韓國軍事運營分析學會誌
第16卷, 第2號, 1990. 12. 31.

p個 特定地點을 經由하는 k-最短經路 알고리즘 開發*
(A Development of Algorithm for Determining the k Shortest Paths Visiting p Specified Nodes in a Network)

金潤吉 · 閔啓了**

Abstract

In the transportation network problems, it is often more desirable to select multiple number of optimal parths to prepare for additional constratints being imposed than to choose single optimal path. This paper addresses "the problem of finding the k-shortest paths visiting p-specified nodes in a network". The solution method is derived and the example of application is shown.

The keypoint for determining the k-shortest paths via p-specified nodes is to combine the Shier's k-shortest path algorithm and the principle of optimality of dynamic programming method. Finally, for a transportation network problem consisting of national main routes, the k-shortest paths via some specified cites are obtained by using the solution method developed here.

1. 序 論

네트웍 分析은 運營體系(operational system)를 說明하고 改善하는데 매우 重要한 역할을 하고 있으며 앞으로 그 活用度가 增大될 것으로 보여진다. 네트웍 分野에서 決定的 네트웍(deterministic network)은 네트웍內의 모든 弧값

* 1990年 秋季學術大會時 發表된 內容임.

**國防大學院

(values of arcs)이 一定한 값으로 정해져 있는 네트웍으로서 여기에서는 주로 最小全長나무 (minimum spanning tree)問題, 最短經路 (shortest path)問題, 最長經路(longest path) 問題, 最大흐름(maximum flow)問題, 最小費用흐름(minimum cost flow)問題 등을 다루고 있다〔2〕.

最短經路問題에 대하여는 1959年 Dijkstra에 의해 特定 두 마디間 最短經路技法이 開發된 이래 많은 技法들이 開發되었다. 특히 1976年度에 Sheir는 어떤 한 地點에서 네트웍內 모든 다른 地點에 이르는 複數개의 短經路를 選定하는 技法 즉 k-最短經路技法을 考案하였다. Shier가 考案한 이 k-最短經路技法은 네트웍內에서 經由해야 하는 地點을 考慮하지 않고 단지 어떤 한 地點에서 目的地에 이르는 k개의 短經路를 찾는 技法이다〔5〕.

그러나 現實體系에서는 어떤 한 地點에서 目的地까지 갈 때 中間에 반드시 어떤 特定地點을 經由해야만 하는 境遇가 많이 發生한다. 이와같은 狀況下에서 k-最短經路를 구하고자 할 境遇 Sheir가 考案한 k-最短經路技法만으로는 解決이 不可能하다.

따라서 본 硏究에서는 Sheir의 k-最短經路技法과 動的計劃法(dynamic programming)의 最適性의 原理(principle of optimality)를 利用하여 네트웍內 어떤 한 地點에서 出發하여 p個의 特定地點을 經由한 다음 目的地에 이르는 k-最短經路 즉 "p個의 特定地點을 經由하는 k-最短經路計算法"을 開發하고자 한다.

本 硏究에서 다루는 네트웍은 모든 弧값(values of arcs)이 一定한 값으로 주어져 있는 決定的 네트웍(deterministic network)으로서 모든 弧값은 非陰이고, 네트웍內 自體環(self loop)은 包含되어 있지 않으며, 經由해야 하는 特定地點의 經由順序는 定해져 있지 않고, p個의 特定地點을 經由하는 k-最短經路는 반드시 基本經路일 必要는 없다고 假定한다. 즉, 어떤 마디간을 往復하는 經路도 하나의 經路로서 인정된다. 따라서 往復하는 마디가 特定地點이 아닌 경우와 特定地點을 2回 以上 往復하는 經路는 새로운 經路로서 意味가 없기 때문에, p個의 特定地點을 經由하는 k개의 最短經路를 선정하면 실제 意味있는 經路는 k개 以下가 될 수 있다.

問題解決을 위한 接近方法으로는 一般的 演算(generalized operation)과 代數的 構造를 導入한 다음, Shier의 k-最短經路技法과 循環關係을 利用하여 "p個의 特定地點을 經由하는 k-最短經路 計算法"을 導出한다.

2. k-最短經路의 槪要

가. 用語의 槪念

本 硏究에서 주로 使用되는 用語의 槪念은 다음과 같다.

네트웍(network)에서 $i_0, i_1, \cdots i_t$을 마디라고 할 때 t개의 호(i_0, i_1), (i_1, i_2), $\cdots$, (i_{t-1}, i_t)의 順序的

配列(ordered sequence)인 $[(i_0, i_1), (i_1, i_2), \cdots, (i_{t-1}, i_t)]$를 源마디 i_0에서 着마디 i_t에 이르는 크기(size) t인 經路(path)라 하고, 만일 經路上에 弧가 m個 包含되어 있으면 크기 m인 經路라 하며, 經路上에 있는 모든 마디에 相異한 경우 그 經路를 基本經路(elementary path)라고 한다.

