

마코프從屬인 생산공정의 運營期間에 따른
連續生産型 샘플링 검사방식의 平均出檢品質[†]
(The Average Outgoing Quality of CSP's for Markov-Dependent
Production Processes in Short Production Runs)

朴 興 鮮*

金 成 寅*

Abstract

In this paper the approximate average outgoing quality and properties of a class of continuous sampling plans in a short production run are investigated when the quality of successive units follows a two-state time-homogeneous Markov chain. The results of previous studies can be obtained as special cases. It is observed that the long-run average outgoing quality limit values under the statistical control differ significantly as compared to the case of short production runs in a Markov-dependent production process.

1. 序 論

連續生産型 샘플링 검사방식(CSP : Continuous Sampling Plans)은 연속생산을 하는 工程에서 로트의 구분없이 검사속도를 생산속도와 맞추어 제품을 검사하는데 적용할 수 있는 샘플링 檢査方式으로, 이들 중 최초로 고안된 것은 Dodge[3]의 CSP-1이다. CSP-1의 적용은 생산공정으로부터의 제품 모두를 생산된 순서대로 검사하는 各個

檢査로부터 시작된다. 각개검사는 檢査過程에서 良好品(또는 合格品)이 미리 정해진 갯수인 i 개 만큼 나올 때까지 계속하며, 검사에서 발견되는 不良品은 양호품으로 교체한다. 이때 i 를 連續良好品數라고 한다. 각개검사를 하는 동안에 양호품이 연속적으로 i 개 나오면 각개검사를 중단하고, 연속적으로 생산되는 제품 n 개 중 하나를 추출하여 검사하는 一部檢査를 실시한다. 일부검사 과정에서 불량품이 발견되지 않는 한 일부검사는

*高麗大學校 工科大學 産業工學科

†이 연구는 高麗大學校 校內研究費 지원에 의하여 수행되었음.

계속되며, 일부검사에서 불량품이 발견되면 즉시 각개검사로 되돌아간다. 따라서 CSP-1은 연속양호품수 i 와 일부검사에서의 檢査比率 $1/n$ 에 의하여 결정되며, 각개검사로 부터 시작하여 각개검사 및 일부검사가 교대로 실시되는 특징을 갖는다.

CSP-1에서는 일부검사 도중 불량품이 발견되면 즉시 각개검사로 전환하나 이와는 다른, 일부검사에서의 각개검사로의 전환규칙을 갖는 연속생산형 샘플링 검사방식들로 CSP-2 [4], CSP-3 [4], CSP-4 [2], CSP-5 [2]가 있다. 따라서 연속생산형 샘플링 검사방식 CSP-1, ..., CSP-5는 서로 다른 일부검사 절차를 가지나 공통적으로 동일한 각개검사 절차를 갖는다.

이들 CSP에서 검사방식의 효율성 척도는 생산공정의 불량률의 함수인 平均出檢品質(AOQ: Average Outgoing Quality)이며, 이들 검사방식은 어느 것이나 AOQ의 최대값인 平均出檢品質限界(AOQL: Average Outgoing Quality Limit)를 보증하도록 고안되어 있다. AOQ는 생산공정을 오랜 기간 동안 연속적으로 운영하였을 때 검사에서 발견되지 않고 통과되는 불량품의 비율의 期待值(long run expected percentage of defectives passing inspection)로 정의된다 [10]. 생산공정의 불량률의 함수인 AOQ는 수학적인 기대치로서 검사 후의 제품 전체에 대한 平均 불량률의 의미를 갖는다. 즉, 생산공정의 불량률이 낮은 경우에는 검사 후의 불량률인 AOQ 역시 낮으나, 불량률이 높은 경우에 불량품은 검사 도중에 발견될 확률이 높으며 발견된 불량품들은 모두 양호품으로 교체되므로 결과적으로 AOQ는 낮아진다. 이와 반면에 불량품이 아주 낮지도

또는 높지도 않은 경우에는 상당수의 불량품이 (일부)검사에게 합격하게 되고 합격된 제품들 중에 포함된 불량품들로 인하여 AOQ는 높아진다. 따라서 CSP의 적용시 AOQ曲線은 CSP-1, ..., CSP-5에 따라 달라진다.

연속생산형 샘플링 검사방식의 적용에서는 생산공정이 管理狀態에 있음(즉, 不良率이 一定하게 유지됨)을 가정하나, 이는 매우 제한적이며 비현실적이다. 특히 생산된 순서대로 들어오는 제품을 검사하는 경우에 한 제품이 불량품일 확률은 이 제품의 앞에서 생산된 제품의 상태에 따라 어느 정도 영향을 받는다고 가정하는 것이 타당할 것이다. 따라서 생산공정이 관리상태에 있다는 가정을 보다 현실적으로 만들기 위한 많은 연구가 이루어졌으며, 다수의 문헌에서 마코프連鎖(Markov chain) 모형의 타당성이 언급되어지고 있다[6], [8], [9]. 특히 Sampathkumar [9]는 생산공정으로부터 검사에 제출되는 제품의 품질이 마코프연쇄 모형을 따른다는 가정하에 CSP-1, CSP-2, MLP-2 (Multilevel Continuous Sampling Plan) [5]의 AOQ에 관한 연구를 하였으며, 마코프연쇄의 母數인 연속적으로 생산된 두 제품의 품질에 대한 연속상관계수(serial correlation coefficient) ρ 가 양수일 때, 불량률이 일정하다는 가정하에서 기존의 검사방식을 이용하는 것은 적절치 못함을 보였다.

연속생산형 샘플링 검사방식의 또 하나의 제약점은 평균출검품질이 오랜 기간에서의 平均(long-run average)을 의미하는 것이다. 따라서 日 단위 또는 週 단위로 생산하는 경우에 AOQ가 샘플링 검사방식에 대한 효율성의 척도로서 적합하지 못함은 오래

전부터 인식되어 왔으며[10], 더욱이 AOQ에 대한 정의에서의 '오랜 기간'이 어느 정도의 기간인지도 분명하지 않다. 따라서 生産期間 즉, 생산공정의 연속적인 운영기간이 짧을 때에 대한 효율성 척도가 필요하며 이에 대한 명확한 척도로서, 생산기간이 t 일 때 검사에서 발견되지 않고 통과한 불량품의 비율인 $AOQ(t)$ 를 들 수 있다. Yang [10]은 생산공정의 불량률이 일정하게 유지된다는 가정하에 Dodge형 샘플링 검사방식(CSP-1, CSP-2, ..., CSP-5)을 이산형 재생과정(discrete renewal process)으로 수식화하여 無限 생산기간에서의 AOQ 및 有限 생산기간 t 에서의 $AOQ(t)$ 에 관한 연구를 하였다.

