Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 15, No. 2, Dec., 1989

PERT 공식의 이론적 근거와 새로운 추정방법

김세헌* · 원유경* · 채경철**

Theoretical Basis of PERT Formula and a New Estimation Method

Sehun Kim, Y.K. Won and Kyung C. Chae

Abstract

PERT formulae for the mean and variance of activity time are near exact only over a short interval of the concentration parameter which is defined as the sum of the two shape parameters of the beta distribution. Aiming a better estimation of the mean and variance of activity time, we propose a method of subjectively estimating this concentration parameter via estimating the probability of completing the activity within a specified time interval.

1. 서　　론

PERT의 창시자들은 주관적으로 결정된 낙관시간치 a, 비관시간치 b, 최빈시간치 m에 입각하여 활동시간의 평균과 분산을 추정하는 다음 공식을 제안하였다[16].

$$\mu_P = (a+b+4m)/6, \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sigma_P^2 = (b-a)^2/36. \quad \cdots\cdots (2)$$

이들 평균과 분산을 구하기 위해서 활동시간이 베타분포를 한다고 가정하였는데 파라메타 α, β를 갖는 베타분포는 다음의 밀도함수를 갖는다.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\ (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\,(b-a)^{\alpha+\beta+1}}$$

$$a \le x \le b, \quad \alpha,\ \beta > -1, \quad \cdots\cdots (3)$$

이 베타분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = [b(\alpha+1) + a(\beta+1)]/(\alpha+\beta+2) \quad \cdots (4)$$

---

* 한국과학기술원 경영과학과
** 한국과학기술대학 경영과학과

$$\sigma^2=(b-a)^2(\alpha+1)(\beta+1)/[(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)]. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

한편 α, $\beta>0$일때 베타분포는 다음과 같은 1개의 모우드를 갖는다.

$$m=(b\alpha+a\beta)/(\alpha+\beta). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

여기서 $k=\alpha+\beta$라 놓으면 k는 베타분포의 집중도(concentration parameter)라 하며[1], α, β, μ, σ^2을 모두 k, m의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu=(a+b+km)/(k+2), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\sigma^2=(\mu-a)(b-\mu)/(k+3), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\alpha=(m-a)k/(b-a), \ \beta=(b-m)k/(b-a). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

여기서 a, b, m, k의 값이 결정되면 가정된 베타분포의 모양은 완전히 결정된다. 최근에 Sa-

최근에 Sasieni[19]는 PERT 공식 (1), (2)가 어떻게 해서 (7), (8)식에서부터 유도될 수 있는가를 연구한 결과를 발표하였다. 그는 식 (1)과 (7)이 같아지기 위해서는 다음이 성립해야 함을 밝혔다.

$$\alpha+\beta=4. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

즉 PERT 공식 (1)은 α와 β의 합이 4가 된다는 가정을 추가로 해야만 유도될 수 있는 공식임을 밝혔던 것이다.

지난 수십년간 OR 및 생산관리 분야에서는 (1)식이 베타분포에서 유도될 수 있다고 언급되어 왔으나 실제로 이를 검증하여 본 사람이 없었던 것이다. Sasieni의 지적은 α, β의 값을 전혀 모르는데 그들의 합이 4라고 가정해야 할 특별한 이유가 없다는 것이다. 식(10)의 가정은 베타분포의 모양에 대한 어떤 가정과도 전혀 일치하지 않으며, 분포의 모양 특히 왜도(skewness)는 α, β의 합이 아니라 그들의 상대적 크기에 달려 있다.

Littlefield, Randolph[12]는 여러가지 m값에 대해서 회귀분석을 함으로써 근사공식 (1)의 타당성을 보이려 시도하였고, Gallagher[7]는 PERT 공식을 사용함에 있어서 두 종류의 옵션을 제시함으로써 이 의문에 한가지 답을 제시하였다.