源마디와 着마디가 同一한 經路 즉, $i_0 = i_t$인 經路를 回路(circuit)라 하고, 源마디와 着마디가 同一한 것을 除外하고 모든 마디가 相異한 回路를 基本回路(elementary circuit)라고 하며, 크기 1인 回路를 自體環(self-loop)이라고 한다.

經路길이(length of a path) 혹은 經路값(value of a path)은 經路上상에 있는 모든 弧길이(arc length)의 算術的 合으로 定義된다[5].

k-最短經路는 特定 두 마디간 첫번째, 두번째, …, k번째 短經路를 同時에 包含하는 經路로 定義된다. [6]

나. k-最短經路값 行列

(1) 記號(notations)

本 硏究에서 使用되는 記號를 定義하면 다음과 같다.

R : 實數의 集合

R_∞ : 實數의 集合과 無限大(∞)로 構成된 集合($R \cup \{\infty\}$)

n : 네트웍內 總 마디 數

k : 要望되는 最短經路數

p : 반드시 經由해야 하는 特定마디 數

S^k : 엄격히 增加順序(strictly increasing order)로 된 R_∞에서 k個 要素를 選定하여 構成한 k次元의 벡터 集合으로서 다음과 같다.

$S^k = \{a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a \in R_\infty,\ a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$, 편의상 $\infty < \infty$로 가정한다.

M^k : S^k의 元素인 $a = (a_1, a_2 \cdots, a_k)$形態의 벡터가 n^2개 모여서 이루어진 $n \times n$ 行列의 集合을 의미한다.

e : 첫번째 元素는 0이고, 나머지 元素는 ∞인 行벡터로서 다음과 같다.

$$e = (0, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

v : ∞를 元素로 하는 行벡터로서 다음과 같다.

$$v = (\infty, \infty, \cdots, \infty)$$

A : 弧길이 行列로서 다음과 같다.

$$A = [a_{ij}],\quad a_{ij} = (d_{ij}, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

여기서 d_{ij}는 마디 i에서 마디 j에 이르는 弧의 길이(arc length)를 나타낸다. 만일 마디 i와 마디 j를 直接 連結하는 弧가 2개 以上 있으면 a_{ij}는 다음과 같이 된다.

$$a_{ij} = (d^1_{ij}, d^2_{ij}, \cdots, d^t_{ij}, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

여기서 $d^1_{ij}, d^2_{ij}, \cdots, d^t_{ij}$는 마디 i와 마디 j를 直接 連結하는 弧의 길이이고 $t \geq k$이면 ∞要素는 a_{ij}에 包含되지 않는다.

E : 行列의 主對角 元素(diagonal element)가 e이고 나머지가 v인 $n \times n$ 行列로서 다음과 같다.

$$E = \begin{bmatrix} e & v & v & \cdots & v \\ v & e & v & \cdots & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v & v & v & \cdots & e \end{bmatrix}$$

V : 行列의 모든 元素가 v인 n×n 行列로서 다음과 같다.

$$V = \begin{bmatrix} v & v & v & \cdots & v \\ v & v & v & \cdots & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v & v & v & \cdots & v \end{bmatrix}$$

a, b, c $\in S^k$이며 다음과 같다고 한다.

$a=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $a_1<a_2\cdots<a_k$

$b=(b_1, b_2, \cdots, b_k)$, $b_1<b_2\cdots<b_k$

$c=(c_1, c_2, \cdots, c_k)$, $c_1<c_2\cdots<c_k$

Min_j : 주어진 集合의 元素 중에서 j번째로 작은 元素를 나타내는 演算을 의미한다.

f_i^q : 마디 i에서 적어도 q個의 서로 다른 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값을 의미한다.

i_0 : 源마디, i_t : 着마디

$s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$: 特定마디,

$i(i_0, s)$: 源마디 및 特定마디

(2) 一般的 演算〔5〕

S^k의 元素인 a, b, c로 다음과 같은 두가지 演算($\oplus$, $\otimes$)을 定義한다.

$$a\oplus b=c \Leftrightarrow c_j=\min_j\{a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k\},\quad j=1, 2, \cdots, k \tag{2-1}$$

$$a\otimes b=c \Leftrightarrow c_j=\min_j\{a_i+b_l \mid i, l=1, 2, \cdots, k\},\quad j=1, 2, \cdots, k \tag{2-2}$$

위의 式(2-1)을 一般的 最小化(generalized minimization)演算, 式(2-2)를 一般的 合(generalized addition)演算이라고 한다.