이상에서 언급한 바와 같이 연속생산형 샘플링 검사방식의 적용에 있어서 생산공정의 불량률이 일정하게 유지된다는 비현실적인 가정과, 검사방식의 효율성 척도인 AOQ를 계산하는 데 있어 생산기간을 무한으로 가정한 불합리성을 보다 일반화하려는 연구가 이루어져 왔으나, 기존의 연구들에서는 두가지 요소를 동시에 고려함이 없이 이들 중 한가지만을 고려하였다.

본 연구에서는 이들 요소를 모두 고려하여 Dodge형 샘플링 검사방식에 관한 연구를 한다. 즉, 연속상관계수가 ϕ 인 마코프연쇄모형을 따르는 마코프종속(Markov-dependent) 생산공정에서 생산기간이 t 일 때 CSP의 $AOQ(\phi, t)$ 를 구한다. 이 연구는 기존의 연구를 일반화시키는 것으로 볼 수 있다. 즉 $\phi = 0$ 인 경우의 $AOQ(0, t)$ 는 생산공정의 불량률이 일정하게 유지되는 상황으로 Yang [10]의 결과를, $t = \infty$ 인 경우의 $AOQ(\phi, \infty)$ 는 생산기간이 무한인 상황으

로 Sampathkumar [9]의 결과를 포함한다.

2. CSP의 平均出檢品質 : $AOQ(\phi, t)$

CSP에 공통적인 各個檢査에서의 연속양호품수를 i , 일부검사에서의 검사비율을 $1/n$ 이라고 할 때, 마코프종속 생산공정에 대한 CSP를 再生過程으로 수식화하기 위하여 확률변수 $Y_u, u=0, 1, 2, \dots$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$Y_u = \begin{cases} 0, & u \text{ 번째 제품이 양호품일 때,} \\ 1, & u \text{ 번째 제품이 불량품일 때.} \end{cases}$$

CSP에서는 로트를 형성하지 않고 생산된 순서대로 각각의 제품을 검사하므로 편의상 u 를 u 번째 제품이 생산된 시간으로 간주하기로 하며, Sampathkumar [9]의 연구에서와 같이 다음을 가정한다.

- (1) 과정 $\{Y_u, u=0, 1, 2, \dots\}$ 는 二狀態時間同質的(two-state time-homogeneous) 마코프연쇄이며 $P[Y_0=1]=1$ 이다.
- (2) 轉移行列(transition probability matrix)은 다음과 같다.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \end{matrix}, 0 < \alpha, \beta < 1.$$

- (3) 0번째 제품은 AOQ의 계산에 포함시키지 않는다.
- (4) 일부검사에서의 샘플링 검사방식은 系統샘플링을 가정한다.

마코프연쇄 $\{Y_u\}$ 의 안정적 분포(stationary distribution)는 $[v(0), v(1)] = [\beta / (\alpha + \beta), \alpha / (\alpha + \beta)]$ 이다. 그러므로 생산기간이 무한일 때 생산공정으로부터 발생하는

불량품의 비율인 工程不良率은 $p = \alpha / (\alpha + \beta)$ 이며, $\delta = \alpha + \beta$ 로 놓으면

$$\text{Max}[0, 1 - \delta^n] < p < \text{Min}[\delta^n, 1]$$

이다. 또한 마코프연쇄 $\{Y_u\}$ 의 n-단계 轉移行列은 다음과 같다.

$$P^n = [(p_u^{(n)})] = \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + (1 - \delta)^n \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

여기에서 i, j 는 0 또는 1이며, $q = (1 - p)$ 이고, δ 는 어느 한제품의 상태가 그 제품의 앞에서 생산된 제품의 상태(양호품 또는 불량품)와 관련된 정도를 나타내는 모수로서, $\phi = (1 - \delta)$ 를 Y_u 와 Y_{u+1} 의 연속상관계수라고 한다. 특히 $\phi = 0$ 인 경우는 생산기간에 관계없이 불량률이 일정하게 유지되는 상황을 나타낸다.

Yang [10]은 생산공정의 不良率이 일정하게 유지될 때에 CSP를 한번의 각개검사와 일부검사의 완결을 재생주기(renewal cycle)로, 이러한 재생주기 동안에 생산된 제품의 수를 재생구간(renewal interval)으로 하는 離散型 再生過程으로 수식화하여 생산기간이 t 일 때의 평균출검품질 AOQ(t)에 대한 近似值인 AOQ*(t)를 다음과 같이 구하였다.

$$\text{AOQ}^*(t) = \frac{E(X)}{E(W)} + \frac{E(X)}{2t} \left[\frac{\sigma_w^2 + E(W)}{[E(W)]^2} - 1 \right] \quad (1)$$

여기에서 $E(W)$, σ_w^2 은 각각 하나의 재생주기 동안에 생산된 제품 수(W)의 기대치와 분산이며, $E(X)$ 는 하나의 재생주기 동안에 검사받지 않고 통과된 불량품 수(X)의 기대치이다.

