \cdots\cdots \quad (4-4)$$

가 될 것이다. 그런데 여기서 일정비율 d_t는 투자자의 소비와 독립으로 확률변수가 아니다. 이제 t시점에서의 시장포트폴리오의 수익률을 R_{Mt} (t = 1, 2, …)라고 하고 식을 전개하면 t시점의 소비 C_t는

$$C_t = d_t W_t$$
$$= d_t R_{Mt} (W_{t-1} - C_{t-1})$$
$$= d_t R_{Mt} (W_{t-1} - d_{t-1} W_{t-1})$$
$$= d_t(1-d_{t-1})\ R_{Mt} W_{t-1}$$
$$\vdots$$
$$= d_t(1-d_{t-1})\ (1-d_{t-2})\ \cdots\ (1-d_o)\ \left[R_{Mt}\ R_{Mt-1} \cdots R_{Ml}\right] W_o$$
$$= K_t R_{\bar{M}t} W_o = K_t R_{\bar{M}t} \left(\frac{C_o}{d_o}\right)$$
$$= (k_t/d_o) R_{\bar{M}t}\ C_o = \psi_t R_{\bar{M}t} C_o \quad \cdots\cdots \quad (4-5)$$

여기에서 $R_{\bar{M}t} = (R_{Mt} R_{Mt-1} \cdots R_{Ml})$로서 t시점까지의 시장포트폴리오 수익율의 積
$K_t = d_t(1-d_{t-1}) \cdots (1-d_o)$
$\psi_t = K_t / d_o$로 정의

로 표시될 것이다. 이제 투자자의 효용함수가 멱함수라 가정하고 식 (3−29a)를 이용하면 (편의상 $a_i = 0$)

$$U(C_t) = C^h / h \quad \cdots\cdots \quad (4-6)$$

로 둘 수 있을 것이다. 이에 의해 α_t는

$$\alpha_t = (1+R_{ft}) \quad \frac{U'(W_t(\theta s))}{\sum_{s(t)} \Pi_t(\theta s)\ U'(C_o)}$$
$$= (1 + R_{ft})\ (\psi_t\ R_{\bar{M}t})^{h-1}$$
$$= (1 + R_{ft})\ (\psi_t^{h-1}\ R_{\bar{M}t}^{h-1}) \quad \cdots\cdots \quad (4-7)$$

이 된다.

이제 식 (4−7)의 양변에 기대값을 취하면

$$E(\alpha_t) = 1 = (1 + R_{ft})\ \psi_t^{h-1}\ E(R_{\bar{M}t}^{h-1}) \quad \cdots\cdots \quad (4-8)$$

이 되며, 따라서

$$E(R_{\bar{M}t}^{h-1}) = \frac{1}{(1+R_{ft})\,\psi_t^{h-1}} \quad \cdots\cdots \quad (4-9)$$

이 된다.

이제 식 (4－7)과 식 (4－9)에 의해

$$\alpha_t = \frac{R_{\bar{M}t}^{h-1}}{E(R_{\bar{M}t}^{h-1})} \quad \cdots\cdots \quad (4-10)$$

이 된다. 결국 식 (4－1)과 식 (4－10)을 비교하면

$$Y_t = R_{\bar{M}t}^{h-1} \quad \cdots\cdots \quad (4-11)$$

이 된다. 따라서 多期間의 경우에 개별자산의 가격 S_o는

$$S_o = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(S_t) + Cov(\triangle S_t, R_{\bar{M}t}^{h-1}) / E(R_{\bar{M}t}^{h-1})}{R_{ft}} \quad \cdots\cdots \quad (4-12)$$

가 된다. 식 (4－12)은 다기간의 경우에 개별자산의 가격결정모형이 된다. 따라서 多期間의 경우에 효용함수가 멱함수의 형태의 경우에 앞장에서 정의된

$q_t = R_{\bar{M}t}^{h-1} / [E(R_{Mt})\,(1+R_{ft})]$가 됨이 증명된다.

따라서 完成市場하에서와 不完成市場하에서도 효용함수가 LRT형이고 또한 멱함수나 대수함수의 형태를 가지는 경우에는 개별자산의 가격은 시장포트폴리오의 수익률만 계산할 수 있다면 실제적으로 측정가능하게 된다.

2. 단순한 가정하의 자산가격결정모형

앞 절에서 효용함수가 멱함수의 경우에 $Y_t = R_{\bar{M}t}^{h-1}$가 됨을 보였다. 이제 多期間의 경우 아래와 같은 가정이 주어질 경우 간단히 가격 S_o를 구하는 방법에 대하여 살펴보기로 하자. 이를 위하여 우선 다음과 같이 부호를 정의하라.