(3) k-最短經路값 行列〔5〕

弧길이 行列 $A\in M^k$에 대하여 $m\geq 0$일때 A^m, $A^{\langle m\rangle}$, A^*를 다음과 같이 定義한다.

$$A^m=A\otimes A\otimes\cdots\otimes A \quad (m번) \tag{2-3}$$

$$A^{\langle m\rangle}=E\oplus A\oplus A^2\oplus\cdots\oplus A^m=\sum_{j=0}^{m} A_j \tag{2-4}$$

$$A^*=E\oplus A\oplus A^2\oplus\cdots=\sum_{j=0}^{\infty} A_j \tag{2-5}$$

여기서 $A^0=E$로 約束한다.

위 定義에서 A^m의 i行 j列의 元素는 네트웍의 마디 i에서 마디 j로 가는 크기(size) m인 經路의 k-最短經路값을 意味하고, $A^{\langle m\rangle}$의 i行 j列의 元素는 마디 i에서 마디 j로 가는 크기(size) m 以下인 經路의 k-最短經路값을 意味하며, A^*의 i行 j列의 元素는 마디 i에서 마디 j로 가는 크기(size)가 任意인 經路의 k-最短經路값을 意味한다.

따라서 A^*는 네트웍內 모든 마디간 k-最短經路값을 나타내는 行列이 되며 다음과 같은 性質이 成立한다.

$$\lim_{m\to\infty} A^{\langle m\rangle}=A^*$$

$$(E\oplus A)^m=A^{\langle m\rangle}$$

$$E\oplus A\otimes A^*=A^*$$

$$h\geq 1일때 \quad (A^*)^h=A^*$$

$$A\leq B \;\Rightarrow\; A^*\leq B^*$$

補助定理 : A를 마디가 n개인 네트웍의 弧길이 行列이라고 하면 다음과 같은 自然數 w가 存在한다.

$$h\geq w \;\Rightarrow\; A^*=A^{\langle h\rangle}$$

3. p個 特定마디를 經由하는 k-最短經路 計算法

가. 基本槪念

한 네트웍에서 經由해야 하는 特定마디의 順序가 定해져 있지 않을 때 源마디 i_0에서 出發하여 p個의 特定마디를 經由한 다음 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값을 구하고자 한다면, 源마디 i_0에서 모든 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 모든 k-最短經路값을 구한 다음, 이를 一般的 最小化 시키면 된다. 여기서, 源마디 i_0에서 어떤 特定마디를 經由한 다음 나머지 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값은 源마디 i_0에서 어떤 特定마디에 이르는 k-最短經路값과 그 特定마디에서 다른 모든 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값을 一般的 合하여 計算한다.

나. p個 特定마디를 經由하는 k-最短經路 計算法

(1) k-最短經路 計算法

本 硏究에서는 A*(모든 마디간 k-最短經路값 行列)에서 원마디 i_0에서 모든 特定마디에 이르는 k-最短經路값만 特定마디에서 다른 모든 特定마디 및 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값만 必要하므로, A*의 $i\,(i_0, i_1, \cdots, i_p)$번째 行의 값만 구하면 된다. e_i를 行列 E의 i번째 行이라고 하면, A*의 i번째 行의 값은 $e_i \otimes A^*$가 된다.

Shier의 雙消法(double sweep method)을 利用하여 $e_i \otimes A^*$를 計算하는 節次는 다음과 같다(計算法 1) [5].

① 弧길이 行列 A를 U(upper triangular matrix)와 L(lower triangular matrix)로 分解하여 U와 L을 構成한다.

② 最初 推定벡터를 賦與한다.

$$X(0) = e_i, \quad i = i_0, i_1, \cdots, i_p.$$

③ 다음 循環 關係式을 利用하여 계속적인 推定벡터를 計算한다.

$$X(2r-1) = X(2r-1) \otimes L \oplus X(2r-2)$$

$$X(2r) = X(2r) \otimes U \oplus X(2r-1)$$

여기서, $r \geq 1$이며, $X(2r-1)$의 成分 $X_j(2r-1)$은 $j=n, n-1, \cdots, 1$의 順序(backward sweep)로 計算하고, $X(2r)$의 成分 $X_j(2r)$은 $j=1, 2, \cdots, n$의 順序(forward sweep)로 計算한다.

④ $X(r) = X(r+1)$이면 $X(r) = e_i \otimes A^*$로 두고 終了한다.

⑤ $X(r) \neq X(r+1)$이면 r을 1씩 增加시킨면서 段階 ③, 段階 ④를 反復한다.