제품의 狀態를 나타내는 확률변수 Y_u 의

값은 양호품이면 0, 불량품이면 1이며 假定에 의하여 $Y_0 = 1$ 이다. CSP 각작은 서로 다른, 일부검사에서 각개 검사로의 전환규칙을 가지나 공통적으로 동일한 각개검사 절차와 각개검사 및 일부검사가 반복적으로 시행되는 특징을 가지므로, 이들 중 CSP-1을 이산형 재생과정으로 수식화하기 위하여 事件(event) E를 'i개의 連續的인 良好品 발견 후 처음으로 不良品 발견'이라고 정의하자, CSP-1의 적용시 일부검사에서 불량품을 발견한 직후에 각개검사를 실시하므로, 마코프연쇄 $\{Y_u\}$ 는 사건 E가 발생한 직후의 상태가 항상 '1'이 되는 특성을 가진다. 이제 $Y_0 = 1$ 로부터 시작되는 다음의 연속적인 試行의 결과 C를 생각하여 보자.

$$Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots,$$

$$Y_{t-1+1} = 0, \dots, Y_t = 0, Y_{t+1} = y_{t+1}, \dots, Y_{t+s} = 1,$$

E

$$Y_{t+s+1} = y_{t+s+1}, \dots, Y_{t+s+r} = y_{t+s+r}$$

이때 C가 발생할 確率은

$$\begin{aligned} P[C|Y_0 = 1] &= P[Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_{t+s+r} = y_{t+s+r} | Y_0 = 1] \\ &= p(1, y_1) p(y_1, y_2) \dots p(y_{t-1}, 0) p(0, 0) \dots \\ &\quad p(0, 0) p(0, y_{t+1}) \dots p(y_{t+s-1}, 1) p(1, \\ &\quad y_{t+s+1}) \dots P(Y_{t+s+r-1}, y_{t+s+r}) \\ &= P[A|Y_0 = 1] P[B|Y_{t-s} = 1] \end{aligned}$$

이며, 여기서 $p(i, j) = P[Y_{u+1} = j | Y_u = i]$, $u = 0, 1, 2, \dots$ 이고 A는 E의 발생으로 끝나는 시행의 결과인

$$Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_{t-1+1} = 0, \dots, Y_t = 0, \dots, Y_{t+s} = 1$$

을 말하며, B는 A 바로 다음에 발생한 연속적인 시행의 결과

$$Y_{t+s+1} = Y_{t+s+1}, Y_{t+s+2} = Y_{t+s+2}, \dots,$$

$$Y_{t+s+r} = Y_{t+s+r}$$

을 말한다. 이제 $E_r, r=1, 2, \dots$ 을 C_r 에서 E 의 첫번째 발생이라 하면 그림 1에서

$$\begin{aligned} P[C|1] &= P[C_{1F}|1] P[C_{1P}|0] \\ &= P[C_{2F}|1] P[C_{2P}|0] \dots \\ &= P[C_1|1] P[C_2|1] \dots \end{aligned}$$

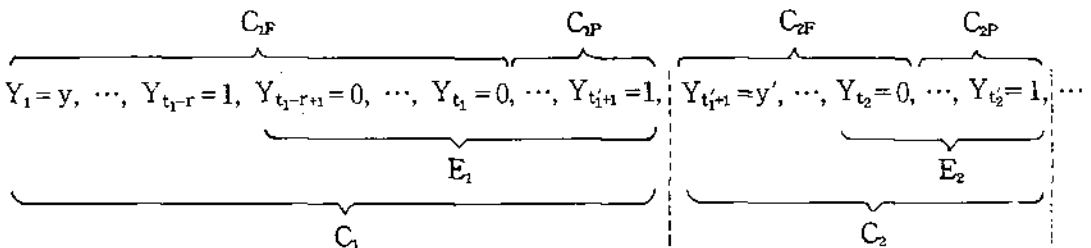
이다. CSP-1에서 일부검사는 각개검사에서 i 개의 연속적인 양호품이 발견된 직후에 시작되므로 일부검사를 나타내는 사건 C_{1P} 는 최초의 상태가 항상 '0'이 되므로 각개검사 및 일부검사를 나타내는 사건 C_{1F} 와 C_{1P} 는 서로 독립이다. 또한 최초의 상태 '1'을 갖는 연속적인 시행의 결과들 $C_r, r=1, 2, \dots$ 역시 서로 독립이고, 사건 E 의 순환시간(recurrence time)들은 독립이며 같은 분포를 가진다. 결국 ' i 개의 연속적인 양호품 발견 후 처음으로 불량품 발견'으로 정의된 사건 E 는 CSP-1 적용시 각개검사 기간 동안에 연속적으로 i 개의 양호품을 발견한 후 실시한 일부검사에서 첫번째 불량품을 발견한 것과 같으므로, 하나의 각개검사 및 일부검사의 완결을 검사주기로 할 때, 하나의 검사주기 C_r 동안에 생산된 제품수의 분포는 독립이며 같은 분포를 가짐을 알 수 있다.

이제 τ_1 을 첫번째 각개검사기간 동안에 생산된 제품수로 정의하면

$$\tau_1 = \min\{u \geq i, Y_{u-1+1} = \dots = Y_u = 0\}$$

이고, θ_1 을 첫번째 일부검사기간 동안에 생산된 제품수로 정의하면, θ_1 은 첫번째 일부검사에 대한 정지시간(stopping time)이며, τ_1 과 θ_1 은 통계적으로 독립이다. 그러므로 하나의 각개검사와 일부검사의 완결을 재생주기로, 하나의 재생주기 동안에 생산된 제품수를 재생구간으로 정의하면, 각개검사 및 일부검사가 반복되는 CSP에서 j 번째($j=1, 2, \dots$) 재생주기에 대한 확률변수(τ_j, θ_j)들은 서로 독립이다. 이상의 사실로부터 재생구간의 길이 $W_j = \tau_j + \theta_j$ ($j=1, 2, \dots$)는 서로 독립이며 같은 분포를 갖는 양의 확률변수(positive random variable)임을 알 수 있다.

따라서 확률변수 τ_j, θ_j, W_j 와 j 번째($j=1, 2, \dots$) 재생주기 동안에 검사받지 않고 통과된 불량품 수 X_j 는 j 에 관계없이 같은 분포를 가지므로 이들을 각각 τ, θ, W, X 로 표시하면, 생산공정의 불량률이 일정하게 유지되는 상황을 일반화한 마코프종속인 생산공정에 대하여도 $AOQ^*(t)$ 는 (1)과 같이 구하여지며 [11], 이때 $E(X), E(W), \sigma_w^2$ 은 연속상관계수 ρ 의 함수가 되므로 본 논문에서는 (1)을 $AOQ^*(\rho, t)$ 로 표기한다.



[그림 1] 이산형 재생과정으로서의 CSP-1.