이러한 사실은 다음과 같은 자연스런 의문을 제기한다. 굳이 부정확한 근사공식 (1), (2)를 사용할 것이 아니라 (9)에 의해 실제로 α, β의 값을 구하여 가정된 베타분포의 정확한 모양을 발견함으로써 보다 정확한 시간추정치 (4), (5)를 이용하는 것이 더 의미있는 일이 아닌가?

이 논문에서는 제 2절에서 PERT 가정의 몇가지 문제점과 그러한 문제점을 극복하기 위한 노력들을 고찰해 보고, 제 3절에서는 PERT 활동완료 확률을 이용하여 가정된 베타분포의 정확한 모양을 발견하는 방법을 제시하고, 제 4절에서는 실제 의사결정에서 이것을 사용하는 방법을 제시한다.

2. PERT 가정의 문제점

PERT 가정의 핵심은 다음과 같이 요약된다.

1) 활동시간이 베타분포를 한다.

2) 낙관시간치 a, 비관시간치 b와 관련하여 모우드 m의 위치에 대해서는 아무런 특별한 가정을 하지 않는다.

3) 표준편차가 시간범위(b-a)의 1/6이다.

가정 1)은 활동시간의 분포가 연속이고(continuity), 1개의 모우드를 갖고(unimodality), 2개의 비음의 x축 절편을 갖는다(two nonnegative abscissa intercepts)는 특성을 만족시키기 위해서 제안된 것인데 베타분포가 이 세가지 특성을 만족하는 유일한 분포는 아니다. 베타분포의 가정에 따라 평균시간 추정에서 (1)과 (4) 사이에 오차가 발생할 수 있는데 심한 경우 이

오차는 33%까지 차이가 난다([13], [14], [20]). 그래서 Moder, Rodgers[17], Perry, Greig[18]는 a, b의 값이 실제로는 거의 실현 가능성이 없는 0%, 100% 백분위수라고 지적하고 a, b 사이의 여러가지 백분위수를 검토한 결과 평균과 분산추정에 5%, 95% 백분위수를 사용할 것을 제안하였다.

Kotiah, Wallace[11]는 활동시간의 분포로써 베타분포 보다는 truncated normal 분포의 가정에 입각하여 평균시간 추정에 $(a+b+4m)/10$의 공식을 사용할 것을 제안하였다.

가정 2)에 의해서 모우드 m은 a, b 사이의 임의의 값을 취할수 있는데 PERT 공식은 중앙값 $(a+b)/2$에 비해서 m에 2배의 비중을 준다. 그러나 중앙값과 모우드를 단순히 산술적으로 가중하여 평균을 구하는 것은 아무런 이론적 근거가 있는 것이 아니다[11]. 엄밀히 말하자면 1), 3)의 가정하에서 베타분포는 ± 0.707 또는 0의 고정된 왜도를 가지므로 2)의 가정은 1), 3)의 가정과 합치되지 않는다[5]. 최근에 Farnum, Stanton[6]은 m이 일정범위에 있을 때는 공식 (1), (2)가 상당히 작은 오차를 갖고 사용될 수 있음을 보였다.

Golenko[8]는 비교적 긴 완성기간을 요하는 여러개의 PERT 프로젝트를 분석한 결과 m이 대개 $(2a+b)/3$에 위치하고 있으며, 여러 활동들에 대해 비교분석해 본 결과 이것이 1%의 유의수준에서도 별로 차이가 나지 않았다는 것을 발견하고 평균시간 추정 공식으로 $(3a+2b)/5$를 사용할 것을 제안하였다.

가정 3)은 2)의 가정하에서 공식 (5)를 사용해야 하는 번잡성과 a, b, m 세개의 파라메타만으로는 베타분포를 확정지을 수 없는 결점을 보충하기 위해 도입한 가정이지만 m이 양 극단시간치 α, b에 가까울 때는 표준편차가 $(b-a)/6$보다 상당히 작아진다는 사실을 반영하지 못한다[6].