(2) p個 特定마디를 經由한 k-最短經路 計算法

計算法 1에 의해 구한 $e_i \otimes A^*$를 行列로 構成하면 $(p+1, n)$次元의 行列이 되며, 이 行列은 源마디에서 모든 다른 마디에 이르는 k-最短經路값과 特定마디에서 모든 다른마디에 이르는 k-最短經路값을 나타낸다. $e_i \otimes A^*$行列에서 行 i

$(i_0, i_1, \cdots, i_p)$와 列 $s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$의 要素를 選擇하여 새로운 行列 $D(i, s)$를 構成하면 $D(i, s)$는 마디 i에서 마디 s에 이르는 k-最短經路값 즉, 源마디 i_0에서 모든 特定마디에 이르는 k-最短經路값과 特定마디에서 다른 모든 特定마디에 이르는 k-最短經路값을 나타내는 $(p+1, p)$次元의 行列이 된다.

最適性의 原理(principle of optimality)란 初期의 狀態와 初期의 決定이 무엇이든 간에, 나머지 決定들은 最初 決定의 結果로서 發生된 狀態와 聯關되어 最適政策을 構成하여야 한다는 原理〔3〕로서 本 硏究에서 다루는 問題는 最適性의 原理를 適用하여 解決할 수 있는 바 그 이유는 다음과 같다.

① 問題를 2개의 段階로 구분할 수 있고, 각 段階에서 k-最短經路값 決定이 요구된다.

段階 1은 源마디에서 特定마디까지 이고, 段階 2는 特定마디에서 다른 모든 特定마디를 經由하여 着마디까지가 된다.

② 각 段階마다 狀態(state)가 存在한다.

狀態(state)는 特定마디가 되고, 結果(return)는 각 段階의 k-最短經路값이 된다.

③ 一連이 決定過程이 存在한다.

④ 나머지 段階의 k-最短經路값 決定은 以前段階의 k-最短經路값 決定과 獨立이다.

⑤ 循環關係가 存在한다.

따라서 f_i^q는 다음과 같은 循環關係式으로 定義될 수 있다.

$$\begin{aligned} f_i^q &= \{D(i, i_1) \otimes f_{i_1}^{q-1}\} \oplus \{D(i, i_2) \otimes f_{i_2}^{q-1}\} \oplus \cdots \\ &\quad \oplus \{D(i, i_p) \otimes f_{i_p}^{q-1}\} \\ &= \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i, s) \otimes f_s^{q-1}\} \end{aligned} \qquad (3\text{-}1)$$

여기서 $q = 0, 1, 2, \cdots, p$

$i \neq s$

i가 特定마디이고 $q \geq 2$ 이면, 각 項의 經路값들에 該當하는 經路上에 나타난 特定마디 數가 q個인가를 確認한다.

本 硏究에서는 源마디 i_0를 出發하여 p個의 特定마디를 經由한 다음 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값과 그 經路를 구하는데 目的이 있으므로 $f_{i_0}^p$와 $f_{i_0}^p$에 對應하는 經路를 구하면 된다.

式 (3-1)로부터 $f_{i_0}^p$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{i_0}^p &= \{D(i_0, i_1) \otimes f_{i_1}^{p-1}\} \oplus \{D(i_0, i_2) \otimes f_{i_2}^{p-1}\} \oplus \cdots \\ &\quad \oplus \{D(i_0, i_p) \otimes f_{i_p}^{p-1}\} \\ &= \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i_0, s) \otimes f_s^{q-1}\} \end{aligned} \qquad (3\text{-}2)$$

式 (3-2)에서 $D(i_0, s)$는 源마디 i_0에서 모든 特定마디 $s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$에 이르는 k-最短經路값을 意味하므로 위에서 새로 構成된 行列 $D(i, s)$의 첫번째 行의 값이 된다. 또한 $f_s^{p-1}(f_{i_1}^{p-1}, f_{i_2}^{p-1}, \cdots, f_{i_p}^{p-1})$은 다음과 같은 反復節次에 의하여 計算될 수 있다.

$f_s^0(f_{i_1}^0, f_{i_2}^0, \cdots, f_{i_p}^0)$: 特定마디 s에서 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값을 意味하므로 行列 $e_t \otimes A^*$에서 行 $s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$의 마지막 列의 값이 된다.

$f^1_s(f^1_{i_1},\ f^1_{i_2}, \cdots, f^1_{i_p})$: 特定마디 s에서 적어도 1個의 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값으로서 式(3-1)에 의하여 다음과 같이 計算된다.

$$f^1_{i_1} = \{D(i_1, i_2) \otimes f^0_{i_2}\} \oplus \{D(i_1, i_3) \otimes f^0_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_1, i_p) \otimes f^0_{i_p}\} = \sum_{s=i_2}^{i_p} \{D(i_1, s) \otimes f^0_s\}$$

$$f^1_{i_2} = \{D(i_2, i_1) \otimes f^0_{i_1}\} \oplus \{D(i_2, i_3) \otimes f^0_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_2, i_p) \otimes f^0_{i_p}\} = \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i_2, s) \otimes f^0_s\},\quad s \neq i_2$$

$$\vdots \tag{3-3}$$

$$f^1_{i_p} = \{D(i_p, i_1) \otimes f^0_{i_1}\} \oplus \{D(i_p, i_2) \otimes f^0_{i_2}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_p, i_{p-1}) \otimes f^0_{i_{p-1}}\} = \sum_{s=i_1}^{i_{p-1}} \{D(i_p, s) \otimes f^0_s\}$$