3. CSP 와 관련된 확률변수의 平均 및 分散

AOQ*(ϕ , t)를 구하기 위하여는 CSP 에 대한 $E(X)$, $E(W)$ 및 σ_w^2 을 구하여야 하며, 이는 확률변수 X , W 의 生成函數 (generating function)로부터 구할 수 있다. 또한 한번의 각개검사기간과 일부검사기간 동안에 생산된 제품 수를 각각 τ 와 θ 로 놓으면 $W = \tau + \theta$ 의 관계로부터 W 의 생성함수는 τ 와 θ 의 생성함수의 곱으로 표시되므로, 결국 확률변수 τ , θ 및 X 의 생성함수를 구한 후, 이로부터 다음의 관계식을 이용하여 평균 및 분산을 구한다. 예를 들어, W 의 생성함수를 $G_w(s)$ 로 표기하면 $E(W)$, σ_w^2 은 다음과 같다.

$$G_w(s) = E(s^w) \quad (2)$$

$$E(W) = G'_w(1) \quad (3)$$

$$\sigma_w^2 = G''_w(1) + G'_w(1) - [G'_w(1)]^2 \quad (4)$$

各個檢査 기간 동안에 생산된 제품수 τ 의 평균 및 분산은 다음과 같이 구하여진다 [11].

$$E(\tau) = \frac{1 - q(1 - p\phi)^{l-1}}{pq(1 - p\phi)^{l-1}\phi}$$

$$\sigma_\tau^2 =$$

$$\frac{1 + pq(1 - p\phi)^{l-1}(\phi - 2 - 2\phi i) - q^2(1 - p\phi)^{2l-1}}{p^2q^2(1 - p\phi)^{2l-2}\phi^2}$$

각개검사 기간 동안에 생산된 제품수 τ 는 CSP에서 공통적으로 같으므로 $E(\tau)$ 및 σ_τ^2 은 다섯가지 검사방식에서 모두 같다.

다음에서는 각 검사방식에 대한 一部檢査에서 각개검사로의 전환방식을 설명하고, 이와 관련된 확률변수의 평균 및 분산을 구하기로 한다. 이를 위하여 다음을 정의한다.

K = 일부검사기간 동안에 검사받은 불량품 수.

v_1 = 일부검사에서 첫번째 불량품이 발견될 때까지의 검사갯수(첫번째 불량품 포함).

v_j = 일부검사에서 $(j-1)$ 번째 불량품 이후부터 j 번째 불량품이 발견될 때까지의 검사갯수(j 번째 불량품 포함), $j = 2, 3, \dots$

$x_j = v_j$ 중에서 검사받지 않고 통과한 불량품 수, $j = 1, 2, \dots$

$$A = p_{00}^{(n)}, B = p_{10}^{(n)}, M = \sum_{i=1}^{n-1} p_{ii}^{(n)}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} p_{ii}^{(n)}, Q = BA^{n-1}, R = p_{10}(p_{00})^{n-1}$$

3.1 CSP-1

一部檢査를 수행하는 도중 불량품이 발생하면 각개검사로 전환한다. 본 연구에서는 계통샘플링을 가정하므로 일부검사기간 동안에 생산된 제품수는 $\theta = nv_1$ 이고, 또한

$$P[v_1 = l] = (1 - A)A^{l-1}, l = 1, 2, \dots$$

이므로, v_1 및 θ 의 생성함수는 다음과 같이 구하여진다.

$$G_{v_1}(s) = \frac{(1 - A)s}{1 - As}$$

$$G_\theta(s) = \frac{(1 - A)s^n}{1 - As^n}, |s| \leq 1.$$

그러므로 $E(\theta) = n/(1 - A)$, $\sigma_\theta^2 = n^2A/(1 - A)^2$ 이다.

일부검사를 시작하여 첫번째 제품부터 $(n-1)$ 번째 제품까지는 검사를 하지 않고 합격시키며, n 번째 제품의 검사결과에 따라 일부검사의 지속여부를 결정하므로 v_1 은 정지시간(stopping time)이며, 첫번째 제품

부터 $(n-1)$ 번째 제품사이에서 발생하는 불량품 갯수에 대한 기대치는 $M = \sum_{i=1}^{n-1} P_{0i}^{(n)}$ 이다[1]. 따라서 Wald의 방정식[7]을 이용하면 $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = M \cdot E[v_1] = M / (1-A)$$

3.2 CSP-2

일부검사를 수행하는 도중에 불량품이 발견되어도 일부검사를 계속 실시하나, 한 개의 불량품을 발견한 이후 이 불량품을 포함한 a 개의 검사 이내에서 다시 불량품이 발견되면 각개검사로 전환하고, 그렇지 않으면 계속 일부 검사를 실시한다. 따라서 $(j-1)$ 번째($j=2,3,\dots$) 불량품이 발견된 후 j 번째 불량품이 발견되는 사건(event)은 최초의 상태가 항상 '1'이 되는 특성을 가지므로 v_j ($j=2,3,\dots$)는 서로 독립이며 같은 분포를 가진다.

일부검사기간 동안에 검사받은 불량품 수 $K=k$ 일 확률은

$$P[K=k] = P[v_2 > a, \dots, v_{k-1} > a, v_k \leq a] \\ = (1-Q)Q^{k-2}, k=2, 3, \dots$$

이며, $\theta = n \sum_{j=1}^K v_j$ 이므로 θ 의 생성함수는 다음과같이 구할 수 있다. 이제 $\Lambda_K = \sum_{j=1}^K v_j$ 라 하자. 이때 Λ_K 의 생성함수는 다음과 같다.

$$G_{\Lambda_K}(s) = E[s^{\Lambda_K}] \\ = \sum_{k=2}^{\infty} E[s^{v_1}] \prod_{j=2}^{k-1} E[s^{v_j} | v_j > a] \\ E[s^{v_k} | v_k \leq a] P[K=k] \quad (5)$$

$P[v_1=l]$ 은 CSP-1에서와 같으며, 확률변수 v_j ($j=2,3,\dots$)에 대하여

$$P[v_j=l] = \begin{cases} 1-B, & l=1 \\ B(1-A)A^{l-2}, & l=2, 3, \dots \end{cases}$$

이므로,

$$E[s^{v_j} | v_j > a] = (1-A)s^{a+1} / (1-As), \\ j=2, 3, \dots, k-1 \quad (6)$$

$$E[s^{v_k} | v_k \leq a] = \\ \frac{(1-B)s + (B-A)s^2 - B(1-A)A^{a-1}s^{a+1}}{(1-Q)(1-As)} \quad (7)$$