3. 활동완료 확률의 이용

전절에서 언급한 바를 종합해 보면 지금까지 PERT 공식 (1), (2)를 개선하려는 노력들은 3개의 파라메타 a, b, m만을 가지고 (1)의 또다른 표현을 제공하려는 것이었다. 그러나 가정된 베타분포의 4개의 파라메타를 전부 알지 못하는 한, 활동시간의 평균과 분산추정에 관한 어떤 시도도 원래의 베타분포를 정확히 반영하지 못하는 근사공식에 불과하다는 근본적인 약점을 가질수 밖에 없다.

필자들이 아는 한, $k=4$라는 가정없이 실제의 PERT 활동을 반영하는 베타분포의 정확한 모양을 발견하여 이로부터 진실한 활동시간의 평균과 분산을 추정하려는 시도는 거의 없었다. 다만 최근에 Chae와 Kim[3]은 m과 중앙값 $(a+b)/2$의 likelihood-ratio를 이용하여 베타분포의 집중도 k를 주관적으로 추정하려고 하였다.

그런데 likelihood-ratio는 확률이 아니라 확률 밀도를 이용한 비율로서, 실제 PERT 프로젝트를 담당하는 사람들이 이 비율값을 정확히 추정하기는 쉽지 않을 것 같다. 따라서 실제 PERT 활동현장에 있는 사람들이 좀더 쉽고 정확하게 평가할 수 있는 다른 지표가 요구된다. 우리는 이 지표로서 $\Pr[X \leq (a+b)/2]$를 제시한다. 이것은 두 극단적인 시간치 a, b의 중간 시간 이내에 한단계의 PERT 활동이 완료될 확률로서, 우리는 PERT 활동현장에 있는 사람들이 다른 어떤 종류의 확률보다도 이 확률의 신뢰성 있는 추정치를 제공할 수 있다고 가정하기로 한다.

만일 원래의 진정한 베타분포가 대칭에 가까우면 이 확률은 0.5가 될것이고 $m=0.5$, 곧 $\alpha=\beta$를 만족하는 임의의 k값이 구해진다. 이

때는 확률 Pr[X≤(a+b)/2]를 이용하여 k값을 추정함으로써 원래의 진실한 베타분포의 모양을 구하려는 것은 별로 의미가 없을 것이다.

그러나 가정된 베타분포가 비대칭이면 이 확률은 0.5가 아닐 것이며, 이 확률값에 대응하는 특정한 k값을 구할수 있다.

지금 Pr[X≤(a+b)/2]의 추정치가 P*로 주어져 있다면 베타분포의 수치적분([10], [15])을 이용하여 P*에 대응하는 k값을 구할수 있다. 편의상 a=0, b=1로 놓아 확률변수 X와 모우드 m을 정규화 한다. 계산의 결과는 <표 1>에 제시되어 있는데, <표 1>은 각 (P*, m)의 쌍에 대한 k값의 추정치를 보여준다.

예를 들어 어떤 PERT 활동에 대해서 원래의 활동시간의 파라메타 a, b, m이 각각 30, 60, 33일이라고 하고, 그 PERT 활동이 45일 이내에 완료될 확률 P*가 0.7로 추정되었다고 하면 표준화된 모우드 $m=0.1$이므로 이 (P*, m)에 대한 k값은 <표 1>에서 0.97이다. PERT 공식 (1)에 따를때 이 활동의 평균시간은 41일인데 비해 진실한 베타분포에 입각한 평균시간은 (7)에서 41일로써 4일의 차이가 난다. 확률 P*가 정확하게 추정되었다면 이 확률은 PERT 활동에 4일분에 해당하는 추가 긴급비용이 발생할 가능성을 제거해 준다.

$m>0.5$일 때는 다음과 같은 베타분포 함수 F의 대칭성을 이용하여 k값을 구한다.

$$F(x\ ;\ \alpha,\ \beta)=1-F(1-x\ ;\ \beta,\ \alpha). \quad \cdots\cdots (11)$$

예를 들어 $m=0.9$, P*=0.3일때, α, β의 값만이 서로 바뀐 위의 예와 같은 k값이 구해진다.