$f^2_s(f^2_{i_1},\ f^2_{i_2}, \cdots, f^2_{i_p})$: 特定마디 s에서 적어도 2個의 서로 다른 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값으로서 式(3-1)에 의하여 다음과 같이 計算된다.

$$f^2_{i_1} = \{D(i_1, i_2) \otimes f^1_{i_2}\} \oplus \{D(i_1, i_3) \otimes f^1_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_1, i_p) \otimes f^1_{i_p}\} = \sum_{s=i_2}^{i_p} \{D(i_1, s) \otimes f^1_s\}$$

$$f^2_{i_2} = \{D(i_2, i_1) \otimes f^1_{i_1}\} \oplus \{D(i_2, i_3) \otimes f^1_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_2, i_p) \otimes f^1_{i_p}\} = \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i_2, s) \otimes f^1_s\},\quad s \neq i_2$$

$$\vdots \tag{3-4}$$

$$f^2_{i_p} = \{D(i_p, i_1) \otimes f^1_{i_1}\} \oplus \{D(i_p, i_2) \otimes f^1_{i_2}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_p, i_{p-1}) \otimes f^1_{i_{p-1}}\} = \sum_{s=i_1}^{i_{p-1}} \{D(i_p, s) \otimes f^1_s\}$$

$f^{q-1}_s(f^{p-1}_{i_1},\ f^{p-1}_{i_2}, \cdots,\ f^{p-1}_{i_p})$: 特定마디 s에서 적어도 (p-1)個의 서로 다른 特定마디를 經由하여 着마디 i_t에 이르는 k-最短經路값으로서 式(3-1)에 의하여 다음과 같이 計算한다.

$$f^{p-1}_{i_1} = \{D(i_1, i_2) \otimes f^{p-2}_{i_2}\} \oplus \{D(i_1, i_3) \otimes f^{p-2}_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_1, i_p) \otimes f^{p-2}_{i_p}\} = \sum_{s=i_2}^{i_p} \{D(i_1, s) \otimes f^{q-2}_s\}$$

$$f^{p-1}_{i_2} = \{D(i_2, i_1) \otimes f^{p-2}_{i_1}\} \oplus \{D(i_2, i_3) \otimes f^{p-2}_{i_3}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_2, i_p) \otimes f^{p-2}_{i_p}\} = \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i_2, s) \otimes f^{p-2}_s\},\quad s \neq i_2$$

$$\vdots \tag{3-5}$$

$$f^{p-1}_{i_p} = \{D(i_p, i_1) \otimes f^{p-2}_{i_1}\} \oplus \{D(i_p, i_2) \otimes f^{p-2}_{i_2}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_p, i_{p+1}) \otimes f^{p-2}_{i_{p-1}}\} = \sum_{s=i_1}^{i_{p-1}} \{D(i_p, s) \otimes f^{p-2}_s\}$$

따라서 p個의 서로 다른 特定마디를 經由하는 k-最短經路값을 구하는 節次는 다음과 같다(計算法2).

〈段階 1〉

計算法 1에 의해 $e_i \otimes A^*$를 計算한다.

〈段階 2〉

$e_i \otimes A^*$에서 行 $i(i_0, i_1, \cdots, i_p)$와 列 $s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$의 要素를 選擇하여 새로운 行列 $D(i, s)$를 構成한다.

〈段階 3〉

$e_i \otimes A^*$에서 行 $s(i_1, i_2, \cdots, i_p)$의 마지막 列의

값을 選擇하여 $f^0_s(f^0_{i_1}, f^0_{i_2}, \cdots, f^0_{i_p})$를 구한다.

〈段階 4〉

式(3-3)로 부터 f^1_s을 구하고 계속 $f^2_s, f^3_s, \cdots, f^{p-1}_s$을 구한다.