이다. 따라서, (6), (7)을 (5)에 대입하여 정리하면

$$G_{\Lambda_K}(s) = \\ \frac{sG_{v_1}(s)[(1-B) + G_{v_1}(s)B\{1-(As)^{a-1}\}]}{1 - G_{v_1}(s)Qs^a}$$

이고, 이로부터 $G_\theta(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_\theta(s) = \\ \frac{s^n G_{v_1}(s^n)[(1-B) + G_{v_1}(s^n)B\{1-(As^n)^{a-1}\}]}{1 - G_{v_1}(s^n)Qs^{an}}$$

(3), (4)로부터, θ 의 평균 및 분산은 각각

$$E(\theta) = \frac{n(2-Q+B-A)}{(1-A)(1-Q)},$$

$$\sigma_\theta^2 = \left[\frac{n}{(1-A)(1-Q)} \right]^2 (I+J)$$

이며, I, J 는 다음과 같다.

$$I = (1-Q)[4+5B-11A-(2a+3)Q \\ -5AB+5A^2+(2a+3)AQ],$$

$$J = (2-Q+B-A)[-2-B+5A \\ +(2a+3)Q-2(a+2)AQ]$$

일부검사기간 동안 검사받지 않고 통과한 불량품 수 X 의 평균은

$$E(X) = \sum_{k=2}^{\infty} E[X|K=k] P[K=k] \\ = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^k E[x_j|K=k] P[K=k] \quad (8)$$

이며, $E[x_j|K=k]$ 는 다음과 같다.

$$E[x_j|K=k] = \begin{cases} M E[v_j], j=1 \\ N+(E[v_j|v_j>a]-1)M, \\ \quad j=2, 3, \dots, k-1 \\ \frac{N P[v_k=1] + M \sum_{l=2}^k l P[v_k=l]}{P[v_k \leq a]}, j=k \end{cases} \quad (9)$$

(9)를 (8)에 대입하여 정리하면, E(X)는 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{1}{1-Q} [N(1-B+Q)+MB + \frac{1}{1-A} [M(1+B)+(A-2)MQ]]$$

3.3 CSP-3

일부검사 도중 불량품이 발견되면, 불량품 바로 다음의 제품부터 b개를 각개검사를 한다. 이들 b개의 제품 중에서 불량품이 발견되면 각개검사로 전환하고, b개가 모두 양호품이면 CSP-2의 일부검사 절차를 따른다. 즉, 일부검사를 다시 실시하여, a개 이내에서 불량품이 발생하면 각개검사로 전환하고, 그렇지 않으면 일부검사를 계속 실시한다.

θ 의 생성함수를 구하기 위하여 확률변수 $u_j, j=1, 2, \dots$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$u_j = \begin{cases} 0, & \text{b개의 제품이 모두 양호품일 때,} \\ 1, & \text{b개의 제품 중에 불량품이 있을 때.} \end{cases}$$

일부검사는 b개(각개검사) 혹은 a개(일부검사)의 제품 중에서 불량품이 발견되었을 경우 중단되므로, 이때 $K=k$ 일 확률은 다음과 같다.

$$P[K=k] = \begin{cases} P[K=\kappa_1] \\ = P[u_1=0, v_2>a, u_2=0, \\ \quad v_3>a, \dots, v_{k-1}>a, \\ \quad u_{k-1}=1] \\ \text{혹은} \\ P[K=\kappa_2] \\ = P[u_1=0, v_2>a, u_2=0, \\ \quad v_3>a, \dots, u_{k-1}=0, \\ \quad v_k \leq a] \end{cases}$$

일부검사에서 j번째($j=2, 3, \dots$) 불량품이 발견된 이후 연속으로 b개의 양호품이 발견되는 사건은 최초의 상태가 항상 '1'이 되며, b개의 양호품이 발견된 이후 계속된 일부검사에서(j+1)번째 불량품이 발견되는 사건은 최초의 상태가 항상 '0'이 되므로 확률변수 $u_j(j=1, 2, \dots)$ 및 $v_j(j=2, 3, \dots)$ 는 각각 서로 독립이며 같은 분포를 가지므로 $P[u_j=0] = R(j=1, 2, \dots)$, $P[v_j>a] = A^a(j=2, 3, \dots)$ 이다.

따라서 $k=2, 3, \dots$ 에 대하여

$$P[K=\kappa_1] = (RA^a)^{k-2}(1-R)$$

$$P[K=\kappa_2] = (RA^a)^{k-2}R(1-A^a)$$

이고, 일부검사시간 중 생산된 총 제품수 θ 는 $K=k, k=2, 3, \dots$ 일 때

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 = \sum_{j=1}^{k-1} (nv_j + b), & K=\kappa_1 \\ \theta_2 = \sum_{j=1}^{k-1} (nv_j + b) + nv_k, & K=\kappa_2 \end{cases}$$

이다. 따라서 θ 의 생성함수는 다음과 같다.

$$G_\theta(s) = E(s^\theta)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} E(s^\theta | K=k) P[K=\kappa_1]$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} E(s^\theta | K=k) P[K=\kappa_2]$$

$$= \frac{(1-A)s}{1-As^n - RA^a(1-A)s^{n(a+1)+b}}$$

$$\left[1 - R + \frac{R(1-A)(1-A^a s^{an})s^a}{1-As} \right]$$

그러므로 θ 의 평균은

$$E(\theta) = \frac{n}{1-A} + b + \frac{R}{1-RA^a} \left[bA^a + \frac{n}{1-A} \right]$$

이며, (4)에 의하여 σ_θ^2 을 구할 수 있다.