<표 1> 주어진 (P*, m)에 대응하는 집중도 k의 값

p*	m=0.1	m=0.2	m=0.3	m=0.4
0.51	0.04	0.05	0.07	0.15
0.52	0.07	0.10	0.15	0.32
0.53	0.11	0.15	0.23	0.50
0.54	0.15	0.21	0.32	0.71
0.55	0.19	0.26	0.41	0.93
0.56	0.23	0.32	0.51	1.18
0.57	0.28	0.38	0.61	1.45
0.58	0.32	0.44	0.71	1.74
0.59	0.37	0.51	0.82	2.07
0.60	0.41	0.57	0.94	2.42
0.61	0.46	0.64	1.06	2.80
0.62	0.51	0.72	1.19	3.21
0.63	0.56	0.79	1.33	3.66
0.64	0.61	0.87	1.47	4.14
0.65	0.67	0.95	1.63	4.66
0.66	0.73	1.04	1.79	5.21
0.67	0.78	1.13	1.96	5.81
0.68	0.84	1.22	2.14	6.45
0.69	0.91	1.32	2.33	7.14
0.70	0.97	1.42	2.53	7.88
0.71	1.04	1.52	2.74	8.66
0.72	1.11	1.63	2.96	9.50
0.73	1.18	1.75	3.20	10.40
0.74	1.26	1.87	3.45	11.36
0.75	1.34	2.00	3.72	12.39
0.76	1.42	2.14	4.00	13.49
0.77	1.51	2.28	4.30	14.66
0.78	1.60	2.43	4.62	15.92
0.79	1.70	2.59	4.96	17.27
0.80	1.80	2.76	5.33	18.71
0.81	1.91	2.94	5.72	20.26
0.82	2.02	3.13	6.14	21.94
0.83	2.14	3.34	6.59	23.74
0.84	2.27	3.56	7.08	25.69
0.85	2.41	3.80	7.61	27.81
0.86	2.56	4.06	8.18	30.12
0.87	2.72	4.33	8.81	32.65
0.88	2.90	4.64	9.50	33.00
0.89	3.09	4.98	10.26	*
0.90	3.30	5.35	11.10	*
0.91	3.53	5.77	12.06	*
0.92	3.80	6.24	13.14	*
0.93	4.10	6.79	14.38	*
0.94	4.45	7.42	15.84	*
0.95	4.87	8.19	17.60	*
0.96	5.39	9.13	19.79	*
0.97	6.06	10.38	22.67	*
0.98	7.02	12.16	26.81	*
0.99	8.69	15.28	33.00	*

) 이 (P, m)에 대한 k값은 계산상의 over flow로 인해 구해질수 없다.

4. 결 론

본 논문에서는 PERT 활동완료 확률을 이용하여 PERT 활동을 위해 가정된 베타분포의 집중도의 실제값을 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법을 실제 PERT 의사결정에 이용할 때 다음과 같은 절차를 권고할 수 있다.

1) PERT 현장 사람들에게 a, b, m, $Pr[X \leq (a+b)/2]$의 정확한 추정치를 물어본다.

2) 표준화된 모우드 m이 0.5에 가까우면 그냥 PERT 공식을 이용한다.

3) 표준화된 모우드 m이 0.5와 어느정도 이상 차이가 나면 <표 1>에서 주어진 (P^*, m) 쌍에 대응하는 정확한 k값을 구한다.

4) 만일 구해진 k값이 4에 가까우면 그냥 PERT 공식을 이용하고, 구해진 k값이 4와 어느정도 이상 차이가 나면 공식 (4), (5)에서 얻어진 평균시간과 분산을 이용한다.

본 논문에서 제시된 방법은 특정 PERT 활동에 대응하는 원래의 진실한 베타분포의 정확한 모양을 구함으로써 PERT 의사결정의 신뢰성을 높이는데 도움을 줄수 있는데 여전히 두가지 의문이 남는다.