〈段階 5〉

最終的으로 $f^p_{i_0}$를 計算한다.

$$f^p_{i_0} = \{D(i_0, i_1) \otimes f^{p-1}_{i_1}\} \oplus \{D(i_0, i_2) \otimes f^{p-1}_{i_2}\} \oplus \cdots \oplus \{D(i_0, i_p) \otimes f^{p-1}_{i_p}\}$$
$$= \sum_{s=i_1}^{i_p} \{D(i_0, s) \otimes f^{p-1}_s\}$$

(3) 經路 識別節次

計算法 2에 의해 p個의 特定마디를 經由한 k-最短經路값이 구해지면 그 經路값에 該當하는 經路를 識別해야 한다. 經路값에 該當하는 經路는 그 經路값을 구하는 節次를 識別한다. 즉, 源마디와 特定마디를 包含한 마디 i에서 特定마디 s에 이르는 行列 D(i, s)의 각 元素에 대한 經路를 識別 한 다음 $f^0_s, f^1_s, \cdots, f^{p-1}_s$에 대한 經路를 識別하고 最終的으로 D(i, s)의 각 元素에 대한 經路와 f^{p-1}_s에 대한 經路를 連結하여 $f^p_{i_0}$에 대한 經路를 識別한다. 각각의 經路 識別節次를 알아보면 다음과 같다.

(가) D(i, s)의 각 元素에 대한 經路識別〔5〕

〈段階1〉

$e_i \otimes A^*$에서 마디 i에서 마디 s에 이르는 m번째 短經路값을 $(a^*_{is})_m$이라 하고 이를 r(s, m)으로 놓는다. 여기서 r(s, m) < ∞로 假定하고 $1 \le m \le k$이다.

〈段階2〉

$r(s_1, m_1) + d_{s_1 s} = r(s, m)$을 滿足하는 s_1를 찾는다.

여기서, $m_1 \le m$이고 s_1은 s와 인접한 마디이다.

〈段階3〉

$s_1 = i$이면 이 經路는 마디 i에서 마디 s에 이르는 m번째 短經路가 된다.

〈段階4〉

$s_1 \ne i$이면 $s_1 = s$, $m_1 = m$으로 두고 〈段階 2〉로 가서 反復한다.

(나) f^0_s에 대한 經路識別

f^0_s에 대한 經路識別은 D(i, s)의 각 원소에 대한 經路識別節次와 同一한 方法으로 識別한다.

〈段階1〉

$e \otimes A^*$에서 마디 s에서 마디 i에 이르는 m번째 短經路값을 $(a^*_{si_t})_m$이라 하고 이를 $r(i_t, m)$으로 놓는다. 여기서, $r(i_t, m) < \infty$로 假定하고 $1 \le m \le k$이다.

〈段階2〉

$r(i_{t1}, m_1) + d_{i_{t1} i_t} = r(i_t, m)$을 滿足하는 i_{t1}을 찾는다.

여기서, $m_1 \le m$이고 i_{t1}은 i_t와 인접한 마디이다.

〈段階3〉

$i_{t1} = s$이면 이 經路는 마디 s에서 마디 i_t에 이르는 m번째 短經路가 된다.

〈段階4〉

$i_{l+1} \neq s$이면 $i_{l+1}=i_l$, $m_l=m$으로 두고 〈段階2〉로 가서 反復한다.

(다) $f^1_s, f^2_s, \cdots, f^{p-1}_s$에 대한 經路識別

1) f^1_s에 대한 經路

式(3-3)에 의해 經路값이 決定되면 그 經路값을 D(i, s)의 元素와 f^0_s로 分離하여 앞에서 決定한 D(i, s)의 元素에 대한 經路와 f^0_s에 대한 經路를 連結하여 f^1_s에 대한 經路를 識別한다.

2) f^2_s에 대한 經路

式 (3-4)에 의해 經路값이 決定되면 그 經路값을 D(i, s)의 元素와 f^1_s으로 分離하여 앞에서 決定한 D(i, s)의 元素에 대한 經路와 f^1_s에 대한 經路를 連結하여 f^2_s에 대한 經路를 識別한다.

3) f^{p-1}_s에 대한 經路

式(3-5)에 의해 經路값이 決定되면 그 經路값을 D(i, s)의 元素와 f^{p-2}_s로 分離하여 앞에서 決定한 D(i, s)의 元素에 대한 經路와 f^{p-2}_s에 대한 經路를 連結하여 f^{p-1}_s에 대한 經路를 識別한다.

(라) $f^p_{i_0}$에 대한 經路

D(i, s)의 元素, $f^0_s, f^1_s, \cdots, f^{p-1}_s$에 대한 經路가 識別되면 最終的으로 $f^p_{i_0}$에 대한 經路를 識別한다.

式(3-2)에 의해 經路값이 決定되면 그 經路값을 $D(i_0, s)$의 元素와 f^{p-1}_s로 分離하여 앞에서 決定한 $D(i_0, s)$의 元素에 대한 經路와 f^{p-1}_s에 대한 經路를 連結하여 $f^p_{i_0}$에 대한 經路를 識別한다.

