

# 임의의 지지조건을 가진 불규칙 형태의 콤포지트 구조요소에 대한 진동해석

金 德 鉉

〈株式會社 鮮京 常任顧問, 工學博士〉

## 1. 서 론

인류의 초기로부터 재료는 인류발전을 위한 무기였다. 역사시대는 “석기시대”, “청동시대”, “철기시대” 등과 같이 구조재료에 의해서 분류되기까지 했다. 그러나, 오늘날 우리시대를 한 가지의 재료만으로 부를수는 없다. 우리시대는 선택의 시대이기 때문이다. 우리는 “The Right Material을 Right Place”에 사용할 수 있는 가능성을 갖고 있는 것이다.

선택할 수 있다함은 재료의 종류가 많음을 의미한다. 따라서 경쟁도 치열했다. 이 싸움에서 Composites가 대단히 강하게 대두하고 있다. 강점 가운데 주요한 것은 재료특성의 폭이 넓다는 사실이다. 다른 강점들은 녹이 안생기는 것, 충격에 대한 강한 저항력, 임의로 제작될 수 있는 새로운 형태 등이다.

그러나 경쟁자들에게는 낮은가격이라는 강점이 있었다. 그래서 초기의 Composites는 “High Performance/Low Volume”산업만 정복할 수 있었다.

오늘날, 주요변화가 일어나고 있다. 자동차의 예를들면,

- ① 차량 전체에 대한 완전히 새로운 설계방식의 적용
- ② 재료 및 제조공정의 새로운 기술개발 등을 통해 가격의 저하가 이루어지고 Composites는 Mass Production의 시대로 들어가는 시점에 와있는 것이다.

연속 또는 절단된 상태의 Fiber를 금속 또는 비금속 Matrix로 고정해서 만드는 Composite 재료는 여러 응용분야에서 관심을 받고 있고, 또 이용이 증가되고 있다. 이 재료의 특성으로 인하여 중량의 감소, 기능의 향상, 연장된 수명, 유지 보수의 절감 등이 요청되는 많은 분야로 이용이 확산되고 있다.

간단히 말해서 콤포지트는 두가지 또는 그 이상의 소재들을 복합적으로 결합시켜 특정목적 을 위해 만들어진 최종제품(End Product)을 의미한다. 이 개념은 새로운것이 아니다. 동서를 막론하고 고대의 사람들은 짧게 썰은 짚과 진흙으로 집을 지어왔다. 역사시대의 초기부터 널리 이용되어온 목재는 자연적으로 발생하는 콤포지트의 좋은 예이다. 다른 콤포지트는 100 여년동안 이용되어 왔다. 철근 콘크리트가 훌륭한 예이다.

콤포지트는 통상 섬유질인 보강재와 이를 고정(bind)시키는 다른 소재로 이루어진다. 이 고정제를 matrix라 부른다. 철근 콘크리트의 경우 철근은 보강재, cement는 matrix가 되고 골재는 filler가 된다.

콤포지트 구조공학에서 고려할 것은 대부분의 구조재는 비등방성이고 이 구조재는 또 여러개가 적층을 이루게 되고, 또 각층은 각각 주요강방향과 구조축과 일치하지 않는 경우가 대부분이란 사실이다. 따라서, 역학해석에는 micro-macro elasto-plastic 현상을 다 고려해야 한다.

철근 콘크리트 구조물은 적층 콤포지트 구조 부재중 층이 한개인 특수한 경우로 간주될 수

있다. 콘크리트보나 탑구조물과 같이 단순한 경우도 진동이나 좌굴문제를 포함한 정확한 해석은 단면의 불규칙성과 지지조건의 수식화 문제등으로 인해 어려움을 겪게 된다.

모든 구조부재의 해석 및 설계에는 변위, 모우멘트, 전단력 등을 구하기 위해 영향계수를 먼저 계산해야 한다. 그리고 예상되는 모든 하중상태하에서의 이러한 값들을 구한다음 진동과 좌굴의 문제를 해석하게 된다. 진동의 경우를 위한 통상적인 절차는 먼저 고유진동주기를 계산하고, 지진, 기개, 또는 항공기인 경우 공기동력학적 외력의 주기가 공명현상을 일으키는가를 확인한 다음 "rigid" 형태 설계는 이보다 낮게 "flexible" 형태 설계는 이보다 높게, 구조설계를 재설계하는 등의 작업을 하게 된다.

적층된 콤포지트 평판은 물론 단일층인 철근 콘크리트 평판도 지지조건이 Navier나 Levy solution 형태가 가능한 상태가 아니거나, 이런 지지상태라도 불규칙한 단면을 갖고 있으면 해석적인 방법으로 답을 구하는 것은 거의 불가능하다. Eigenvalue 문제의 수치해석방법도 여간 복잡한 것이 아니다.

1970년에 필자가 남산의 서울타워를 설계할 때, 기초로부터 270m의 높이를 갖고, 콘크리트 탑과 그위에 놓인 철탑으로 구성된 이 구조물의 진동 및 좌굴의 문제를 해결해야 하는 입장에 처하게 되었었다.

탑신의 형태가 변화하게 되어있어, 기존이론으로 이것을 해석하는 것은 불가능했다. 변단면을 가진 구조부재의 고유진동주기를 구하는 방법과 좌굴하중을 구하는 방법이 이 답을 위해서 개발되었다. 이 방법은 여러가지 조건하에 놓인 보 및 기둥부재에 대해서 연구되었고, 결과적으로 이 방법은 계산과정이 매우 간단하면서도 효과적인 것이 증명되었다. 그 결과는 1974년에 발표되었다. (참고문헌 48)

이 글은 앞의 연구결과를 2차원의 문제로 확장한 것이고, 임의단면을 가진 콤포지트의 문제물까지 확장한 것이다. 이 글의 내용중 고유진동주기의 경우는 금년(1989년) 11월 30일 제 1차 SAMPE(Society for the Advancement of Material and Process Engineering) 동경 국제대회에서 발표될 예정이고, 2차 mode의 경우는 내년(1990년) IABSE(International Association

for Bridge and Structural Engineering)에서 발표할 계획이다.

기술자가 불규칙 단면을 갖거나, 복잡한 지지조건을 가진 구조부재를 해석하려면, 먼저 통상 관례대로 변위 응력 등을 계산한 다음 이미 구해진 변위의 영향치를 이용해서 본문의 방법으로 eigenvalue problem을 쉽게 해결할 수 있다.

## 2. 해석방법

### 2.1 기본 개념 및 이론

어느 구조물의 고유주파수는 이 주파수에 해당하는 변형된 "mode" 형태가 공명조건하에서 확산되기 시작하는 주파수를 의미한다. 만약 계속적인 "계산" 과정에 의해서 결정되는 "mode" 형태가 충분히 정확하면, 수렴된 경우와 그 직전의 상대적 최대변위는 이 고유주파수에 해당되는 관성력 하에서 동일하여야 한다. 어느 구조물의 진동은 조화운동이어서, 변위는 sine함수로 표시될 수 있다. 제 1 mode만 고려하면 이 구조부재의 변위는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$y = Y \sin \omega t \dots\dots\dots (1)$$

여기서

- Y = 최대 변위
  - $\omega$  = 원형 진동주파수
  - t = 시간
- 이다.

뉴-톤의 법칙에 의해서 진동하는 질량, m의 동적힘은

$$F = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2)$$

여기에 (1)식을 대입하면

$$F = -m(\omega)^2 Y \sin \omega t \dots\dots\dots (3)$$

이 식에서  $\omega$ 와 Y는 미지수이고 Y는 선정된 원점으로부터의 거리의 함수이다.