확률변수 x_j 에 대하여

$$E[x_j|K=k] = \begin{cases} E(v_1) M, j=1 \\ E[v_j|v_j > a] M, j=2, 3, \\ \dots, k-1 \\ E[v_k|v_k \leq a] M, j=k \end{cases}$$

이며, 또한

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k E[x_j|K=k] P[K=k] \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} E[x_j|K=k] P[K=\kappa_1] \\ & \quad + \sum_{j=1}^k E[x_j|K=k] P[K=\kappa_2] \end{aligned}$$

이므로, (8)로부터 $E(X)$ 는 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{M(1+R-RA^a)}{(1-RA^a)}$$

3.4 CSP-4, CSP-5

CSP-4의 일부검사는 CSP-1과 같은 방법으로 실시하지만, 일부검사에서 불량품을

발견하였을 때, 이 불량품은 선별하며 나머지 $(n-1)$ 개의 제품은 폐기한다. 그러므로 $\theta = n(v_1-1)$ 의 관계가 성립되므로, θ 의 생성함수

$$G_\theta(s) = (1-A)s / (1-As^n)$$

로부터

$$E(\theta) = 1 + nA / (1-A)$$

$$\sigma_\theta^2 = n^2A / (1-A)^2$$

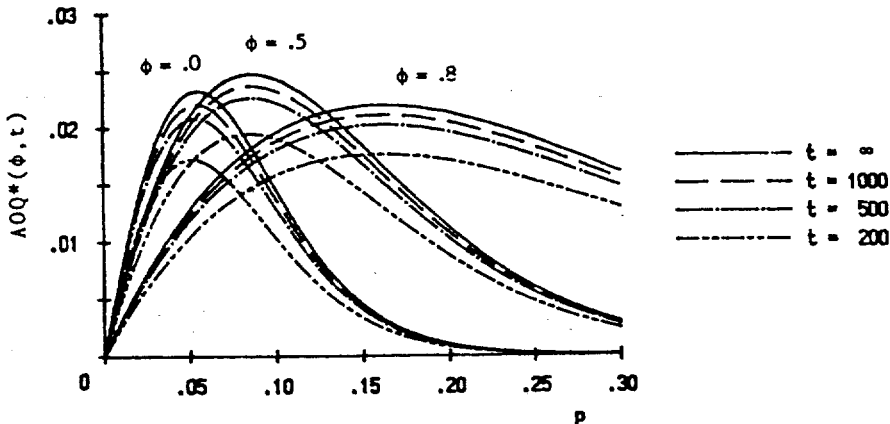
이고, $E(X) = M(E[v_1]-1) = MA / (1-A)$ 이다.

CSP-5의 일부검사는 CSP-4와 같으나, $(n-1)$ 개의 제품을 폐기하지 않고 선별한다. 따라서 $E(\theta)$ 및 σ_θ^2 은 CSP-1과 같으며, $E(X)$ 는 CSP-4와 같다.

4. 連續相關係數 및 生産期間에 따른 평균 출검품질

생산기간 t 와 연속상관계수 $\phi (=1-\delta)$ 의 변화에 따른 $AOQ^*(\phi, t)$ 값의 변화를 살펴 본다.

그림 2는 ϕ 및 t 의 변화에 따른 CSP-1 ($i=30, n=5$)의 $AOQ^*(\phi, t)$ 값을 보여준다. 각각의 ϕ 및 t 에 대하여 $AOQ^*(\phi, t)$



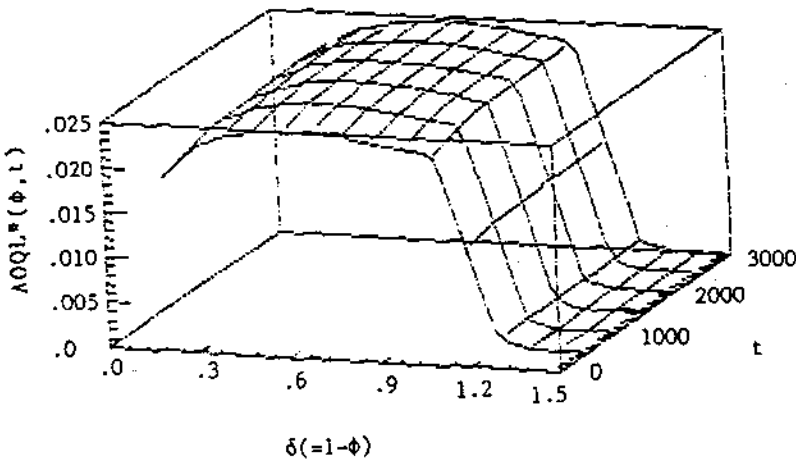
[그림 2] CSP-1($i=30, n=5$)의 $AOQ^*(\phi, t)$

는 최대값 $AOQL^*(\phi, t)$ 를 가지며 이 값은 t 가 증가함에 따라 $AOQL^*(\phi, \infty)$ 에 가까워짐을 알 수 있다. 즉, CSP의 각개 검사기간 동안에 통과되는 불량품은 없으므로, t 가 작을 때에는 전체 검사기간 중에서 각개 검사기간이 차지하는 비중이 커져 $AOQL^*(\phi, t)$ 값은 작아지며, t 가 증가함에 따라 일부 검사기간 동안에 통과되는 불량품 수 역시 증가하므로 $AOQL^*(\phi, t)$ 값은 증가하여 $AOQL^*(\phi, \infty)$ 값에 접근하게 된다.

ϕ 의 증가에 따라 $AOQL^*(\phi, t)$ 를 갖는 불량률 p 가 커짐을 그림 2로부터 알 수 있다. ϕ 값의 증가는 u 번째 제품이 양호품(불량품)일 때 $u+1$ 번째 제품이 양호품(불량품)일 확률이 증가함을 의미한다. 극단적으로 $\phi = 1$ 인 경우는 u 번째에서 양호품(불량품)이 한번 생산되면 양호품(불량품)만이 생산됨을 나타낸다. 마코프종속인 생산공정에서 $\phi = 0$ (즉, $\alpha + \beta = 1$)인 경우에

는 생산기간 및 앞에서 생산된 제품의 상태에 무관하게 불량품이 발생할 확률은 항상 α 가 되어 이를 공정불량률로 간주할 수 있다. 그러나 $\phi = 0$ 의 경우는 $t = \infty$ 일 때에만 공정불량률은 $p = \alpha / (\alpha + \beta)$ 의 의미를 가진다.