4. p個 特徵마디를 經由하는 k-最短經路計算法의 適用

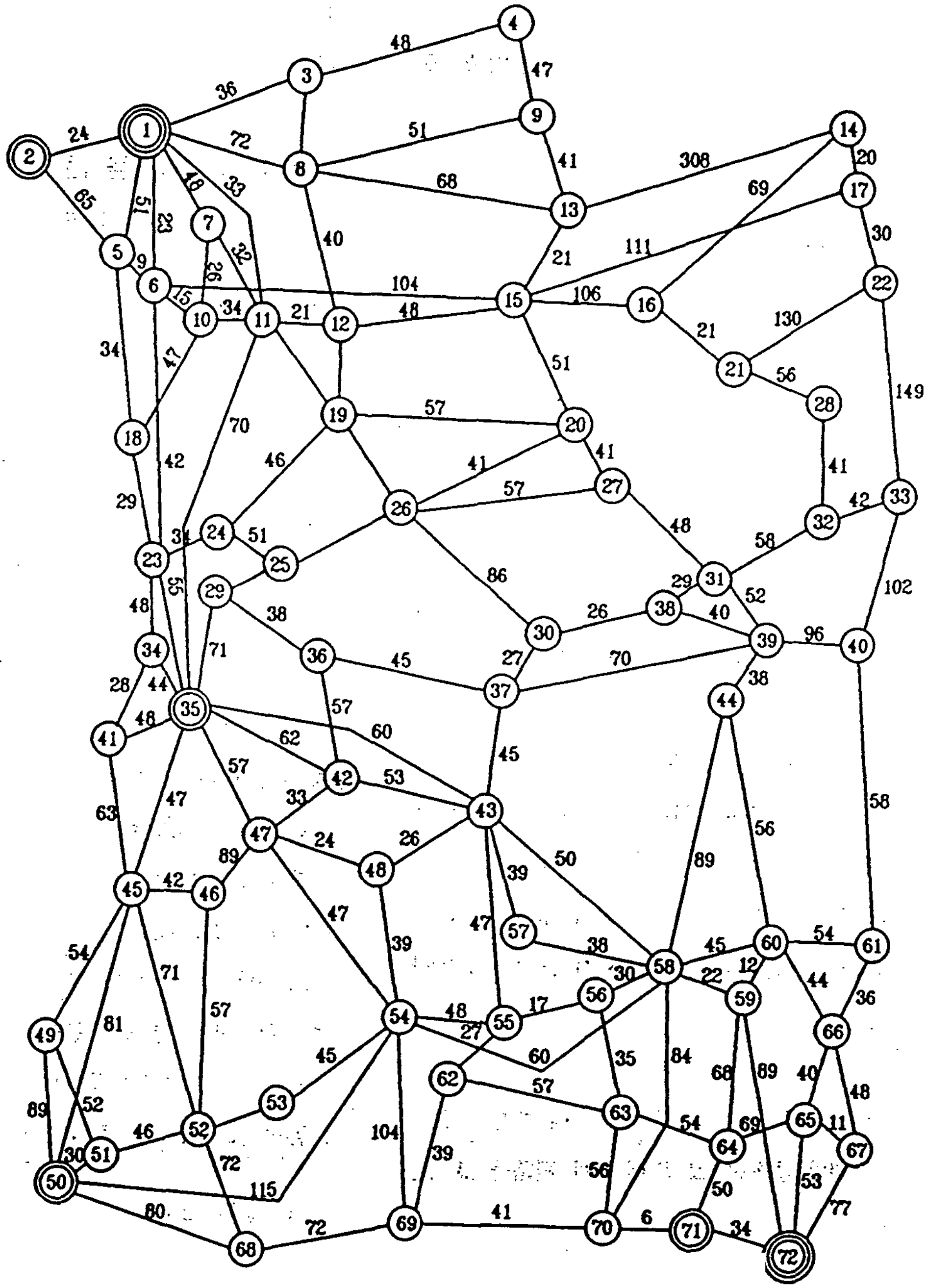
가. 狀況設定

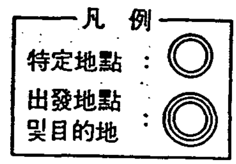
여기에서는 앞에서 提示된 模型을 適用하기 위해 우리나라 全國 主要 道路網을 輸送네트웍으로 구성한 다음, 네트웍내의 4個 地點을 特定地點으로 選定하여 出發地點에서 目的地까지의 10-最短經路를 구하고 그 結果를 分析 · 評價한다.

輸送네트웍은 全國 10個 高速道路와 主要國道를 連結하는 道路網으고 구성하였고, 네트웍내 高速道路와 主要 國道上의 72個 地點을 拔萃한 다음 각 地點에 대해 1부터 72까지 一連番號를 賦與하여 마디로 對應시켰으며, 마디에서 마디까지 移動하는데 所要되는 時間을 弧의 값으로 對應시켰다. 한편, 네트웍내 特定地點으로는 인천, 대전, 광주, 창원으로 선정하였며 源마디는 서울, 着마디는 부산으로 선정하였다. 그 內容이 〈표 4-1〉, 〈그림 4-1〉에 表示되어 있다.