고유주파수  $\omega$ 를 구하기 위해서 다음과 같은 과정을 택한다. 몇개의 점에서의 최대변위량은 다음과 같이 임의로 주어진다.

$$y(i)(1)=Y \dots\dots\dots (4)$$

이것은 절대적 임의수치이지만 경험에 의한 가정을 하면 수렴을 촉진시킬 수 있다. 이 최대 변위에 관련되는 동적힘은

$$F(i)(1)=-m(i)[\omega(i)(1)]^2 y(i)(1) \dots\dots (5)$$

이 힘에 의한 “새로운”변위는 F의 함수로서 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$y(i)(2)=f\{m(i)[\omega(i)(1)]^2 y(i)(1)\} \dots\dots (6)$$

고려되고 있는 각 점에서의 상대적 최대변위들인  $y(i)(1)$ 과  $y(i)(2)$ 는 불변해야 되고 다음조건이 유지되어야 한다.

$$y(i)(1)/y(i)(2)=1 \dots\dots\dots (7)$$

이 식으로부터 모든 i점에서의  $\omega(i)(1)$ 이 구해질 수 있는데 대부분의 경우에 이들은 서로 다른 값을 갖는다. 어느 구조 부재의 고유진동주파수는 이 부재의 모든점에서 동일해야 하므로 모든 i점에서의  $\omega(i)$ 가 충분히 동일한 값을 가질때까지 이 과정은 반복되어야 한다.

다음 cycle을 위한 식

$$y(i)(3)=f\{m(j)[\omega(j)(2)]^2 y(j)(2)\} \dots\dots\dots (8)$$

내의  $y(j)(2)$ 는 편의상  $y(j)(2)$ 의 절대치만으로 대치될 수 있다.

철근 콘크리트는 물론 복합소재를 포함한 복잡한 임의의 단면이나 불균등하게 임의로 분포된 질량을 가진 구조부재의 경우, 이 부재가 몇개의 요소로 구성되어 있다고 고려하는것이 편리하다.

### 2.2 2차원 문제의 해법응용

교량의 상판, 건축물의 바다, 벽체 등 대부분의 구조물은 2차원의 구조이다. 이러한 구조물은 대부분 탄성지지되었거나 변단면으로 되어 있는데, 균등단면을 갖고 단순지지되거나 적어도 대칭의 두 지지선이 단순지지가 아닌 경우 해석적으로 진동문제의 답을 구하는 것은 거의 불가능하다. 본문의 방법은 이러한 문제를 쉽게 해결할 수 있는데, 그 방법은 다음과 같다.

2차원 문제의 경우 고려되고 있는 점의 위치는 두 “Subscript” (i, j)로 표시되고 모든 (k, l)점

의 관성력이 (i, j)에서의 변위에 공헌한다. (i, j)점에서의 관성력은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$F(i, j)(1)=-m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 y(i, j)(1) \dots\dots\dots (9)$$

이 힘에 관련된 변위는 다음과 같다.

$$y(i, j)(2)=\sum_{k,l}^{k,l} \delta(i, j, k, l) F(k, l)(1) \dots\dots (10)$$

여기서  $\delta$ 는 변위의 영향계수이다.

$$y(i, j)(1)/y(i, j)(2)=1 \dots\dots\dots (11)$$

로 부터 (i, j)의 모든 점에서의  $\omega(i, j)(1)$ 이 구해질 수 있다.

이 과정은 모든 (i, j)점에서의  $\omega(i, j)(n)$ 가 충분히 동일해질때까지 반복되어야 한다. 그러나 많은 경우에 몇번의 반복만으로 최대 및 최소치의 차이가 공학적 견지에서 충분히 무시될 정도여서, 모든 점에서 값의 평균치를 취하거나, 최대 최소치의 개념으로(공학적으로) 정확한 값을 구할 수 있다.

2차원 문제도 불규칙적인 단면이나 형태를 가진 구조재의 경우는 유한개의 요소로 나누는 방법으로 쉽게 해결된다.

### 3. 보, 기둥 형태구조에 대한 응용

이 글에 제시된 방법의 과정을 설명하기위한 예로서, 균등 휨강성, EI를 가진 단순지지보를 고려한다. 보의 무게는 미터당 0.5톤으로 가정한다. 이 무게는 보가 진동할때 질량으로 작용하게되며, 그림 1과 같이 다섯개의 등거리를 가진 점에서의 집중하중으로 취급된다. 이러한 점의 수가 많으면 결과는 더 정확할 것이나 계산 노력이 커진다. 영향계수  $\delta$ 는 표 1에 주어졌다.

i가 고려되고 있는 점을 표시할때, 최초로 가정되는 최대변위,  $y(i)(1)$ 는 다음과 같이 임의로 주어진다.

$$\begin{aligned} y(1)(1) &= y(5)(1) = 40 \\ y(2)(1) &= y(4)(1) = 80 \\ y(3)(1) &= 100 \end{aligned}$$

이 값과 모든 i점에서의  $m(i)=1\text{ton}/g$  을 (5)식

에 대입하고, 그 결과를 (6)식에 대입하면,

$y(i)(2) = \sum_j \delta(i, j) \cdot F(j)(1)$ 가 되고, 다음 결과를 얻는다.

$$y(1)(2) = 1616 \text{ m}(1) [\omega(1)(1)]^2/EI$$

$$y(2)(2) = 4220.0 \text{ m}(2) [\omega(2)(1)]^2/EI$$

$$y(3)(2) = 5216.0 \text{ m}(3) [\omega(3)(1)]^2/EI$$

$y(i)(1)/y(i)(2) = 1$ 로 부터

$$\omega(1)(1) = 0.1573 \text{ A}(1),$$

$$\omega(2)(1) = 0.1376 \text{ A}(2),$$

$$\omega(3)(1) = 0.1385 \text{ A}(3) \text{가 된다.}$$

여기서  $A(i) = \sqrt{EI/m(i)}$  이다.

모든  $i$ 점에서의  $\omega(i)(1)$ 은 “동일”해야 하므로 이 과정은 반복되어야 한다. 두번째 cycle을 위해서도 최대변위의 상대적인 크기만 필요하므로  $y(i)(2)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$y(1)(2) = y(5)(2) = 16.2$$

$$y(2)(2) = y(4)(2) = 42.2$$

$$y(3)(2) = 52.2$$

“새로운” 변위  $y(i)(3)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$y(1)(3) = 827.76 [\omega(1)(2)]^2 A(1)^2$$

$$y(2)(3) = 2167.08 [\omega(2)(2)]^2 A(2)^2$$

$$y(3)(3) = 2678.64 [\omega(3)(2)]^2 A(3)^2$$

$Y(i)(2)/y(i)(3) = 1$ 로 부터 다음 결과를 얻는다.

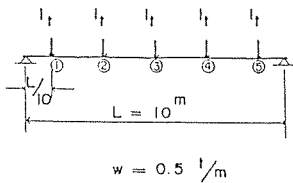


그림 1 UNIFORMLY LOADED SIMPLE BEAM.