$\triangle S_t = \triangle S_o(g_1\, g_2\, g_3 \cdots g_t)$, 여기서 g_t는 t시점 ($t = 1, 2, \cdots$)에서 $\triangle S$의 (1 + 성장율)임

$Y_t = Y_o(y_1\ y_2\ y_3 \cdots y_t)$, 여기서 y_t는 t시점 $(t = 1, 2, \cdots)$에서 Y의 (1 + 성장율)임

R_{ft} = t시점에서의 이자율로서 $R_{ft} = r_{f1}\ r_{f2} \cdots r_{ft}$ 정의하며 $r_{f1}, r_{f2}, \cdots r_{ft}$는 t시점의 R_{ft}를 계산하기 위한 무위험이자율의 조정치임.

이제 위의 정의를 이용하여 식 (4-1a)를 변형하면

$$S_o = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{[E(Y_t)\,E(\triangle S_t) + Cov(\triangle S_t, Y_t)] / E(Y_t)}{R_{ft}}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(Y_t \triangle S_t) / E(Y_t)}{R_{ft}}$$

$$= \triangle S_o \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E[g_1 g_2 g_3 \cdots g_t y_1 y_2 \cdots y_t] / E[y_1 y_2 \cdots y_t]}{r_{f1}\, r_{f2} \cdots r_{ft}} \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-13)$$

로 표시된다.

그런데 식 (4-13)의 가격결정모형에서 무위험이자율은 시간의 변화에 따라 일정한 것으로 가정하고 g의 성장율과 Y의 성장율은 각각 일정하다고 하자. 그리고 g의 성장율과 Y의 성장율은 서로 상관 관계를 가진다고 가정하여 식 (4-13)을 변형하면

$$S_o = \triangle S_o \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(g_1 y_1)\, E(g_2 y_2) \cdots E(g_t y_t) / E(y_1)\, E(y_2) \cdots E(y_t)}{r_{f1}\, r_{f2} \cdots f_{ft}} \right\}$$

$$= \triangle S_o \left\{ \frac{E(g) + Cov(g, y) / E(y)}{r_f - [E(g) + Cov(g, y) / E(y)]} \right\}$$

$$= \triangle S_o \left\{ \frac{E(g) + Cov(g, R_{\bar{M}}^{h-1}) / E(R_{\bar{M}}^{h-1})}{r_f - [E(g) + Cov(g, R_{\bar{M}}^{h-1}) / E(R_{\bar{M}}^{h-1})]} \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-14)$$

이 된다. 만약 g의 성장율과 Y의 성장율간의 상관 관계가 존재하지 않는다면 식 (4-14)는

$$S_o = \frac{\triangle S_o\, E(g)}{r_f - E(g)} = \frac{\triangle S_1}{r_f - E(g)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-15)$$

이 된다. 그런데 식 (4-15)는 고든(Gordon)의 배당 평가모형과 비슷한 체계를 이루고 있음을 알 수 있다.

V. 結　論

지금까지 Farkas lemma와 재정이론에 근거를 두고 유도된 가격결정모형을 토대로 이에 대한 경제적 의미의 부여와 아울러 여러가지의 가격결정모형을 유도하고 이를 분석하였다. CAPM은 투자자의 효용함수가 2차함수임을 가정하기 때문에 실제로 자본시장의 적용에 한계가 따른다고 볼 수 있다. 따라서 본 논문은 자본시장의 균형하에 효용함수가 2차함수일 경우에 뿐만아니라 멱함수와 대수함수의 경우에도 실제로 자본시장에 적용가능한 자산가격결정모형을 유도하였다. 아울러 다기간의 경우에도 투자자의 효용함수가 CRRA의 성질을 가지는 경우에도 실제로 적용가능한 자산가격결정모형을 유도하였다. 그러므로 우리나라의 경우에 투자자의 효용함수의 형태를 실증적 연구에 의해 파악되어진다면 본 논문에서 유도된 자산가격결정모형을 적용함으로써 균형하의 자산의 가격 또는 기대수익률을 산출할 수가 있을 것이다.

참 고 문 헌

국 찬표, 구 본열, 현대재무론, 비봉출판사, 1990.

Alexander, G. J., and J. C. Francis, Portfolio Analysis, Prentice Hall, 1986.

Arrow, K. J., "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing," Review of Economic Studies, 31, 1964.