그림 3은 $i = 30, n = 5$ 인 CSP-1의 $AOQL^*(\phi, t)$ 를 보여주며 이 값이 표 1에 나타나 있다. 앞에서 설명한 바와 같이 모든 CSP에 대하여 $AOQL^*(\phi, t)$ 값은 t 가 증가함에 따라 $AOQL^*(\phi, \infty)$ 에 접근한다. 그러나 고정된 t 에 대하여 CSP-1의 경우 $\phi = 0.4$ 부근에서, CSP-2의 경우 $\phi = 0.8$, CSP-3의 경우 $\phi = 0.0$ 부근에서 $AOQL^*(\phi, t)$ 값은 최대가 된다. 따라서 기존의 $AOQL^*(\phi, t)$ 값을 보증하는 샘플링 검사방식에 따라 검사를 실시할 경우 샘플링 검사방식(CSP-1, ..., CSP-5)에 따라 보다 낮은 혹은 높은 $AOQL^*(\phi, t)$ 값을 얻게



[그림 3] CSP-1($i = 30, n = 5$)의 $AOQL^*(\phi, t)$ 곡선

[표 1] CSP-1($i=30, n=5$)의 $AOQL^*(\phi, t)$

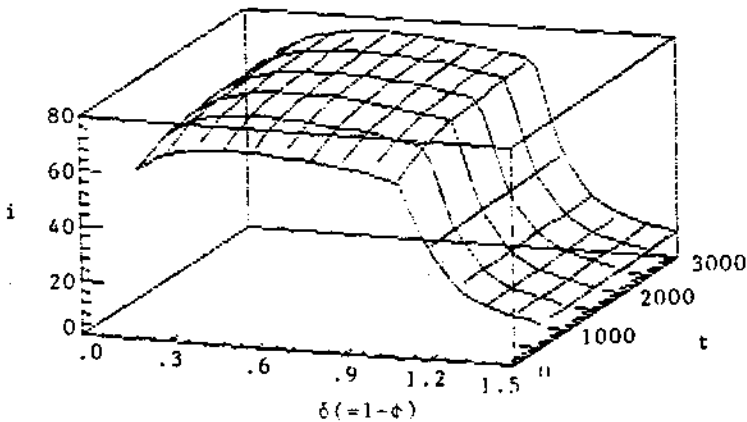
$\phi \backslash t$	500	1000	1500	2000	2500	3000	∞
0.9	.0169	.0176	.0179	.0180	.0181	.0182	.0184
0.8	.0203	.0211	.0214	.0216	.0217	.0217	.0220
0.7	.0217	.0226	.0229	.0231	.0232	.0232	.0235
0.6	.0224	.0234	.0237	.0239	.0240	.0240	.0244
0.5	.0226	.0237	.0240	.0242	.0243	.0244	.0247
0.4	.0226	.0237	.0241	.0243	.0244	.0245	.0248
0.3	.0224	.0235	.0239	.0241	.0242	.0243	.0247
0.2	.0219	.0231	.0235	.0237	.0238	.0239	.0243
0.1	.0214	.0226	.0230	.0232	.0233	.0234	.0238
0.0	.0208	.0220	.0225	.0227	.0228	.0229	.0233
-0.1	.0106	.0114	.0116	.0118	.0118	.0119	.0121
-0.2	.0008	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009
-0.3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

된다. 특히 CSP-2의 경우 $\phi > 0$ 인 경우에 $\phi = 0$ 을 가정한 기존의 검사방식을 이용한다면 원하는 $AOQL^*(\phi, t)$ 를 보증할 수 없게 된다.

표 2는 $n=5, 10, 20, 50$ 인 CSP-1에서 1% $AOQL^*(\phi, t)$ 를 갖는 i 값이며 $n=5$ 인 경우 i 의 변화 형태가 그림 4에 보여진다. n 이 고정되어 있을 경우 i 의 증가는 보다 엄격한 검사를 의미하므로 그림 4는

그림 3과 비슷한 형태를 가짐을 알 수 있다.

ϕ 의 변화에 따른 CSP의 $AOQL^*(\phi, t)$ 값이 그림 5에 보여진다. CSP의 엄격도는 CSP-2, CSP-3, CSP-1, CSP-4, CSP-5의 순이며 CSP-1, CSP-4, CSP-5는 ϕ 에 관계없이 거의 비슷한 엄격도를 유지한다. 그러나 CSP-3와 CSP-1간의 엄격도 차이는 $\phi=0$ 까지는 ϕ 가 감소함에 따라 증가하며, $\phi < 0$ 일 때에는 감소함을 알 수 있다.



[그림 4] 1% $AOQL^*(\phi, t)$ 를 갖는 i 곡선(CSP-1, $n=5$)

[표 2] 1% AOQL*(ϕ , t)를 갖는 t 값(CSP-1)

(a) n = 5

$\phi \backslash t$	500	1000	1500	2000	2500	3000	∞
0.9	55	60	62	63	63	64	66
0.8	61	67	68	69	70	70	73
0.7	63	69	71	72	73	73	75
0.6	64	70	72	73	74	74	77
0.5	64	70	72	73	74	75	77
0.4	63	69	72	73	74	74	77
0.3	62	68	71	72	73	73	76
0.2	61	67	69	71	72	72	75
0.1	59	65	68	69	70	70	73
0.0	57	64	66	67	68	69	71
-0.1	33	34	34	34	34	34	35
-0.2	20	20	20	20	20	20	20
-0.3	14	14	14	14	14	14	14
-0.4	11	11	11	11	11	11	11
-0.5	9	9	9	9	9	9	9