표 1 INFLUENCE COEFFICIENTS,  $EI \delta_{i,j}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	2.7	5.8	6.2	4.5	1.6
2	5.8	14.7	16.5	12.3	4.5
3	6.2	16.5	20.8	16.5	6.2
4	4.5	12.3	16.5	14.7	5.8
5	1.6	4.5	6.2	5.8	2.7

$$\omega(1)(2) = 0.1397 \text{ A}(1)$$

$$\omega(2)(2) = 0.1396 \text{ A}(2)$$

$$\omega(3)(2) = 0.1395 \text{ A}(3)$$

더 낮은 결과를 얻기위해 이 과정을 한번더 반복하여 다음결과를 얻는다.

$$\omega(1)(3) = 0.139576 \text{ A}(1)$$

$$\omega(2)(3) = 0.139575 \text{ A}(2)$$

$$\omega(3)(3) = 0.139575 \text{ A}(3)$$

등분포 균등 보일때 모든  $A(i)$ 는 동일하며,

$$\omega = 0.139575 \text{ A를 얻는다.}$$

“정확한”이론에 의한 값은  $\omega = 0.1395 \text{ A}$ 이다.

“정확한”해의 공식중에 있는  $\pi$ 의 값에 3.14 대신 더 정확한 값인 3.1415927을 사용하면 “정확한”방법의  $\omega$ 도 본문의 방법의 결과인  $\omega = 0.139575 \text{ A}$ 가 된다.

## 4. 일차원 구조부재의 진동특성

### 4.1 질량분포의 영향

균등강성을 가진 단순지지 보의 진동에 대한 질량분포의 영향은 그림 2와 3에 표시된 바와 같다. 그림 2의 자세한 수치는 표 2에 나와있다. 양단 고정보 경우의 결과는 그림 4와 5에 표시된바와 같다. 캔티레바 보의 경우, 그림 6에 표시된 바와 같이, 지지점 부근에서의 질량증가는 진동특성에 별로 영향을 미치지 않는다. 자유단 부근의 질량증가는 진동특성에 상당한 영향을 준다. 그림 5를 보면, 고정단 부근의 큰 질량은 역시 진동특성에 별로 기여하지 않고 중앙부근의 질량이 큰 영향을 미침을 알수 있다. 캔티레바 보의 진동에 대한 질량 분포의 자세한 영향은 표 3에 표시된 바와 같다.

### 4.2 강성분포 상태의 영향

강성분포 상태의 진동특성에 대한 연구를 위해 질량분포는 일정하게 하고 각종 보의 강성을 변화시켜 이글의 방법으로 해석한 결과가 그림 7, 8, 9 및 10에 표시되어 있다. 그림 8에서 case 1의 곡선이 case 3곡선을 횡단함을 주의할 필

II2 CRITICAL CIRCULAR FREQUENCY OF SIMPLY SUPPORTED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION

N	$\omega / \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$
1	5.69187
2	4.40452
3	3.71863
4	3.27712
5	2.96272
6	2.72426
7	2.53539
8	2.38103
9	2.25180
10	2.14156
11	2.04606
12	1.96230
13	1.88804
14	1.82162
15	1.76175
16	1.70742
17	1.65782
18	1.61231
19	1.57035
20	1.53150

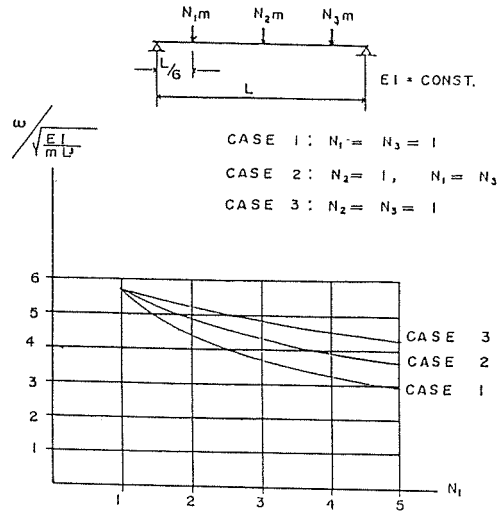


그림 3 SIMPLY SUPPORTED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION (2)

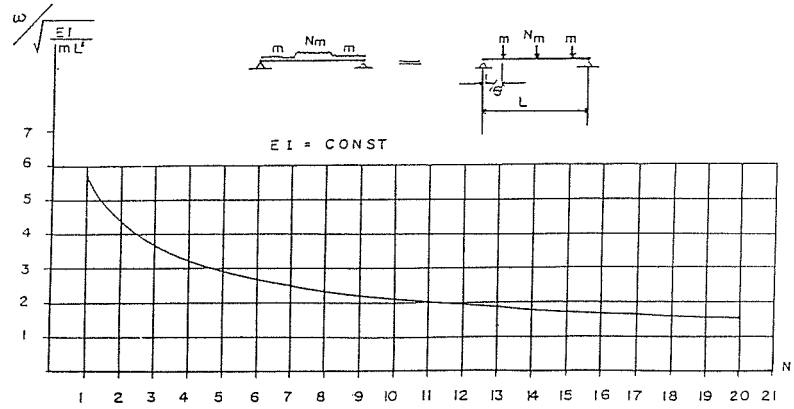
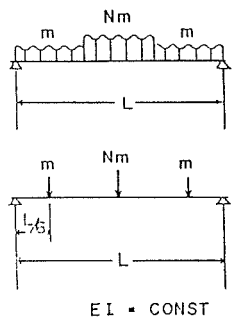


그림 2 SIMPLY SUPPORTED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION (1)

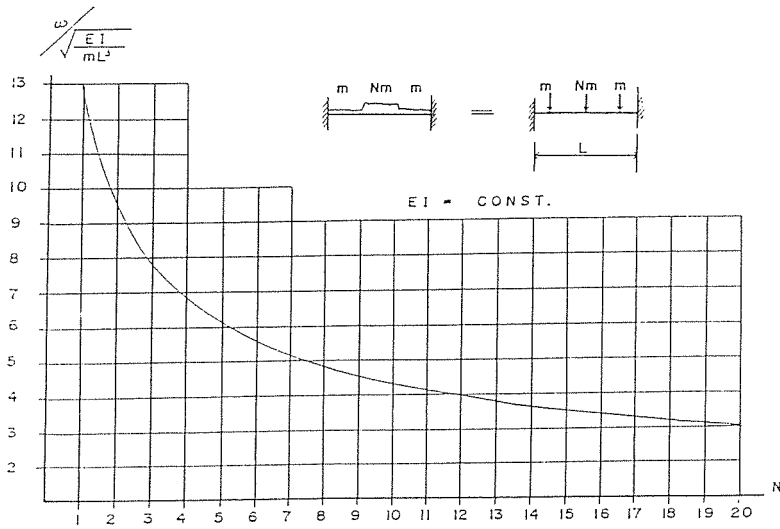


그림 4 FIXED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION (1)

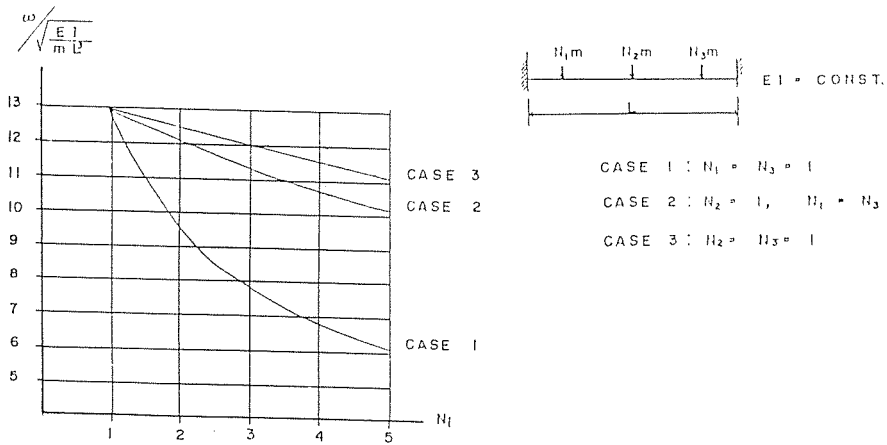


그림 5 FIXED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION (2)