첫째, 확률 $Pr[X \leq (a+b)/2]$를 하나의 값으로 주는것 보다는 범위로 제시하는 것이 실제 의사결정에 좀더 융통성을 주지 않을까? 이 경우에 허용 가능한 범위를 어떤 기준에 입각하여 결정할 것인가?

둘째, P^*를 이용하여 구한 k값이 PERT 가정 $k=4$와 어느 정도 이상 차이가 나면 PERT 공식을 버릴 것인가? 이것에 정확한 기준이 있을수 있는가?

이러한 점들은 좀더 연구 보완되어야 할 과제이다.

참고문헌

1. Brunk, H.D., *An Introduction to Mathemactical Statistics,* Xerox College Publishing(1975)
2. Chae, K.C., "A Geometric Interpretation of the PERT Assumptions on the Activity Time", Working Paper 88-009, Faculty of Adam., U. of New Brunswick, Canada E3B5A3; forthcoming, *INT. J. EDUC. FOR. SCI. AND. TECH.*
3. Chae, K.C. and Sehun Kim., "Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-ratio of the Mode and Midpoint", forthcoming, *IIE Transactions.*
4. Clark, K.C., "The PERT Model for the Distribution of an Activity Time", *OPERATIONS RES.* 10, 405-406(1962)
5. Donaldson, W.A., "The Estimation of the Mean and Variance of a PERT Activity Time", *OPERATIONS RES.* 13, 382-385(1965)
6. Farnum, N.T. and Stanton, L.W., "Some Results Concerning the Estimation of Beta Distribution Parameters in PERT", *J. OPL. RES. SOC.* 38, 287-290(1987)
7. Gallagher, C., "A Note on PERT Assumptions", *MANAGEMENT SCI.* 33, 1360(1987)
8. Golenko, D.I., "On the Distribution of Activity Time in PERT", *J. OPL. RES. SOC.* 39, 767-771(1988)
9. Grubbs, F.E., "Attempts to Validate

Certain PERT Statistics or Picking on PERT", *OPERATIONS RES.* 10, 912-915(1962)

10. Kossack, C.F. and Henschke, C.I., *Introduction to Statistics and Computer Programming*, Holdenday, Sanfransisco(1975).
11. Kotiah, T.C.T. and Wallace, N.D., "Another Look At PERT Assumptions", *MANAGEMENT SCI.* 20, 44-49(1973)
12. Littlefield Jr., T.K. and Randolph, P.H., "An Answer to Sasieni's Question on PERT Times", *MANAGEMENT SCI.* 33, 1357-1359(1987)
13. Lukaszewicz, J., "On the Estimation of Errors Introduced by Standard Assumptions Concerning the Distribution of Activity Duration in PERT Calculations", *OPERATIONS RES.* 13, 326-327(1965)
14. MacCrimmon, K.R. and Ryavec, C.A., "An Analytic Study of the PERT Assumptions", *OPERATIONS RES.* 12, 16-37(1964)
15. Majumder, K.L. and Bhattacharjee, G.P., "Algorithm AS63; Incomplete Beta Integral", *APPLIED STATISTICS,* 22, 409-411(1973)
16. Malcolm, D.G., Roseboom, J.H., Clark, C.E. and Fazar, W., "Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation", *OPERATIONS RES.* 7, 646-669(1959)
17. Moder, J.J. and Rodgers, E.G., "Judgement Estimates of the Moments of PERT Type Distributions", *MANAGEMENT SCI.* 15, 76-83(1968)
18. Perry, C. and Greig, I.D., "Estimating the Mean and Variance of Subjective Distributions in PERT and Decision Analysys", *MANAGEMENT SCI.* 21, 1477-1480(1975)
19. Sasieni, M.W., "A Note on PERT Times", *MANAGEMENT SCI.* 32, 1652-1653(1986)
20. Welsh, D.J.A., "Errors Introduced by a PERT Assumption", *OPERATIONS RES.* 13, 141-143(1965)