(b) n = 10

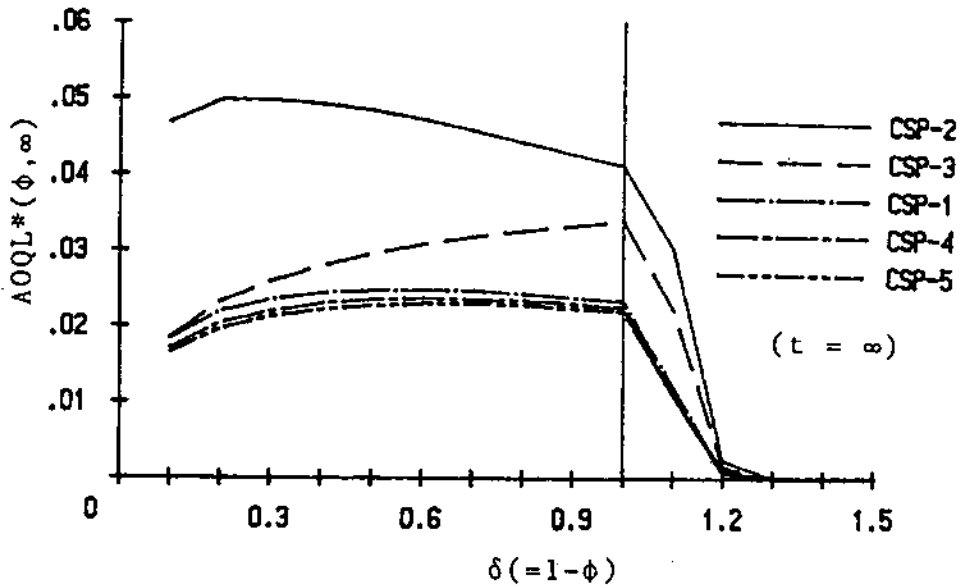
$\phi \backslash t$	500	1000	1500	2000	2500	3000	∞
0.9	111	131	139	143	146	147	157
0.8	111	132	140	144	147	149	160
0.7	107	127	135	140	143	145	156
0.6	101	121	129	134	137	139	150
0.5	95	114	122	127	129	131	142
0.4	90	108	115	120	122	124	135
0.3	85	102	109	113	116	118	127
0.2	81	97	104	107	110	112	121
0.1	77	92	98	102	104	106	115
0.0	74	88	94	97	100	101	110
-0.1	39	41	41	42	42	42	42
-0.2	23	23	24	24	24	24	24
-0.3	16	16	16	16	16	16	16
-0.4	12	12	12	12	12	12	12
-0.5	10	10	10	10	10	10	10

(c) $n = 20$

$\phi \backslash t$	500	1000	1500	2000	2500	3000	∞
0.9	170	225	251	267	277	284	326
0.8	152	202	227	241	251	258	300
0.7	135	179	201	215	224	230	269
0.6	122	161	181	193	201	206	241
0.5	112	146	164	175	182	187	219
0.4	103	135	151	160	167	172	200
0.3	96	125	140	149	155	159	185
0.2	91	117	130	139	144	148	172
0.1	86	110	122	130	135	139	161
0.0	81	104	116	123	127	131	152
-0.1	43	47	48	48	48	48	49
-0.2	26	26	27	27	27	27	27
-0.3	18	18	18	18	18	18	18
-0.4	13	14	14	14	14	14	14
-0.5	11	11	11	11	11	11	11

(d) $n = 50$

$\phi \backslash t$	500	1000	1500	2000	2500	3000	∞
0.9	204	317	388	438	474	502	711
0.8	166	249	301	338	365	386	546
0.7	139	209	251	280	301	318	445
0.6	114	183	218	242	259	273	379
0.5	98	164	194	214	229	241	332
0.4	86	149	176	194	207	217	296
0.3	77	138	161	177	189	198	269
0.2	70	128	149	164	174	183	246
0.1	64	120	139	153	162	170	228
0.0	59	113	131	143	152	159	212
-0.1	43	51	54	55	56	56	58
-0.2	27	30	30	30	31	31	31
-0.3	19	20	21	21	21	21	21
-0.4	15	15	15	15	15	15	16
-0.5	12	12	12	12	12	12	12



[그림 5] CSP의 $AOQL^*(\phi, t)$ 곡선

5. 結 論

본 논문에서는 생산공정의 연속적인 운영 기간이 有限하고 불량품의 발생확률이 그 제품의 앞에서 생산된 제품의 상태에 따라 변하는 마코프從屬 생산공정에서 CSP를 적용할 때의 평균출검품질에 대한 근사치 $AOQ^*(\phi, t)$ 를 구하였다. 특히 ϕ 또는 t 만을 고려한 기존의 연구는 본 연구의 특수한 경우로 포함된다.

CSP는 원하는 수준의 $AOQL(\phi, t)$ 값을 보증하도록 설계되므로 기존의 방법을 이용하여 검사방식을 결정한다면 생산공정의

ϕ, t 값을 각각 0, ∞ 로 가정한 것이므로 생산공정의 특성을 반영하지 못하며, 원하는 수준의 $AOQL(\phi, t)$ 값을 보증하지 못하거나 혹은 필요 이상의 높은 값을 보증하여 품질검사에 불필요한 노력을 낭비하게 된다.

본 논문에서는 지정된 $AOQL(\phi, t)$ 값을 얻기 위한 샘플링 검사방식의 설계에는 CSP의 두 모수인 i 또는 n 이 고정된 경우에 다른 하나의 모수를 결정하였으나 샘플링 검사의 경제성 등을 고려하여 i 와 n 을 동시에 결정 할 수 있는 연구가 이루어져야 할 것이다.

References

1. Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prectice-Hall, New Jersey, 1975.
2. Derman, C., Johns, M. V. and Lieberman, G. J., "Continuous Sampling Procedures Without Control," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 30, No. 4, pp. 1175~1191(1959).
3. Dodge, H. F., "A Sampling Inspection Plan for Continuous Production," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14, No. 3, pp. 264~279(1943).

4. Dodge, H. F. and Torrey, M. N., "Additional Continuous Sampling Inspection Plan." *Industrial Quality Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 7~12(1951).
5. Lieberman, G. L. and Solomon, H., "Multilevel Continuous Sampling Plans," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, No. 4, pp. 480~484(1953).
6. Preston, P. F., "An Empirical Bayes Problem with a Markovian Parameter," *Biometrika*, Vol. 58, No. 3, pp. 535~543(1971).
7. Ross, S. M., *Stochastic Process*, John Wiley, New York, 1983.
8. Sackrowitz, H., "A Note on Unrestricted AOQL's," *Journal of Quality Technology*, Vol. 7, No. 2, pp. 77~80(1975).
9. Sampathkumar, V. S., Rajarshi, M. B., "Continuous Sampling Plans for Markov-Dependent Production Processes." *Naval Research Logistics*, Vol. 34, pp. 629~644(1987).
10. Yang, G. L., "A Renewal Process Approach to Continuous Sampling Plans," *Technometrics*, Vol. 25, No. 1, pp. 59~67(1983).
11. 朴興鮮, *Markow-Dependent 生産工程에서 生産期間이 連續生産型 샘플링 檢査方式에 미치는 影響에 관한 研究*, 碩士學位 論文, 高麗大學校, 1986.