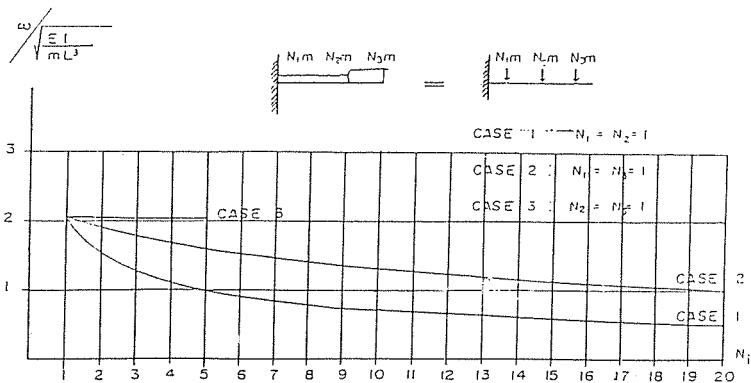


그림 6 CANTILEVERED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION

### 표 3. CRITICAL CIRCULAR FREQUENCY OF CANTILEVERED UNIFORM BEAM WITH DIFFERENT MASS DISTRIBUTION

N1	CASE 1	CASE 2	CASE 3	CASE 4
1	2.08333	2.08333	2.08333	2.08333
2	1.53795	1.92913	2.08028	1.92140
3	1.27469	1.80224	2.07723	1.78464
4	1.11236	1.69606	2.07417	1.66763
5	0.99952	1.60584	2.07200	1.56629

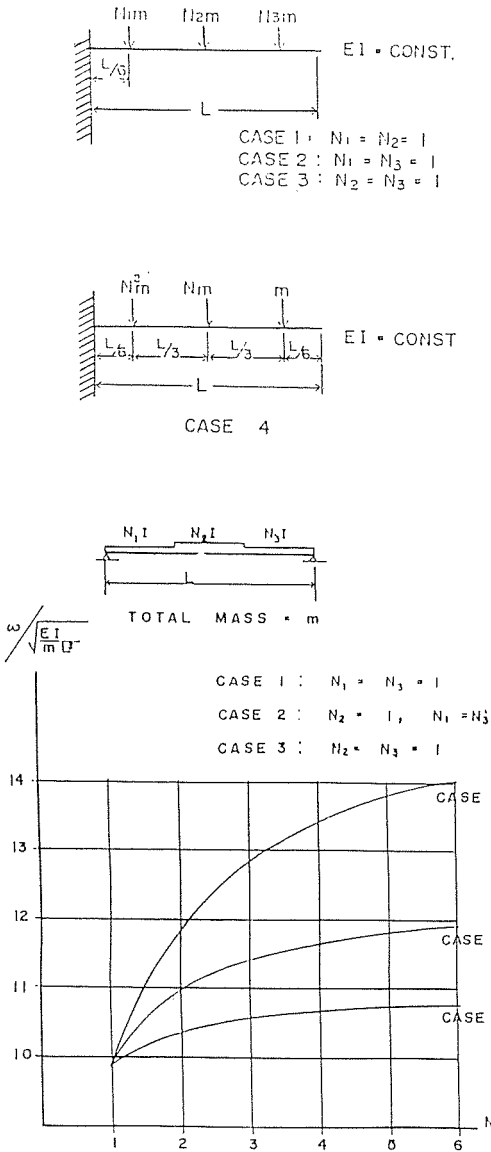


그림 7 UNIFORMLY LOADED SIMPLE BEAMS  
WITH DIFFERENT CROSS SECTION

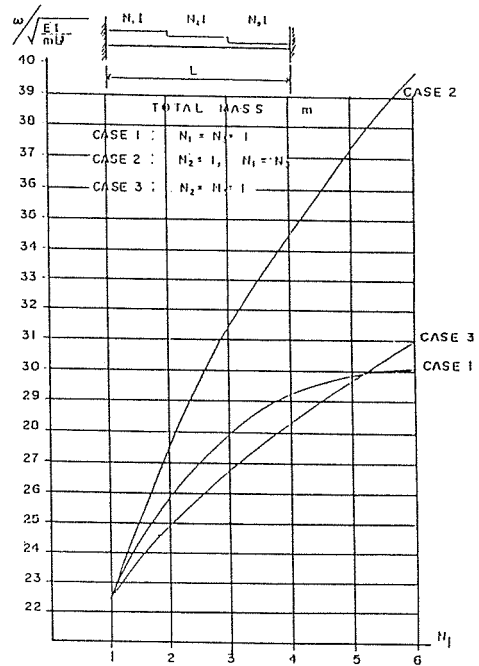


그림 8 UNIFORMLY LOADED FIXED BEAMS  
WITH DIFFERENT CROSS SECTION

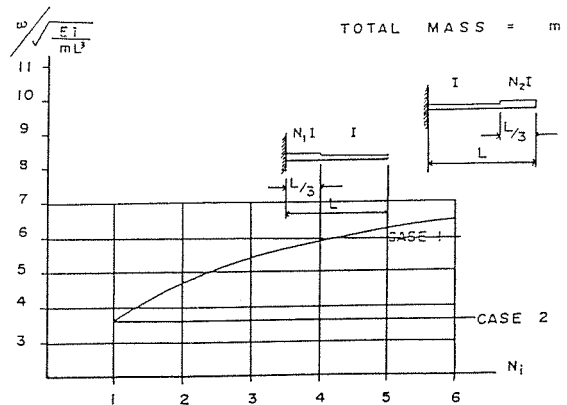


그림 9 UNIFORMLY LOADED CANTILEVER  
BEAMS WITH DIFFERENT CROSS SECTION (1)

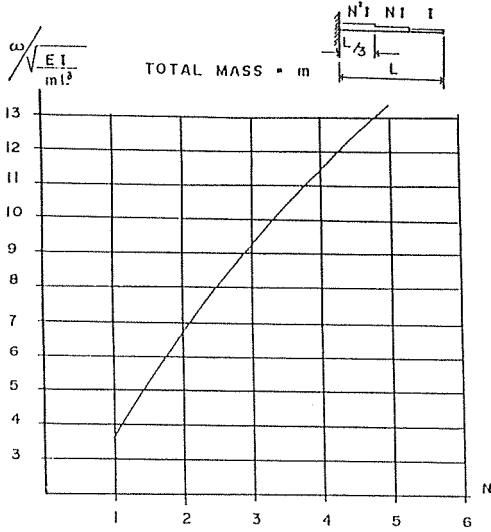


그림 10 UNIFORMLY LOADED CANTILEVER BEAMS WITH DIFFERENT CROSS SECTION (2)

요가 있다. 승수(multiplier)  $N_i$ 가 증가하면 유효지간길이(span)는  $2L/3$ 으로 접근하게되어 주파수가 case 1의 경우보다 높아지게 된다. 그림 9에 표시된바와 같이 캔틸레바 보의 자유단 부근의 강성의 증가는 진동특성에 영향을 미치지 않는다. 반면에 고정단 부근의 강성 증가는 진동특성에 상당한 영향을 미친다는 사실을 그림 9와 10의 비교에서 알 수 있다.

#### 4.3 질량을 무시한 가정이 진동에 미치는 영향

실제 설계목적을 위해서는 진동해석절차를 간소화 할것이 요망된다. 이러한 목적을 위한 방법은 구조물 무게를 무시하는 것이다.