나. 適用 結果

앞에서 提示한 네트웍內 각 구간별 제원을 토대로 入力資料를 작성한 후, 서울에서 출발하여 4개의 特定地點(인천, 대전, 광주, 창원)을 經





〈그림4-1〉 輸送네트웍[1]

〈表4-1〉 네트웍내의 마디

마디番號	地名	마디番號	地名	마디番號	地名	마디番號	地名
1	서울	19	장호원	37	상주	55	고령
2	인천	20	제천	38	예천	56	달성
3	청평	21	정선	39	안동	57	왜관
4	춘천	22	동해	40	영덕	58	대구
5	수원	23	천안	41	논산	59	경산
6	신갈	24	진천	42	영동	60	영천
7	광주	25	증평	43	김천	61	포항
8	양평	26	충주	44	의성	62	합천
9	홍천	27	단양	45	전주	63	창령
10	용인	28	태백	46	진안	64	밀양
11	이천	29	청주	47	무주	65	언양
12	여주	30	점촌	48	대덕	66	경주
13	횡성	31	영주	49	정주	67	울산
14	주문진	32	현동	50	광주	68	순천
15	원주	33	울진	51	담양	69	진주
16	평창	34	공주	52	남원	70	마산
17	강능	35	대전	53	함양	71	창원
18	평택	36	보은	54	거창	72	부산

由한 다음 부산에 이르는 10-最短經路를 구하기 위하여 "p個 特定地點을 經由하는 k-最短經路 計算法"의 컴퓨터 프로그램을 실행시킨 結果가 〈表 4-3〉에 정리되어 있다.

〈表 4-3〉에서 보는 바와같이 서울에서 출발하여 4개의 特定地點을 경유하여 부산에 이르는 10-最短經路 중 經路2, 經路4, 經路5, 經路7, 經路8, 經路10은 特定地點이 아닌 두 지점을 往復하는 경우가 존재하므로 새로운 經路로서의 의미가 없으며, 經路1, 經路3, 經路6, 經路9만이 새로운 經路로서의 의미가 있다.

5. 結 論

輸送네트웍 問題중 어떤 한 地點에서 出發하여 中間에 몇개의 特定地點를 經由하여 目的地까지 가는 經路를 選定할 때 單一의 最適經路를 選定하는 것보다는 여러개의 短經路를 選定하여 追加制約條件에 의한 最適經路 使用 不可能時를 대비하는 것이 바람직하다. 이와같은 문제를 해결하기 위하여 本 硏究에서는 Shier의 k-最短經路技法과 動的計劃法의 最適性의 原理를 이용혀 "p個의 特定地點을 經由하는 k-最短

〈表4-3〉 10-經路값 및 經路

(經路값 單位 : 分)

經路番號	經路값	經路上의 마디 順序
1	512	1→2→1→11→35→45→50→68→69→70→71→72
2	524	1→2→1→11→35→45→50→68→69→70→71→70→71→72
3	529	1→2→1→6→23→35→45→50→68→69→70→71→72
4	536	1→2→1→11→35→45→50→68→69→70→71→70→71→70→71→72
5	541	1→2→1→6→23→35→45→50→68→69→70→71→70→71→72
6	545	1→2→5→6→23→35→45→50→68→69→70→71→72
7	547	1→2→1→6→5→6→23→35→45→50→68→69→70→71→72
8	548	1→2→1→11→35→45→50→68→69→70→71→70→71→70→71→70→71→72
9	551	1→2→1→6→10→11→35→45→50→68→69→70→71→72
10	553	1→2→1→6→23→35→45→50→68→69→70→71→70→71→70→71→72

經路"를 決定하는 방법을 提示하였다.

本 硏究에서 제시한 "p個 特定地點을 經由하는 k-最短經路計算法"에서 p=0인 경우에는 "k-最短經路計算法"이 되며 p=n-1인 경우에는 k個의 最短經路를 選定하는 外販員 問題(traveling salesman problem)가 된다.

參 考 文 獻

〔1〕 建設部, 道路現況調書, 建設部, 1990.

〔2〕 國防大學院, 네트웍 理論과 應用, 서울 : 國防大學院, 1986.

〔3〕 Nemhauser, George L., *Introduction to Dynamic Programming*, New York · London · Sydney : John Wiley & Sons, Inc., 1966.

〔4〕 Phillips, D. T., *Fundamentals of NetworkAnlysis* : Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 07632, 1981.

〔5〕 Shier, D. R., "Iterative Methods for Determining the K Shortest Paths in a Network,' *Networks*, Vol. 6, 1976, pp. 205~229.

〔6〕 Shier, D. R., "On Algorithms for Finding the k Shortest Paths in a Network," *Networks* Vol. 9, 1979, pp. 195~214.