Baron, P., "On the Relationship Between Complete Market and Incomplete Financial Market Models," International Economic Review, Vol. 20, No. 1, February, 1979.

Brennan, N. J., and A. Krouse, "Necessary Conditions for Aggregation in Securities Markets," Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13, September, 19 78.

Breeden, D. T., M. R. Gibbons, and R. H. Litzenberger, "Empirical Test of Consumption-Oriented CAPM", Journal of Finance, 44, 1989.

Breeden, D. T., and R. H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," Journal of Business, 51, 1978.

Cass, D., and J. E. Stiglitz, "The Structure of Investor Preference and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation : A contribution to the Pure Theory of Mutual Funds," Journal of Economic Theory, 2, 1970.

Debreu, G., The Theory of Value, New York : Wiley, 1959.

Diamond, P., "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty," American Economic Review, 57, 1967.

Ekern, S., and R. Wilson, "On The Theory of the Firm in an Economy with Incomplete Markets" Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 5, No. 1, Spring, 1974.

Fama, E., "Multiperiod Consumption-Investment Decisions," American Economic Review, 60, March, 1970.

Fama, E., and M. Miller, The Theory of Finance, New York, 1972.

Fama, F., Foundations of Finance, New York, Basic Books, Inc., 1979.

Garman, M., "A Synthesis of the Pure Theory of Arbitrage," Unpublished Working

Paper, University of California at Berkeley, 1978.

Hakansson, N., "Optimal Entrepreneurial Decisions in a Completely Stochastic Environment," Management Science, March, 1971.

Huang, C., and R. Ritzenberger, Foundation for Financial Economics, North-Holland, 1988.

Ingersoll, J. E., Theory of Financial Decision Making, Rowman and Littlefield Publisher, 1987.

Jensen, M. C., "Capital Markets : Theory and Evidence." Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 1972.

Lasdon, L. S., Optimization Theory for Large Systems, MacMillian Series in Operations Research, 1970.

Litzenberger, R. H., and E. I. Ronn, "Utility-Based Model of Common Stock Price Movements," Journal of Finance, 41, 1986.

Lucas, R. E., "Asset Price in an Exchange Economy," Econometrica, 46, 1978.

Kocherlakota, N. R., "Disentangling the Coefficient of Relative Risk Aversion from the Elasticity of Intertemporal Substitution : An Irrelevance Result," Journal of Finance, 45, 1990.

Krouse, C. G., Capital Market And Prices : Valuing Uncertain Income Streams, North-Holland, 1986.

MacMinn, R., and J. Martin, "The Theory of Corporate Finance Reconsidered" Working Paper, The University of Texas at Austin, 1983.

Merton, R., and M Subrahmanyam, "The optimality of a Competitive Stock Market," Bell Journal of Economics and management Science, 1974.

Mossin, J., Theory of Financial Markets, Prentice Hall, New York, 1973.

Mossin, J., The Economic Efficiency of Financial Markets, Lexington Books, 19677.

Murty, K. G., Linear and Combinatorial Programming, John Wiley and Sons, Inc., 1976.

Ohlson, J. A. The Theory of Financial Markets and Information, North-Holland, 1987.

Ohlson, J. A., "Expost Stockholder Unanimity : A Complete and Simplified Treatment," Journal of Banking and Finance, 9, October, 1985.

Ross, S. A., "The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing," Journal of Economic Theory, 13, December, 1976.

Rubinstein, M., "The Fundamental Theorem of Parameter-Preference Security Valua-

tion," Journal of Financial and Quantitative Analysis, 8, January, 1973.
Rubinstein, M., "An Aggregation Theorem for Securities Markets," Journal of Financial Economics, September, 1974.
Rubinstein, M., "Security Market Efficiency in an Arrow-Debreu Economy," American Economic Review, 65, 1975.
Rubinstein, M., "The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets," Journal of Finance, May, 1976.
Rubinstein, M., "The Valuation of Uncertain Income Stream and the Pricing of Options," Bell Journal of Economics, Autumn, 1976.
Sharpe, W. F., "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrim Under Conditions of Risk," Journal of Finance, 19, September, 1964.
Stiglitz, J. E., "On the optimality of the Stock Market Allocation of Investment," Quarterly Journel of Economics, 86, 1972.
Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk," Review of Economic Studies, 1958.
Wilson, R., "Pareto-optimal Dividend Policy," Management Science, 13, 1967.
Wilson, R., "The Theory of Syndicates," Econometrica, 36, 1968.