보의 무게(질량)를 무시하는 과정이 진동에 미치는 영향은 다음과 같은 방법으로 연구되었다. 무게가 없는 보가 하중,  $W$ 의 작용을 받고 있을때, 이 보의 고유원형 주파수(critical circular frequency)는

$$\omega = \sqrt{g/\delta_{st}} \text{ 이다.} \dots\dots\dots (12)$$

여기서  $\delta_{st}$ 는 정적변위이다. 스패 길이  $L$ 에 걸쳐 균등강성  $EI$ 를 가진 질량이 없는 단순지지 보가 중앙에서 하중  $W$ 를 받을때

$$\omega = \sqrt{\frac{48EIg}{WL^3}} \dots\dots\dots (13)$$

동일한 상황하의 양단 고정단의 경우

$$\omega = \sqrt{\frac{192EIg}{WL^3}} \dots\dots\dots (14)$$

이고 자유단에 하중  $W$ 가 작용할때의 캔틸레바 보의 경우

$$\omega = \sqrt{\frac{3EIg}{WL^3}} \dots\dots\dots (15)$$

가 된다.

각 식의  $W$ 를  $Nm$ 으로 대치하고,  $N$ 의 값을 증가하면서 본문의 방법으로 진동을 해석한 결과가 앞의 결과(그림 2, 4, 6)와 비교되었다.

이 비교결과와 일부가 표 4에 나와있다. 여기서  $N$ 은 보의 분포하중의총 무게에 대한 집중하중 무게의 비를 직접 나타내지 않는다는데 주의해야 한다. 예를들어  $N$ 이 10인 경우 이 비율은  $(10-1)/3=3$ 이 된다.

따라서, 표 4로부터  $N=10$ 인 경우를 보면, 균등단면을 가진 단순지지된 보가 중앙에 이 보 무게의 불과 3배에 해당되는 집중하중을 받고 있을때 이 보의 무게를 고려한 정확한 해석의 결과와 이 보의 무게를 무시한 근사해의 결과는 진동주파수가 2.3%의 차이를 갖는다는 것을 알 수 있다.

유사한 조건하의 양단고정보의 경우, 이 차이는 0.68%이고, 캔틸레바의 경우 (이 연구경우 실제 계산된 하중위치는 지지점으로 부터  $5L/6$  지점) 그 차이는 0.92%가 된다.

#### 4.4 이 방법의 결과에 영향을 미치는 요인들

이 방법의 결과라기보다 일반적으로 진동에 영향을 미치는 요인이 몇가지 있다. 그것은 앞의 절 등에서 검토된 바와 같이 구조물의 형태, 강성 및 질량의 분포상태, 지지상태 등인데 본문의 방법의 정확성에 영향을 미치는 요소들은 근본적으로 진동상태에 영향을 미치는 요소와 같다.

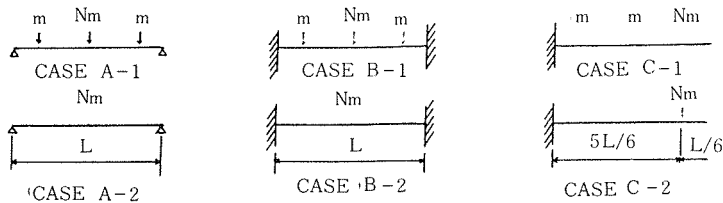
본문의 방법의 경우, 질량분포에 대한 근사치화(approximation)나, 고려되는 점의 수는 보의 진동특성에 큰 영향을 미치지 않는다. 큰 차이를 일으키는 것은 변위의 영향계수로서, 이 사실은 강성이 진동에 미치는 영향을 파악



표 4 EFFECT OF NEGLECTING WEIGHT OF BEAMS

$$\left( \omega / \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \right)$$

N \ CASE	A-1	A-2	DIFFERENCE (%)	B-1	B-2	DIFFERENCE (%)	C-1	C-2	DIFFERENCE (%)
1	5.6919	6.9282	21.72	12.9454	13.8564	7.04	2.0833	2.2769	9.29
2	4.4045	4.8990	11.23	9.4714	9.7980	3.45	1.5380	1.6099	4.68
5	2.9627	3.0984	4.58	6.1137	6.1968	1.36	0.9995	1.0182	1.87
10	2.1416	2.1909	2.30	4.3523	4.3818	0.68	0.7134	0.7199	0.92
15	1.7618	1.7889	1.54	3.5617	3.5777	0.45	0.5843	0.5879	0.61
20	1.5315	1.5492	1.16	3.0880	3.0984	0.34	0.5068	0.5091	0.46



하면 쉽게 이해될 수 있다.

정확한 영향계수가 사용될 경우, 보의 5개 점을 고려한 결과와 3개 점을 고려한 결과는 컴퓨터의 “truncating error” 범위내까지의 정확함을 갖는다.

변위 영향계수의 중요성을 설명하기 위해 “정확한” 해답이 가능한 원추형태의 캔티레바 된 보를 고려한다. Kirchhoff에 의해 개발된 “정확한” 진동의 고유주기 공식은 다음과 같다.

$$T = 0.719L^2 \sqrt{\rho A_0 / EI_0} \dots\dots\dots (16)$$

여기서  $\rho$ 는 단위중량,  $A_0$ 와  $I_0$ 는 각각 원추 지지점에서의 단면적과 관성모멘트이다. 현상의 일반성을 보기 위해 원추바닥직경,  $D_B$ , 을 0.02L에서 0.02L 간격으로 0.1L까지 증가시켜 각 경우에 대해서 검토했다. 각 원추는 처음에는 5개 점 다음 경우에는 10개 점으로 균등하게 나누었다. 그리고 각 경우를 다시 고려되는 점에서의 직경과 trapezoidal 요소 바닥에서의 직경 두 경우에 대해서 진동문제를 계산하였다. 그 결과는 그림 11에서와 같이 “정확한”해답인  $\omega_k$ 와 비교되었다. 모든 경우에 고려된 점의 수는 5개이고, segment수의 증가는 영향계수의

정확성을 위해서 이루어졌다.

그림 11에서 보이는 특징은 모든 경우의 진동의 특성은 직선을 이룬다는 사실이다. 더욱이 subscript, i, 로 case 번호를 표시할 때, case i의 고유 주파수  $\omega_i$ 에 대한 정확한 수치  $\omega_k$ 의 비가 모든 원추기초직경,  $D_B$ , 에 대해서 일정하다는 사실이다.

- 즉 모든  $D_B$ 에 대해서  $\omega_1 / \omega_k = 0.890$
- 모든  $D_B$ 에 대해서  $\omega_2 / \omega_k = 1.182$
- 모든  $D_B$ 에 대해서  $\omega_3 / \omega_k = 1.085$

이 특성은 “정확한”해답이 불가능한 많은 실제 응용에 대해서 매우 유용한 것이 된다.

이 비율,  $\omega_i / \omega_k$ 은 비록 근사치이긴 하지만 각 경우의 영향계수가 계산되면 예측될 수가 있는 것이다. 예를들어  $D_B = 0.06L$ 인 캔티레바 원추의 경우를 고려하자. Superscript, 1, 로 그림 11의 case번호를 표시할 때, 몇 점에서의 변위 영향계수는 표 5에서 주어졌다.

각 경우의 고유주파수,  $\omega_i$ 은 영향계수  $\delta$ 의 비율의 역수의 평방근과 동일하다.

예를 들면,



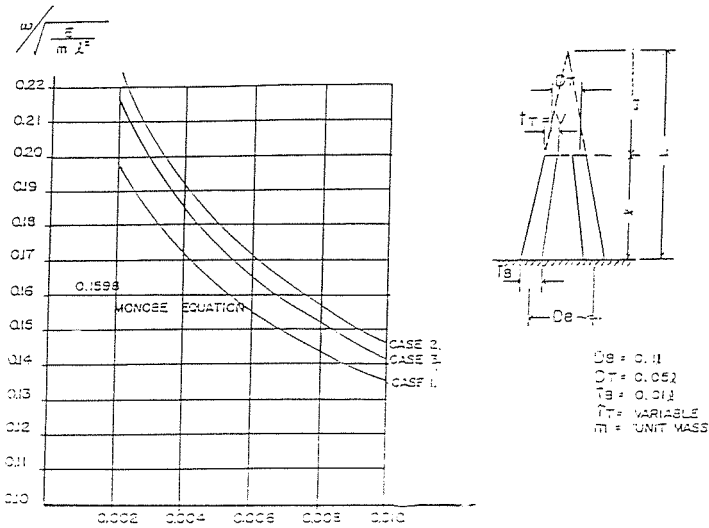


그림 12. CANTILEVERED HOLLOW CONICAL BAR WITH VARIABLE THICKNESS AT THE TOP.

3.1%가 된다. Monobe의 공식은 다음 식에서 명백히 보이는 바와 같이 두께의 변화를 고려하지 않는다. 즉

$$T = C \frac{l^2}{r_0} \sqrt{\rho/Eg} \dots\dots\dots (17)$$

여기서  $r_0$ 는 탑 기초에서의 반경이고

$$C = 0.719 + 1.07L_1/L + [0.14 - 2.24(0.5 - L_1/L)^4]$$

인데

$L_1$ 과  $L$ 는 그림 12에 표시된바와 같다. 이 그림이 표시하는 바와 같이  $D_T/D_B = 0.5$ 이고,  $t/l =$

0.006인 때와 같은 특별한 경우를 제외하고는 Monobe의 공식은 사용될 수 없다. 그림 13에서 표시된바와 같이 탑의 두께변화뿐 아니라 구조물을 일반형태가 이 탑 구조물 진동특성에 큰 영향을 미친다. Monobe의 공식은  $D_T/l = 0.02$ 인 부근에서만 좋은 결과를 주는데 주의할 필요가 있다.

영향계수의 정확성에 대해서만 민감한 본문의 방법은 모든 종류의 탑 구조물의 진동특성 문제를 높은 신뢰성을 갖고 쉽게 해결할수 있다. 변위의 영향계수는 모든 구조물의 해석에 필수적인 것인만큼 진동문제는 변위나 응력해

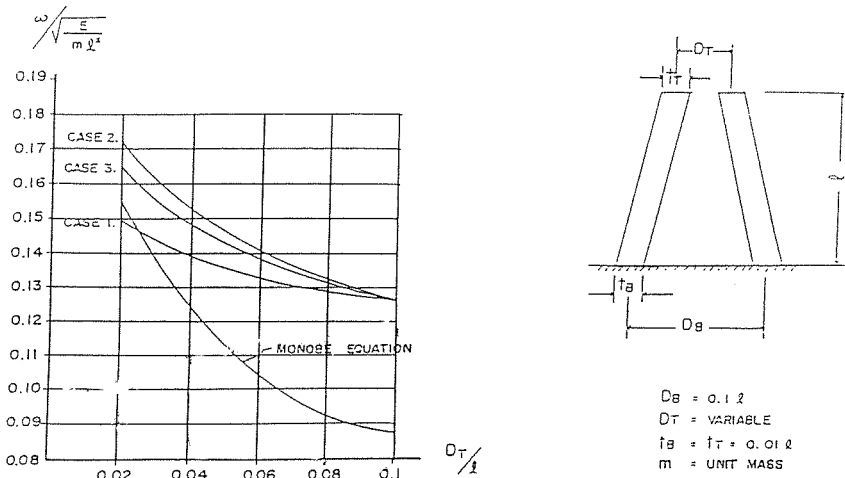


그림 13 CANTILEVERED HOLLOW CONICAL BAR WITH VARIABLE DIAMETER AT THE TOP.

석에 약간의 계산 추가만으로 해결하게 되는 셈이다.

만약, 기하학적 형태나 질량분포의 복잡성으로 인하여 변위 영향계수의 정확성이 의심되면 이 계수들을 얻기위한 “유한”한 요소의 수를 늘리거나 Schwarz의 “inequality”를 이용하여 정확한 해답이 놓인 범위를 찾을 수 있다. 앞의 절의 원추 캔티레바 경우에 논의된 특성을 응용하면 고유주기의 정확한 값을 구할 수 있다.

서울타워의 경우와 같이, 전망대가 탑체에 모멘트를 일으키지 않고, 연결 ring에 의해서 탑체에 결합된 입체뼈대로 지지되어 있으면, 이러한 전망대는 추가된 질량으로만 고려될 수 있다. 부산타워의 경우와 같이 탑의 전망대가 탑체의 일부로서 건설되면 구조물의 이 부분은 추가된 질량과 추가된 관성모멘트로 취급될 수 있다. 그러나 그림 9의 “case 2”의 곡선이 표시 하듯이, 자유단 부근의 관성모멘트가 증가하는 진동특성에 중요한 변화를 주지 않는다는 사실에 유의할 필요가 있다.

125미터 높이의 부산타워는 3.98초의 기본 고유주기를 갖고 있다.

## 6. 등방성 평판에 대한 응용

본문의 방법의 2차원 문제에 대한 응용의 예로서, 한변의 길이가 a인 정사각형 균질 등방성 평판을 고려한다. D와 m은 각각 이 평판의 강성과 단위면적당 질량이다. 먼저, 평판은 각 변에서 균등한 길이를 가진 네개의 선으로 나누어진다. a/4 × a/4 × m의 크기를 가진 16개의 같은 양의 질량은 각 segment의 중앙에 놓여 있다.

최초로 가정된 “변위”는 다음과 같다.

$$y(i, j)(1) = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

관성력, F(i, j)(1)은 공식 9로부터 구해진다.

이 관성력에 의한 두번째의 “변위”y(i, j)(2)는 공식 10으로 구해지는데 이를 위해서는 이 평판의 변위영향계수를 구해야 한다. 고려되고

있는 평판은 단순지지되어있으므로 이 영향계수는 다음과 같은 집중하중경우의 Navier해로 구할 수 있다.

$$W(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \cdot \sin(n\pi y/b)}{[(m^2/a^2) + (n^2/b^2)]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots (18)$$

공식 11을 이용하면 모든 (i, j)점에서의 ω(i, j) (1)이 구해진다. 이러한 과정을 계속 반복하여 세번째 cycle에서 구해진 진동 제1 mode의 고유원주주파수(natural circular frequency)는 다음과 같이 구해진다.

$$\omega = (19.74 \sim 19.75)\sqrt{D/m}$$

Navier형태 함수로 구한 “정확한”해는

$$\omega = 19.75\sqrt{D/m} \text{ 이다.}$$

제 2mode의 고유원주주파수는 최초가정한 “변위”가 제 2mode 형태가 되게한후, 앞서와 같은 과정을 통해서 구해진다. 네번째 cycle후에 구해진 값은 다음과 같다.

$$\omega = (49.34 \sim 49.36)\sqrt{D/m}$$

“정확한”값은 49.34√D/m 이다.

평판을 많은수의 mesh로 나누어도 정확도는 비슷하다. 정확도에 관한 mesh크기의 영향은 그림 14에 표시되어 있다.

## 7. 단순지지된 특별직교 이방성 적층평판에 대한 응용

이 경우(specially orthotropic laminated plate), 평판은 면내에서만 직교성을 갖고 있어서 전단 또는 비틀림 coupling이나, 휨 — 인장 coupling이 발생하지 않는다.

예로서 그림 15와 같은 정사각형 평판을 고려한다.

주어진 소재특성은 다음과 같다.

matrix	탄성계수	Em=3.4Gpa
fiber	탄성계수	Ef=110Gpa
matrix	포와송비	νm=0.35
fiber	포와송비	νf=0.22

matrix 체적율  $V_m=0.4$   
 fiber 체적율  $V_f=0.6$

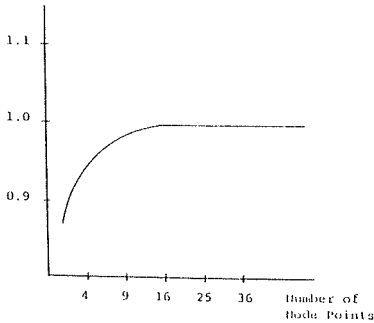


그림 14 Effect of number of node points for isotropic plate

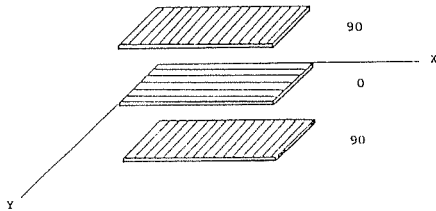


그림 15 Specially orthotropic

적층평판의 경우 constitutive equation은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B \\ B & B & B & D & D & D \\ B & B & B & D & D & D \\ B & B & B & D & D & D \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Where,

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{i,j} (Z_k - Z_{k-1})$$

$$B_{i,j} = 1/2 \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{i,j} (Z_k^2 - Z_{k-1}^2)$$

$$D_{i,j} = 1/3 \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{i,j} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

인장강성(extensional stiffness),  $A(i, j)$ , 휨 강성(bending stiffness),  $D(i, j)$ 는 rule of mixture"와 앞의 공식들로부터 다음과 같이 구

해진다.

$$A(I, J) = \begin{vmatrix} 1019496000 & 33441730 & 0 \\ 33441730 & 122947500 & 0 \\ 0 & 0 & 45323220 \end{vmatrix}$$

$$D(I, J) = \begin{vmatrix} 19115.55 & 627.03 & 0 \\ 627.03 & 2305.26 & 0 \\ 0 & 0 & 849.81 \end{vmatrix}$$

Bending stretcing coupling stiffness,  $B(I, J)=0$  이 된다.

최초로 가정된 "변위"는 다음과 같다.

$$y(i, j)(1) = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

영향계수는 다음과 같이 구해진다.

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

여기서,

$$a_{mn} = \frac{P}{\pi^4} \frac{1}{D_{11}(m/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m/a)^2(n/b)^2 + D_{22}(n/b)^4}$$

앞의 절과 같은 절차를 취하면 fundamental circular frequency,  $\omega$  는 두 cycle 후에

$$\omega = (1586.5 \sim 1631.3) / \sqrt{m}$$

세 cycle 후에

$$\omega = (1592.5 \sim 1598.0) / \sqrt{m}$$

네 cycle 후에

$$\omega = (1593.6 \sim 1594.2) / \sqrt{m}$$

Ashton과 Whitney가 구한 에너지방법에 의한 해는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \pi^4 / m [D_{11} / (k/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(k/a)^2 \cdot (n/b)^2 + D_{22}(n/b)^4]$$

이로부터 구한  $\omega = 1593.7 / \sqrt{m}$  이다.

제 2 mode 고유원주 주파수는 세 cycle 후에 다음과 같이 구해진다.

$$\omega = (2695.8 \sim 2696.4) / \sqrt{m}$$

“정확한” 해는

$$\omega = 2695.8 / \sqrt{m} \text{ 이다.}$$

## 8. 단순지지된 Antisymmetric Angle-ply 적층평판에 대한 응용

예로서 그림 16의 표시된 바와 같은 평판을 고려한다. 소재특성들은 앞의절과 동일하다. 강성들은 다음과 같이 구해졌다.

$$A(I, J) = \begin{vmatrix} 463540000 & 342678000 & 0 \\ 342678000 & 463540000 & 0 \\ 0 & 0 & 358520000 \end{vmatrix}$$

$$B(I, J) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -747123 \\ 0 & 0 & -747123 \\ -747123 & -747123 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D(I, J) = \begin{vmatrix} 15451.3 & 11422.6 & 0 \\ 11422.6 & 15451.30 & 0 \\ 0 & 0 & 11950.7 \end{vmatrix}$$

최초로 가정된 “변위”와 계산과정은 앞의절과 같다. Fundamental circular frequency는 두 cycle 후에

$$\omega = (2937.4 \sim 3016.6) / \sqrt{m}$$

세 cycle 후에

$$\omega = (2949.3 \sim 2954.6) / \sqrt{m}$$

평판을 각 방향으로 5개 mesh로 나누어 고려하고 계산하면 네 cycle 후에

$$\omega = (2957.8 \sim 2958.3) / \sqrt{m} \text{ 을 구한다.}$$

Whitney가 구한 “정확한” 해는

$$\omega^2 = \pi^4 / m [ T33 + (2T12T23T13^2 - T22T13 - T11T23^2) / (T11T22 - T12^2) ] \text{ 이고,}$$

여기서

$$T11 = A11(k/a)^2 + A66(n/b)^2$$

$$T12 = (A12 + A66)(k/a)(n/b)$$

$$T13 = -[3B16(k/a)^2 + B26(n/b)^2] (n/b)$$

$$T23 = -[B16(k/a)^2 + 3B26(n/b)^2] (k/a)$$

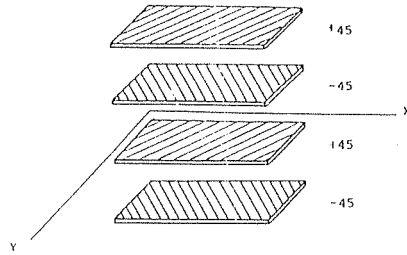


그림 16 Antisymmetric Angle-Ply

$$T22 = A22(n/b)^2 + A66 (k/a)^2$$

$$T33 = D11(k/a)^4 + 2(D12 + 2D66)(k/a)^2(n/b)^2 + D22(n/a)^4 \text{ 이다.}$$

이로부터 구한 해는

$$\omega = 2957.99 / \sqrt{m} \text{ 가 된다.}$$

제 2mode 고유진동 원주주파수는 두 cycle 후에

$$\omega = (6728.3 \sim 6826.8) / \sqrt{m}$$

세 cycle 후에

$$\omega = (6740.3 \sim 6758.1) / \sqrt{m}$$

네 cycle 후에

$$\omega = (6742.3 \sim 6745.8) / \sqrt{m}$$

이 된다.

평판을 각 방향으로 6개의 mesh로 나누면 5cycle 후에

$$\omega = (6867.3 \sim 6369.2) / \sqrt{m} \text{ 를 얻는다.}$$

Whitney의 해로 구하면  $\omega = 6868.2 / \sqrt{m}$  가 된다.

## 9. 임의 단면을 갖고 임의지지된 불규칙형태 구조부재의 진동해석

철근 콘크리트를 비롯한 모든 복합소재구조가 임의의 단면을 갖고 지지조건이 단순지지 아닐때, 이에 대한 진동문제를 연구하는것은 매우 어려운 일이 된다. 본문의 방법은 이러한 경우에도 매우 간단하게 “정확한”답을 얻을 수 있다는데 그 특징이 있다.

모든 구조물을 설계하기 위해서는 각종 변위, Slope, 모우멘트, 전단력 등의 영향선을 구하고 각종 하중상태하에서의 이들 값을 구해야 한다. 그런 다음에 진동이나 좌굴의 문제를 다시 고려해야 하는만큼 콘크리트 등 콤포지트 구조를 해석 설계하는 작업은 엄청난 것이된다. 본문의 방법을 사용하면 이미 구해진 변위의 영향치만 이용하여 진동해석이 가능하다는데 특징이 있다. 제목의 문제와 같은 경우, 이문제를 해결하는 어느 수치해석에든 일정 node point를 고려하고 영향선을 계산하는데 진동해석의 정확성은 이 영향치의 정확도만큼 정확하므로 다른 수치해석의 반복없이 해결될수가 있는 것이다.

## 10. 결 론

본문에는 불규칙적인 단면을 갖고 지지조건이 복잡한 구조부재의 고유진동주기를 계산하는 한 방법이 제출되어있다. 이 방법은 변형된 mode형태를 계속적으로 가정하고, 각 mode형태에 해당하는 고유주파수를 계산하는 것으로 되어있다. 그러나 이 방법은 소위 “the method of successive approximations”와는 완전히 다른 것이다.

이 방법 사용시의 수렴은 매우 빠른것으로 나타나 있다. 균등하중을 받는 단순지지된 특별 이방성 콤포지트 평판의 경우, 단 세 cycle후에 세자리수까지 정확한 진동의 고유주파수가 구해진다. 최초 가정된 상대적 변위의 크기는 수렴을 별로 좌우하지 않는다.

불규칙한 형태를 가진 비등방성, 비균질 부재인 경우, 질량 분포의 근사화나 고려되는 점의 숫자는 계산결과에 크게 영향을 주지 않는다. 큰 차이를 일으키는 것은 영향계수의 정확성이다. 따라서, 이러한 경우 정확한 영향계수를 구하는 것은 매우 중요한 일이 된다. 그러나, 변위의 영향계수를 구하는 것은 구조물 해석에 반드시 거쳐야 하는 과정이므로, 본문의 방법 사용시 기왕에 구한 값을 진동해석에 재차 이용할 수 있다는 장점이 있는 것이다.

## 【참 고 문 헌】

1. Timoshenko, S. P., History of Strength of Materials, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
2. 김덕현, 토목공학의 정의와 분야, 대한토목학회지 제21권 제2호, 1973. 6.
3. Preprints, The 32nd International Symposium and Exhibition of Society for the Advancement of Material And Process Engineering, Anaheim, California, U. S. A. April 6-9, 1987.
4. T. Sharples, “Application of Carbon Fiber Composites to Military Aircraft Structures, The Aeronautical Journal of the R Ae S, July, 1980.
5. A. R. Bunsell, “Fibre Reinforcements, Past, Present, and Future.”, 6th International Conference on Composite Materials(ICCM), London, England July 20~24, 1987.
6. R. I. Haresceugh, “Composites—the Way Ahead”, 6th ICCM.
7. C. T. Zhou, “Some Basic Problems in the Analysis of Instability to Composite Cylindrical Shells”, 6th ICCM.
8. I. F. Obraztsov, “First Approximation Geometrically Nonlinear Composite Shell Theory”, 6th ICCM.
9. A. S. Tooth, “A Design Procedure for Horizontal Cylindrical GRP Vessels Supported on Twin Saddles”, 6th ICCM.
10. Zhang Xigong, “The Failure of Composite Cylindrical Shells with Circular Holes Under Internal Pressure”, 6th ICCM.
11. Y. Ling, “Contact Stress Analysis of Mechanical Fastened Joint in Composite”, 6th ICCM.
12. F. K. Chang, “Damage in and Residual Strength of Bolted Composite Joints in Tension or Shear—out Mode Failure”, 6th ICCM.
13. S. W. Tsai, “Composites Design”, Think Composites, Dayton, Ohio, 1987.
14. K. L. Reifsnider, “Life Prediction Analysis : Directions and Divagations”, 6th ICCM.
15. C. C. Hiel, “Durability of Composites”, 6th ICCM.

16. G. Dorey, "Impact Damage in Composites", 6th ICCM.
17. T. Gottesman, "Criticality of Impact Damage in Composite Sandwich Structures", 6th ICCM.
18. P. J. Hogg, "The Impact Properties of Metal-Composite Laminates", 6th ICCM.
19. S. Hashemi, "Interlaminar Fracture of Composite Materials", 6th ICCM.
20. D. C. Phillips, "High Temperature Fiber Composites", 6th ICCM.
21. D. F. Hasson, "Impact Behavior of Ceramic Matrix Composite Materials", 6th ICCM.
22. A. Jardon, "Mass Production Composites", 6th ICCM.
23. F. J. Lockett, "The Provision of Adequate Materials Property Data", 6th ICCM.
24. D. E. W. Stone, "Non-Destructive Evaluation of Composite Structures—an Overview", 6th ICCM.
25. Structural Plastics : Properties and Problems, Report of the Task Committee on Properties of Selected Structural Plastics and Systems, STI, American Society of Civil Engineers, Feb. 1967.
26. Advanced Thermoplastic Composites, Phillips Petroleum Company, 1987.
27. A. S. Wood, "Advanced Thermoplastic Composites Get the Full Automation Treatment", Modern Plastics International, April 1987.
28. D. G. Brady, "Aerospace Discovers Thermoplastic Composites, Materials Engineering, Sept. 1986.
29. "Filament Winding", IRPI, March/April, 1985.
30. "Filament Wound Chimney Liner", IRPI, March/April, 1985.
31. "Chemical Control of Rebar Corrosion", Grace Corp., 1987.
32. "Glass Bridges Shimmer in Future", Engineering News Record, Sept. 17, 1987.
33. "Blow Molded pontoons Replace Wooden Jetties", MPL, April 1986.
34. "Bridge-Building Composites—Literally", IRPI, Nov/Dec, 1986.
35. "Confidence in Plastic Builds", ENR Sept. 17, 1987.
36. S. J. Dastin, "Advanced Composites for Future Aerospace Systems", Horizons, Vol 22, No 2, 1986.
37. "New Lockheed Composite Materials", Aircraft Engineering, June 1987.
38. G. Singh, "Large Deflection Behavior of Thick Composite Plates", Composite Structures, Vol 8, No 1, 1987.
39. P. T. Curtis, "A comparison of the Fatigue Performance of Woven and Nonwoven CFRP Laminates in Reversed Axial Loading", Int. J. of Fatigue, 9 No 2, 1987.
40. "Carbon-Carbon for Advanced Applications" Missiles and Electronics Group, U. S. A., April, 1987.
41. B. J. Harris, "Local Failure of Plastic-Foam Sandwich Panels", J. ASCE. ST 4, April 1969.
42. D. J. Bak, "Vapor Deposition Improves Metal Matrix Composites", Design News, June 16, 1986.
43. New Structural Ceramic Composite for Oxidation Environments, Materials and Processing Report, June 1987.
44. R. Garza, "Holography for Noncontact Structural Analysis", Sensors, Sept. 1986.
45. Journal of Society for the Advancement of Material and Process Engineering, JAN/FEB 1988.
46. Aviation Week and Space Technology, NOV. 16, 1987.
47. Preprints, The 33rd International Symposium and Exhibition of SAMPE, Anaheim, California, U. S. A., March 7-10, 1988.
48. Kim. D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements", International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, 1974.